دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره دکتری رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

مباحثی در ابرجبرها و زیرساختارهای فازی آن ها

استاد راهنما:

دکتر رضا عامری

اساتید مشاور:

دکترمحمدمهدی زاهدی

دکتریحیی طالبی رستمی

دانشجو:

طاهره نوذری

آبان ۱۳۸۹

تقدیر و تشکر

خدای مهربان را شکرگذارم که مرا یاری کرد تا مرحله ای دیگر از زندگی ام را در پرتو الطالفش به پایان برم . برخود لازم می دانم از کلیه کسانی که مرا در انجام این رساله یاری کرده اند تشکر نمایم، در ابتدا از استادان گرامی:

جناب آقای دکتر رضا عامری به عنوان استاد راهنما که با راهنمایی این رساله در نهایت دلسوزی و همیاری، از کمک ها و پیشنهادات ارزشمند ایشان بسیار بهره برده ام و شاگردی ایشان افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کرده است،

جناب آقای دکتر یحیی طالبی رستمی به عنوان استاد مشاور، به خاطر زحماتی که برای اینجانب کشیدند و همواره پاسخگوی سوالات و یاریگر مشکلاتم بوده اند،

از تمام معلمان و استادان بزرگم که باعث پیشرفتم بوده اند،

و نیز از خانواده عزیزم که بدون پشتیبانی و همکاریشان امکان به پایان رساندن این رساله امری غیرممکن بود.

تقدیم به:

روح پاک پدرم.

چکیده

هدف از این رساله بررسی ابرجبرها و ابرجبرهای فازی می باشد. در این راستا ضمن مرور خواص ابرجبرها، به معرفی ابرجبرهای فازی در دو دیدگاه می پردازیم. در یک دیدگاه ابرجبر فازی را تعمیم جبرفازی در نظر گرفته و ارتباط این ابرجبرها را با ابرجبرهای معمولی بررسی می کنیم و در دیدگاه دوم به کمک تعریف فازی ابرعمل، فازی ابرجبر را معرفی و سپس نتایجی در ارتباط با زیر فازی ابرجبرها، روابط منظم فازی (قوی)، توابع ترم و حاصلضرب فازی ابرجبرها به دست می آوریم و در خاتمه رابطه اساسی را برای فازی ابرجبرها معرفی و نتایجی اساسی در مورد آن به دست می آوریم.

فهرست مطالب

فصل چهارم – روابط اساسی

لیست علایم و اختصارات

مشبکه کامل	L
تعلق داشتن	$\in$
مخالف بودن	$\neq$
اینفیمم	
سوپریمم	⍰
زیرمجموعه بودن	$\subseteq$
نقطه فازی	a_y
کمتر یا مساوی	$\leq$
اجتماع	$\cup$
اشتراک	$\cap$
زیرمجموعه فازی	μ
α- برش، زیرمجموعه تراز	μ_{α}
تولید شده	$<>$
حاصلضرب مستقیم	$\prod_{i=1}^{i=n}$
بستارمتعدی α	α^*
بستارکامل A	$\partial(A)$
مجموعه تمام زیرمجموعه های غیرتهی H	$P^*(H)$

مجموعه تمام زیرمجموعه های فازی غیرصفر H	$F^*(H)$
مجموعه تمام زیرمجموعه های فازی H	$F(H)$
مجموعه تهی	$\emptyset$
تابع مشخصه X	χ_X
نگاشت طبیعی	ρ یا w
رابطه منظم	$\bar{\rho}$
رابطه منظم قوی	$\bar{\bar{\rho}}$
ابرعمل یا فازی ابرعمل n_i– تایی	β_i
مجموعه توابع ترم n– تایی روی جبر	$P^n(\mathbb{B})$
جبر توابع ترم n– تایی روی جبر	$P^{(n)}(\mathbb{B})$
همانی ضعیف	$p \cap q \neq \emptyset$
همانی قوی	$p = q$
مجموعه تمام ابرجبرها	MA
مجموعه تمام فازی ابرجبرها	FMA

مقدمه و تاریخچه

نظریه ابر ساختارهای جبری در سال ۱۹۳۴ توسط مارتی[1] [40] در هشتمین کنگره ریاضیدانان کشورهای اسکاندیناوی معرفی شد، بنابراین می توانیم سال ۱۹۳۴ را سال پیدایش نظریه ابرساختارهای جبری بدانیم، در حقیقت مارتی برای اولین بار مفهوم یک ابر گروه را به عنوان تعمیمی از مفهوم یک گروه معرفی کرد وسپس محققین زیادی در این شاخه جدید از جبر مدرن کار کردند وآن را گسترش دادند. این نظریه با کمک و تلاش و مقالات نویسندگان متعددی مخصوصا از فرانسه ، ایتالیا ، یونان و آمریکا توسعه یافت و در دهه های اخیر نتایج جدید و جالبی در این نظریه منتشر شدند.

