بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکزشیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

گروه علمی ریاضی

تابعک های تقریبا ضربی روی جبرهای باناخ تعویض پذیر

آمنه اکبری

استادراهنما:

دکترفریباارشاد

استادمشاور:

دکتربهمن یوسفی

خرداد ماه ۱۳۹۱

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد خانم **آمنه اکبری** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** به شماره دانشجویی **۸۸۰۳۲۱۵۸۸** با عنوان:

" تابعک‌های تقریباً ضربی روی جبرهای باناخ تعویض‌پذیر "

با حضور هیأت داوران در روز **چهارشنبه** مورخ **۱۳۹۱/۳/۱۷** ساعت **۹ صبح** در محل ساختمان **اندیشه دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ......۱۸.۵......به حروف......هجده و نیم...... با درجه......عالی........تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر فریبا ارشاد	راهنما	استادیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر بهمن یوسفی	مشاور	استاد	پیام نور شیراز	
۳	دکتر احمد خاکساری	داور	دانشیار	پیام نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۴۰-۰۷۱۱
دورنگار: ۶۲۲۲۲۴۹-۰۷۱۱
صندوق پستی :۱۳۶۸- ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

گواهی اصالت، نشروحقوق مادی ومعنوی اثر

اینجانب آمنه اکبری دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸مقطع کارشناسی ارشدرشته ریاضی گرایش آنالیزگواهی می نمایم چنانچه درپایان نامه خودازفکر،ایده ونوشته دیگری بهره گرفته ام بانقل قول مستقیم یاغیرمستقیم منبع وماخذآن رانیزدرجای مناسب ذکرکرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشدبرعهده خویش می دانم وجوابگوی آن خواهم بود.

دانشجوتایید می نمایدکه مطالب مندرج دراین پایان نامه (رساله)نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده ازنتایج دیگران مرجع آن راذکرنموده است.

نام ونام خانوادگی دانشجو:آمنه اکبری

تاریخ وامضاء ۹۱/۶/۲۰

اینجانب آمنه اکبری دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸مقطع کارشناسی ارشدرشته ریاضی گرایش آنالیزگواهی می نمایم چنانچه براساس مطالب پایان نامه خوداقدام به انتشارمقاله،کتاب، و...نمایم ضمن مطلع نمودن استادراهنما،بانظرایشان نسبت به نشرمقاله،کتاب،و...وبه صورت مشترک وباذکرنام استادراهنمامبادرت نمایم.

نام ونام خانوادگی دانشجو:آمنه اکبری

تاریخ وامضاء ۹۱/۶/۲۰

کلیه حقوق مادی مترتب ازنتایج مطالعات،آزمایشات ونوآوری ناشی ازتحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نورمی باشد.

خردادماه ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدرومادرم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بودووجودشان برایم همه مهروامید؛آنان که راستی قامتم درشکستن قامتشان تجلی یافت. آنان که نگاهشان سرمایه های زندگی من است.

سپاسگزاری

حمدوسپاس بی شمارپروردگارکه باالطاف بیکران خوددرتمامی مراحل یاریم نمودتاتوفیق انجام این رساله نصیبم گردیدوتوانستم قدم کوچکی درپیشبردعلم بردارم. باتقدیروتشکرفراوان ازاستادراهنمای محترم سرکارخانم دکترفریباارشادکه همواره با روی بازوکلام بی آلایش خویش پذیرای من بودند وباتشکر ازاساتید ارجمنددکتربهمن یوسفی ودکتراحمدخاکساری که مسئولیت مشاوره وداوری این پایان نامه راتقبل فرمودند.

چکیده

فرض کنید Aیک جبرباناخ مختلط تعویض پذیرباعنصرهمانی ۱باشدو$0 < \delta$.

تابعک خطی $\varphi: A \to ¢$ راتقریبا δ -ضربی گوییم اگر

$$|\varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b)| \leq \delta\|a\|\|b\| \qquad ; a, b \in A \ .$$

دراین پایان نامه برای هرعضوA، طیفی رامعرفی می کنیم وبه ارتباط بین این طیف وتابعکهای تقریبا ضربی می پردازیم.