انواع مختلف موضوعات و کثرت کاربردها در سایر گرایشها مانند هندسه، نظریه گروهها، نیم گروهها، میدانها، گرافها، آنالیز ترکیبیاتی، احتمال و غیره باعث شد که این رشته بتواند به عنوان یکی از زمینه های مهم تحقیق درقلمرو ریاضیات قرار بگیرد.

نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسورلطفی عسگرزاده [۶۱] دانشمند ایرانی تبار دانشگاه برکلی آمریکا عرضه شد. زاده یک مجموعه فازی از یک مجموعه نا تهی X را به عنوان یک تابع از مجموعه Xبه بازه *[0,1]* معرفی کرد که بعدها گوگن[2] [29] بازه [0,1] را با یک مشبکه کامل جایگزین کرده ومفهوم $L-$ مجموعه ها را عرضه کرد. رزنفلد[3] [53] برای اولین بار مفهوم یک زیرگروه فازی را ارایه و پس از این مقالات، محققین در بسیاری از زمینه های مختلف جبر فازی مانند نظریه ایده آل های فازی، مدول های فازی، فضاهای برداری فازی و... مقالات و کتب متعددی را به چاپ رسانده اند.

مردسن[4] و مالیک[5] به جمع آوری دسته وسیعی ازاین مقالات پرداختندکه حاصل تلاش آنها کتابی است به نام جبرجابجایی فازی[6] [37] که درسال ۱۹۹۸ به جامعه علمی عرضه شد. بدین ترتیب نظریه جبرفازی از شاخه‌های مهم، نسبتاً جدید و جالب در زمینه گرایش جبر می‌باشد. این شاخه در حقیقت یک شاخه میان رشته ای از تلاقی شاخه های جبر و نظریه مجموعه های فازی است که تاکنون گسترش بسیاری یافته و صدها مقاله در این زمینه در مجلات معتبر علمی دنیا به چاپ رسیده است.

1- Marty
2-Goguen
3-Rosenfeld
4-Mordeson
5-Malik
6- Fuzzy Commutative Algebra

در دو دهه اخیر شاهد تلفیق دو نظریه ابرساختارهای جبری و نظریه فازی نیز بوده ایم که حاصل آن پیدایش "*نظریه ابرساختارهای جبری فازی*" است. از نکات جالب در پیدایش این نظریه جدید نقش ریاضیدانان ایرانی در پیدایش و توسعه آن است. به طوری که اولین مقالات در زمینه نظریه ابرساختارهای جبری فازی توسط پروفسور زاهدی و شاگردانش در دانشگاه شهید باهنر کرمان منتشر گردیده ([62]) و توسط محققان بسیاری در داخل و خارج کشور توسعه یافته است . این مقالات مربوط به فازی ابرجبرها هستند که مقالات توسعه داده جبرهای فازی را شامل می شوند مانند گروه های فازی، مشبکه فازی، حلقه فازی و...([65],[24],[23],[22],[3],[2]).

نوع دیگر از مقالاتی که در زمینه نظریه ابرساختارهای جبری فازی ارایه شده است، مقالاتی هستند که به بررسی ابرعمل های معمولی تعریف شده روی مجموعه های فازی می پردازند. این دسته از مقالات ابتدا توسط کرسینی[7] در[16] و [17] و سپس توسط او و لیورینو [8] در[19] و[20] ، لیورینو در[35] و دیگران دنبال شد.

همانطور که در بالا اشاره گردید مطالعه ابرساختارهای جبری یک موضوع تحقیقی جالب در نظریه مجموعه های فازی است. یک ابرعمل معمولی به هر زوج از عناصرمجموعه زمینه ، یک مجموعه غیرتهی از آن را منسوب می کند در حالی که یک *ابرعمل فازی* به هر زوج از عناصرمجموعه زمینه یک زیر مجموعه فازی از آن را اختصاص می دهد. این ایده در ابتدا توسط کرسینی و توفان[9] در [21] معرفی شد و سپس کهاجیاس [10] ، کنستانتینداو [11] و سرافیمیدیس [12] در [56] به منظور بررسی ارتباط با ابرساختارهای مهمی چون فضای الحاقی این ایده را مطالعه کردند. اخیرا" سن [13] ، عامری و چودوری [14] مفهوم فازی ابرنیم گروه را مطالعه و بررسی کردند [55]، مفهوم فازی ابر حلقه توسط لیورینو و دواز در[37] و فازی ابرمدول توسط لیورینو در[36] مورد مطالعه قرار گرفته است.

۷-Corsini
8-Leoreanu
9-Tofan
10-Kehagias
11-Konstantinidou
12-Serafimidis
13-Sen
14-Chowhdury

خوشبختانه هم اکنون ده ها محقق فعال کشور در عرصه بین المللی در نظریه ابرساختارهای جبری فازی و جبر فازی فعالیت می کنند و تا کنون صدها مقاله تحقیقی در مجلات معتبر بین المللی به چاپ رسیده است و ده ها دانشجو در دوره های تحصیلات تکمیلی در دانشگاه های مختلف کشور مانند شهید باهنر کرمان، تهران، تربیت مدرس، شهید بهشتی، مازندران، یزد، سیستان و بلوچستان و... فارغ التحصیل گردیده یا به تحصیل مشغولند. از محققین بنام کشور که هم اکنون در این زمینه فعالیت می کنند می توان به آقایان ، پروفسور محمد مهدی زاهدی (به عنوان بنیان گذار نظریه ابرساختارهای جبری فازی) ، پروفسور رضا عامری، پروفسور بیژن دواز، پروفسور رجبعلی برزویی ، پروفسور علی ایرانمنش ، پروفسور محمد مهدی ابراهیمی و... اشاره کرد.

در واقع ایران را می‌توان یکی از قطبهای تحقیق در زمینه ابرساختارهای جبری و ابرساختارهای جبری فازی قلمداد کردکه آثار و نتایج آن به صورت چاپ مقاله در مجلات معتبر علمی، کنفرانس های داخلی و خارجی و رساله ها و پایان نامه های تحصیلات تکمیلی و کتب انتشار یافته است ([64],[41],[26],[25],[23],[22],[4],[1]). همچنین تحقیقات نسبتا" زیادی در سراسر دنیا در موردجبر فازی و ابرساختارهای جبری (فازی) انجام می‌شود که طی سال های اخیر رو به افزایش است. بعضی از کشورهایی که در این زمینه فعال ترند عبارتنداز: ایتالیا، رومانی، چک، یونان، آمریکا، کانادا، فرانسه، تایلند ، چین، هند، کره، مجارستان، ترکیه و...

یکی از زمینه های مطرح در نظریه ابرساختارهای جبری، ابرجبرها [15] یا چند جبرها [16] می باشد .از جمله این کارها می توان به تحقیقاتی که توسط پیکت [17] ، اشویجرت [18] و هانسول [19] صورت گرفته است ، اشاره کرد([54],[50],[49],[31])، همچنین سال های اخیر این زمینه مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است از جمله این مقالات ، می توان تحقیقاتی که توسط زاهدی ، عامری ، پلیا [20] و ابراهیمی انجام شده است را نام برد ([48],[47],[46],[45],[26],[12],[2]) .حال در این رساله ما به بررسی ابرساختارهای جبری فازی با ایده ابرعمل فازی می پردازیم و مطالب مهمی چون حاصلضرب مستقیم، توابع ترم و رابطه اساسی را برای این رده از ابرساختارهای جبری فازی مورد مطالعه قرار می دهیم.

15-Hyperalgebra
16-Multialgebra
17-Pickett
18-Schweigert
19-Hansoul

20-Pelea

این پایان نامه در ۴ فصل تنظیم شده است. در فصل یک، نمادها و نتایج مهم در نظریه ابرگروه ها و نیز روابط هم ارزی تعریف شده روی ابرگروه ها معرفی می شوند، همچنین مقدماتی از نظریه مجموعه های فازی و جبر فازی نیز بیان می شود.