این پایان نامه شامل ۳فصل می باشد.درفصل اول مفاهیم ومقدماتی که درفصلهای بعد مورد استفاده قرارمی گیردراارائه خواهیم داد.درفصل دوم خواص طیف شرطی یک عنصررادریک جبرباناخ موردمطالعه قرارمی دهیم ودرفصل سوم، رابطه ی بین طیف شرطی وتابعکهای تقریبا ضربی روی جبرهای باناخ تعویض پذیر رابیان می کنیم.درنهایت بااستفاده ازقضایایی که در این خصوص بیان می شود، اثبات جدیدی ازقضیه ی معروف گلیسون-کاهانه-زلازکو را ارائه خواهیم داد.

فهرست

عنوان **صفحه**

فصـــل اول

مقدمـــه

دراین فصل قضایاوتعاریفی که درفصلهای بعدبه آنهانیازمندیم،آورده شده اند.

۱.۱تعریف.فضای برداری Aروی میدان مختلط $\textcent$، جبرمختلط گوییم هرگاه یک ضرب روی آن تعریف شده باشدودرروابط زیرصدق کند:

۱) $x(yz) = (xy)z$

۲) $x(y+z) = xy + xz \quad , \quad (x+\mathrm{y})\ \mathrm{z} = xz + yz$

۳) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

برای هر $\alpha \epsilon \textcent \quad , x, y, z \epsilon A$.

بعلاوه اگر Aیک فضای باناخ باشدونسبت به نرم $\|.\|$تعریف شده روی A، نامساوی $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$برقرارباشد A رایک جبرباناخ[1] گوییم.

اگر Aشامل عنصریکه ی eباشد، آنگاه جبرباناخ Aرایکدارگوییم.جبرباناخ Aراتعویض پذیرگوییم هرگاه $xy = yx(x, y \epsilon A)$.

۲.۱مثال.اگر X یک فضای فشرده باشد، آنگاه $A = C(X)$ باضرب تعریف شده زیر یک جبرباناخ است.

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \ .$$

برای هر $x \in X$. این جبرباناخ تعویض پذیر است وعنصریکه دارد.

1.Banach algebra

۳.۱مثال.فرض کنیدXیک فضای باناخ باشدو$A=B(X)$(فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار روی X).اگرضرب تعریف شده روی A،همان ترکیب توابع باشد آنگاه A یک جبرباناخ با عنصر همانی Iاست.اگر$\dim X = n < \infty$آنگاه $A = B(X)$ یکریخت باجبرهمه ماتریس های$n \times n$روی اعدادمختلط است.بنابراین اگر$\dim X>1$آنگاه$A = B(X)$تعویض پذیرنیست.

۴.۱ یادآوری .فرض کنیم جبرباناخ A یکدارنباشد و$A_1 = \{(x , \alpha) \ : x \in A , \alpha \in ¢\}$.

عمل جمع وضرب اسکالررویA_1رابه صورت مولفه به مولفه تعریف می کنیم وعمل ضرب ونرم رادرA_1به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|(x,\alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \quad , (x,\alpha)(y,\beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$$

دراین صورت A_1 یک جبرباناخ یکداراست.$\big(e = (0,1)\big)$.

(نگاشت$(x,0) \quad \longmapsto \quad x$ یک یکریختی ازA به یک زیرفضای A_1می باشد.)

۵.۱ لم.اگرA یک جبرباناخ باعنصرهمانی باشدو$x\epsilon A$به طوری که $\|x-1\| < 1$، آنگاه x معکوس پذیراست.

برهان.قرارمی دهیم $y = 1 - x$بنابراین $r = \|y\| < 1$ ازاینکه$\|y^n\| \leq \|y\|^n = r^n < 1$

پس $\sum_{n=0}^{\infty}\|y^n\| < \infty$ودرنتیجه$z = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$در$A$ همگراست.