در فصل دو به بررسی ابرجبرها و برخی ویژگی های آنها و نیز به مطالعه ابرجبرهای فازی می پردازیم. در بخش ۱-۲ تعاریف و قضایای متنوعی از ابرجبرها ارایه شده که این بخش عمدتا" از مراجع [12,45,47,50] استخراج شده است. در بخش ۲-۲ ابتدا رسته ابرجبرها و رسته ابرجبرهای فازی را تعریف می کنیم، سپس به بررسی ارتباط بین این دو رسته از طریق رابطه اساسی می پردازیم. در بخش ۳-۲ به معرفی ابرجبرهای یک تایی می پردازیم.

فصل سه را به فازی ابر جبرها با ایده تعریف فازی ابرعمل اختصاص داده ایم. در بخش ۱-۳، فازی ابرجبرها، همریختی های آنها و ارتباط با ابرجبرها ، در بخش ۲-۳ به بررسی زیرفازی ابرجبر و روابط منظم فازی (قوی) روی فازی ابرجبرها پرداخته ایم ، سپس در فصل ۳-۳ توابع ترم روی فازی ابرجبرها را بررسی می کنیم و در نهایت در بخش ۴-۳ حاصلضرب یک خانواده از فازی ابرجبرها را مورد بررسی قرار می دهیم.

در فصل چهار ابتدا رابطه اساسی روی فازی ابرجبرها را معرفی می کنیم. سپس در بخش ۲-۴ رابطه اساسی را در مورد فازی ابرنیم گروه ها که فازی ابرجبری از نوع (۲) می باشد بررسی می کنیم و در بخش ۳-۴ با معرفی مفهومی به نام بخش کامل در فازی ابرنیم گروه ها، ارتباط بین رابطه اساسی و بخش کامل را بررسی می کنیم.

همچنین مقالات استخراج شده از این رساله به شرح زیر می باشند:

[1] R. Ameri, T. Nozari, *A Connection Between Categories of (Fuzzy) Multialgebras and (Fuzzy) Algebras* , Italian Journal of Pure and Applid Mathematics, *(To Apear).*

[2] R. Ameri, T. Nozari, *Fuzzy Hyperalgebras,* Computers and Mathematics with Application, *(To Apear).*

[3] R. Ameri, T. Nozari, *Compelet Parts and Fundamental Relation Of Fuzzy Hypersemigroups,* Multiple- Valued Logic and Soft Computing *(To Apear).*

[4] R. Ameri, T. Nozari, *Term Functions and Fundamental Relation of Fuzzy Hyperalgebras,* Ratio Mathematica, 20 (2010) 43-65 *.*

[5] R. Ameri, T. Nozari, *On the Direct Product of Fuzzy Hyperalgebras, (Submitted)*

[6] R. Ameri, T. Nozari, *Unary Hyperalgebras, (Submitted).*

فصل اول : مقدمات و پیشنیازها

در این فصل تعاریف، نمادها و نتایج مهم در نظریه ابرگروه ها و نیز روابط هم ارزی تعریف شده روی ابرگروه ها معرفی می شوند، همچنین مقدماتی از نظریه مجموعه های فازی و جبر فازی نیز بیان می شود. تعاریف و قضایای مربوط به این فصل از مراجع [۴۴و۶۰ ،۱۵] آورده شده اند . همچنین برای مطالعه بیشتر می توان به منبع [18] مراجعه کرد.

1.1 ابرگروه ها وابرحلقه ها

فرض کنید H یک مجموعه غیرتهی و $P^*(H)$ خانواده همه زیرمجموعه های ناتهی H است.

تابع $\circ : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \rightarrow P^*(H)$ را یک *ابرعمل دوتایی* روی H و زوج $(H,\circ)$ را یک *ابرگروه وار* می نامند.

فرض کنید$\circ$ یک ابرعمل روی H و A و B زیرمجموعه های ناتهی H باشند آنگاه قراردادهای زیر را در نظرمی گیریم:

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b \ ,$$

همچنین $\{x\} \circ A = x \circ A$ و $A \circ \{x\} = A \circ x$ را در نظر می گیریم.

ابرعمل $\circ$ را شرکت پذیر می نامند، هرگاه برای هر $x, y, z \in H$ ، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

هرگاه ابرعمل $\circ$ شرکت پذیر باشد آنگاه $(H,\circ)$ یک *نیم ابرگروه* نامیده می شود. ابرگروه وار H را *شبه ابرگروه* گویند هرگاه در خاصیت تکثیر صدق کند، یعنی برای هر $a \in H$ داشته باشیم:

$$a \circ H = H \circ a = H.$$

یک *ابرگروه* نیم ابرگروهی است که شبه ابرگروه نیز باشد.

مثال ۱٫۱٫۱. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. ابرعمل$\circ$ را روی G به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall x, y \in G, \qquad x \circ y = \langle x, y \rangle$$

که در آن $< x, y >$ زیرگروه تولید شده توسط x و y می باشد. به آسانی دیده می شود $(G,\circ)$ یک ابرگروه است.

تعریف ۲,۱,۱. فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه و K زیرمجموعه غیرتهی H باشد. هرگاه $K \circ K \subseteq K$ ، آنگاه $(K,\circ)$ یک زیرابرگروه وار H است. زیرابرگروه وار K را یک *زیرابرگروه* گوییم در صورتی که داشته باشیم:

$$\forall a \in K, \quad K \circ a = a \circ K = K.$$

مثال ۳,۱,۱. مجموعه $H = \{u, v, z, w\}$ را با ابرعمل زیر در نظر بگیرید:

$\circ$	u	v	z	w
u	u	u	$\{u, v, z\}$	H
v	v	v	$\{u, z\}$	H
z	z	z	$\{u, v, z\}$	H
w	w	w	$\{u, v, z\}$	H

در این صورت $(H,\circ)$ یک ابرگروه و $K = \{u, v, z\}$ یک زیرابرگروه H است.

تعریف ٤,۱,۱. فرض کنید R یک مجموعه ناتهی، $+$ و $\cdot$ ابرعمل های تعریف شده بر R باشند :

$$+: R \times R \to P^*(R), (x, y) \to x + y \subseteq R,$$

$$\cdot: R \times R \to P^*(R), (x, y) \to x \cdot y \subseteq R,$$

دستگاه جبری $(R, +, \cdot)$ را یک *ابرحلقه* می نامند، اگر R همراه با دو ابرعمل دوتایی $+$ و $\cdot$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $(R, +)$ ابرگروه باشد،

(۲) $(R, \ .)$ نیم ابرگروه باشد،

(۳) ابرعمل $\cdot$ نسبت به ابرعمل $+$ دارای خاصیت توزیع پذیری باشد، یعنی

$$\forall x, y, z \in R,\ x.(y + z) = x.y + x.z, \quad (x + y).z = x.z + y.z\ .$$

اگر در ساختار فوق $(R, +)$ یک نیم ابرگروه باشد دستگاه جبری $(R, +, \cdot)$ یک *نیم ابرحلقه* نامیده می شود.

فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک ابرحلقه و $S \subseteq R$ زیرمجموعه غیرتهی باشد، در این صورت S *زیر ابرحلقه* R نامیده می شود، هرگاه $(S,+,\cdot)$ یک ابرحلقه باشد.

منظور از *ابرمیدان*، ابرحلقه $(R,+,\cdot)$ است که در آن $(R,\ .)$ یک ابرگروه باشد.

مثال ۵,۱,۱. فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک حلقه و G یک زیرگروه نرمال از نیم گروه ضربی $(R,\ .)$ باشد. رده های ضربی $\bar{x} = xG$ را در نظر گرفته و قرار دهید

$$\bar{R} = \frac{R}{G} = \{\bar{x} : x \in R\},$$

ابرعمل های $\oplus$ و $\odot$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \bar{R}, \bar{x} \oplus \bar{y} = \{\bar{z} : z \in \bar{x} + \bar{y}\},$$

$$\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \bar{R}, \bar{x} \odot \bar{y} = \overline{xy},$$

به راحتی می توان دید که $(\bar{R},\oplus,\odot)$ یک ابرحلقه است. در ضمن اگر R یک میدان باشد آنگاه $(\bar{R},\oplus,\odot)$ یک ابرمیدان است.

۲,۱ روابط منظم، منظم قوی و اساسی

تعریف ۱,۲,۱. فرض کنید R یک رابطه دوتایی روی H باشد،

الف. برای هر $A, B \in P^*(H)$، $A\bar{R}B$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A\bar{R}B \leftrightarrow \begin{cases} \forall\ a \in A, \exists\ b \in B : aRb \\ \forall\ b \in B, \exists\ a \in A : aRb \end{cases}$$

ب. با شرایط قسمت قبل، $A\bar{\bar{R}}B$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A\bar{\bar{R}}B \leftrightarrow\ \forall\ a \in A, \forall\ b \in B : aRb.$$

تعریف ۲,۲,۱. فرض کنید H یک نیم ابرگروه باشد،

الف. رابطه R را *منظم راست* گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall(x,y,a)\in H^3,\ \ xRy\rightarrow x\circ a\bar{R}y\circ a,$$

به طریق مشابه، رابطه *منظم* چپ را نیز می توان تعریف کرد. رابطه R را *منظم* می نامند هرگاه منظم چپ ومنظم راست باشد.

ب. رابطه R *منظم قوی راست* نامیده می شود در صورتی که:

$$\forall(x,y,a)\in H^3,\ \ xRy\rightarrow x\circ a\bar{\bar{R}}y\circ a\,,$$

رابطه *منظم قوی* چپ به طریق مشابه تعریف می شود. رابطه R را *منظم قوی* گویند هرگاه منظم قوی چپ و منظم قوی راست باشد.

مثال ۳,۲,۱. نیم ابرگروه $H=\{a,b\}$ و ابرعمل$\circ$ روی آن را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$\circ$	a	b
a	a	$\{a,b\}$
b	b	b

هرگاه $R=\{(a,b),(b,b)\}$ آنگاه R منظم راست است، ولی R منظم چپ نیست.

مثال ٤,۲,۱. ابرگروه $H=\{a,b,c\}$ و ابرعمل $\circ$ روی آن به وسیله جدول زیر تعریف شده است:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	$\{a,c\}$	b
c	c	b	a

هرگاه $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$ ، آنگاه R یک رابطه هم ارزی منظم قوی روی H است.

فرض کنید R یک رابطه انعکاسی و تقارنی باشد. کوچکترین رابطه هم ارزی شامل R را *بستار متعدی(انتقالی)* R گوییم و آن را با نماد R^* نشان می دهیم. بنابراین داریم :

$$aR^*b \Leftrightarrow \exists n \in N, \exists (x_1, \dots, x_n) \in H^n: a = x_1, b = x_n, x_1 R x_2 R \dots R x_n.$$

قضیه ۵,۲,۱ . فرض کنید $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه و R یک رابطه هم ارزی روی H باشد، در این صورت احکام زیر برقرار هستند:

الف.اگر R یک رابطه منظم باشد، آنگاه H/R ، خانواده رده های هم ارزی روی H با ضرب زیر یک نیم ابرگروه است:

$$\forall\, x, y \in H, \quad \bar{x} \otimes \bar{y} = \{\bar{z} : z \in x \circ y\}.$$

ب. برعکس، اگر R یک رابطه هم ارزی و H/R با ضرب بالا یک نیم ابرگروه باشد، آنگاه رابطه R رابطه منظم است.

ج. با مفروضات قسمت الف، اگر $\pi: H \to H/R$ نگاشت تصویری باشد آنگاه π یک همریختی پوشاست.

د. بامفروضات قسمت الف، اگر $(H,\circ)$ ابرگروه باشد آنگاه خارج قسمتی $(H/R,\otimes)$ یک ابرگروه است.

اثبات. رجوع شود به [15] صفحه ۱۸ قضیه ۲۹.

قضیه ۶,۲,۱. فرض کنید H و K ابرگروه و $f: H \to K$ یک همریختی قوی است، رابطه R روی H را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall x, y \in H, \quad f(x) = f(y) \Leftrightarrow xRy,$$

الف. در این صورت R یک رابطه هم ارزی روی H است و آن رابطه هم ارزی وابسته به f یا هسته f نامیده می شود.

ب. تابع $g: f(H) \to H/R$ با ضابطه $g\big(f(x)\big) = \bar{x}$ یک یکریختی است.

اثبات. رجوع شود به [15] صفحه ۱۹ قضیه ۳۰.

قضیه ۷,۲,۱. فرض کنید $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه و R یک رابطه هم ارزی منظم قوی روی H است. در این صورت

الف. $(H/R,\otimes)$ یک نیم گروه است.

ب. هرگاه $(H,\circ)$ ابرگروه باشد آنگاه $(H/R,\otimes)$ یک گروه است.

اثبات. رجوع شود به [15] صفحه ۱۹ قضیه ۳۱.

تعریف ۸,۲,۱. فرض کنید R یک رابطه هم ارزی روی نیم ابرگروه H است، R را رابطه همنهشتی می نامند هرگاه:

$$\forall (x,y) \in H^2, z \in R(x) \circ R(y) \rightarrow R(z) \subseteq R(x) \circ R(y).$$

مثال ۹,۲,۱. نیم ابرگروه H را با ابرعمل $\circ$ طبق جدول زیر در نظر می گیریم:

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	b

قرار دهید $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$ ، آنگاه R یک رابطه منظم قوی است ولی رابطه R همنهشتی نیست. زیرا داریم

$$R(b) = \{b,c\} \nsubseteq R(b) \circ R(b) = \{b,c\} \circ \{b,c\} = \{b\}.$$

در ادامه این بخش رابطه β^* روی ابرگروه ها را معرفی کرده و برخی خواص اصلی آن را بررسی می کنیم. تعاریف و قضایای مربوطه از مرجع [15] آورده شده اند. (همچنین برای مطالعه بیشتر و کاربرد این رابطه به مراجع [18,27,28] رجوع شود.)

تعریف ۱۰,۲,۱. فرض کنید $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه باشد، روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta_1 = \{(x,x) : x \in H\},$$

$$a\beta_n b \Leftrightarrow \exists (z_1, \dots, z_n) \in H^n : \{a,b\} \subseteq \prod_{i=1}^{n} z_i\,, \qquad n > 1$$ برای هر

$$\beta = \bigcup_{n \in N} \beta_n\,,$$

رابطه β، انعکاسی و تقارنی است. فرض کنید β^* بستار انتقالی رابطه β باشد.

قضیه ۱۱,۲,۱. فرض کنید $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه است. در این صورت β^* کوچکترین رابطه هم ارزی منظم قوی روی H است به طوری که مجموعه رده های هم ارزی رابطه β^*، یعنی H/β^* همراه با عمل

$$\beta^*(x)\beta^*(y) = \{\beta^*(z) : z \in \beta^*(x) \circ \beta^*(y)\},$$

تشکیل گروه می دهد.

اثبات. رجوع شود به [15] صفحه ۱۰ قضیه ۱۲.

رابطه β اولین بار توسط کوسکاس روی ابرگروه ها مورد بررسی قرار گرفت [34]. فرنی ثابت کرد که رابطه β روی هر ابرگروه یک رابطه متعدی است و درنتیجه هم ارزی است [28]. رابطه β^*، را *رابطه اساسی* روی H و H/β^* *گروه اساسی* نامیده می شود.

مثال زیر نشان می دهد رابطه β روی نیم ابرگروه ها لزوما" متعدی نیست.

مثال ۱۲,۲,۱. مجموعه $H = \{a, b, c, d\}$ همراه با ابرعمل $\circ$ که با جدول زیر تعریف می شود را در نظر بگیرید:

$\circ$	a	b	c	d
a	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
b	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
c	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
d	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$

ابرعمل $\circ$ شرکت پذیراست زیرا برای هر سه تایی $x, y, z \in H$ داریم

$$x \circ (y \circ z) = \{b, d\} = (x \circ y) \circ z,$$

به وضوح رابطه β متعدی نیست زیرا $b\beta c$ و $b\beta d$ بنابراین $c\beta^* d$، ولی $d\beta c$ برقرار نیست. پس $\beta \neq \beta^*$.

رابطه γ^* اولین بار توسط وجیوکلیس روی رده ای از ابرحلقه ها موسوم به H_v– حلقه ها معرفی گردید [60]. در واقع رابطه γ^* ارتباط بین نظریه ابرحلقه ها و نظریه حلقه ها را ارایه می کند. (برای اطلاع بیشتر در این مورد به [59] رجوع شود.)