اگر$z_n = 1 + y + \cdots + y^n$داریم

$$z_n(1-y) = (1 + y + \cdots + y^n) - (y + y^2 + \cdots + y^{n+1}) = 1 - y^{n+1}.$$

اما$\|y^{n+1}\| \leq r^{n+1}$پس $\lim_{n\to\infty} y^{n+1} = 0$. بنابراین داریم

$$z(1-\mathrm{y})=\lim_{n\to\infty} z_n(1-\mathrm{y})=1\ .$$

به طورمشابه می توان ثابت کردکه $(1-\mathrm{y})z=1$. پس $1-y$معکوس پذیراست و$=(1-\mathrm{y})^{-1}$

$z=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{y}^n$و $1-y=x$.■

۶.۱قضیه.اگر A یک جبرباناخ یکداراباشدومجموعه های G, G_L, G_rبه صورت زیرتعریف شوند:

$G_L=\{a\epsilon A \mid$ازطرف چپ معکوس پذیراست.$a\}$,

$G_r=\{a\epsilon A \mid$ازطرف راست معکوس پذیراست.$a\}$,

$G=\{a\epsilon A \mid$معکوس پذیر است.$a\}$.

آنگاه G, G_L, G_r زیرمجموعه های بازاز Aهستند.همچنین تابع $f: G\to G$ باتعریف $a\longmapsto a^{-1}$پیوسته است.

برهان.فرض کنیم $a_0\epsilon G_L$ و $b_0\epsilon A$ به طوری که $b_0a_0=1$.ثابت می کنیم

$$B(a_0;\|b_0\|^{-1})\subseteq G_L$$

عنصر $a\in B(a_0;\|b_0\|^{-1})$ رادرنظرمی گیریم بنابراین $\|a-a_0\|<\|b_0\|^{-1}$ ودرنتیجه

$$\|b_0a-1\|=\|b_0(a-a_0)\|<\|b_0\|\|a-a_0\|<1\ ,$$

بنابه لم۵.۱، $b_0a=x$ معکوس پذیراست.اگر $b=x^{-1}b_0$ آنگاه $ba=1$ یعنی $a\in G_L$.به طورمشابه می توان ثابت کردکه G_r بازاست.ازاینکه $G=G_r\cap G_l$ پس G نیز بازاست.برای اثبات پیوستگی تابع f، دنباله $\{a_n\}$ رادر G درنظرمی گیریم به طوری که $a_n\to 1$.

ثابت می کنیم $a_n^{-1}\longrightarrow 1$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$داده شده باشد.دراین صورت $0 < \delta < 1$را به گونه ای انتخاب می کنیم که $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$

چون $a_{\mathrm{n}} \to 1$ پس$N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq N$ داریم.

$$\|a_n - 1\| < \delta \ .$$

ازطرفی بنابه لم ۵.۱،

$$a_n{}^{-1} = \big(1 - (1 - a_n)\big)^{-1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} (1 - a_{\mathrm{n}})^{\mathrm{k}} = 1 + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (1 - a_{\mathrm{n}})^{\mathrm{k}}$$

پس به ازای هر $n \geq N$ داریم

$$\|a_n{}^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (1 - a_{\mathrm{n}})^{\mathrm{k}}\right\| \leq \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \|(1 - a_{\mathrm{n}})\|^{\mathrm{k}}$$

$$< \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \delta^{\mathrm{k}} = \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon \ .$$

پس $a_n{}^{-1} \longrightarrow 1$.

حال فرض کنیم $a \in G$ و$\{a_n\}$دنباله درG باشد به طوری که $a_n \to a$ بنابراین

$$a^{-1} a_n \to a^{-1} a = 1$$

ودرنتیجه بنابه پاراگراف قبلی $a_n{}^{-1} a = (a^{-1} a_n)^{-1} \longrightarrow 1$. پس

$$a_{\mathrm{n}}{}^{-1} = a_{\mathrm{n}}{}^{-1} a a^{-1} \longrightarrow a^{-1} \quad . \blacksquare$$

۷.۱قضیه. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای ازعناصرمعکوس پذیر A باشدکه به عنصری معکوس ناپذیر همگراباشد.دراین صورت $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \|x_n{}^{-1}\| = +\infty$.

برهان.(برهان خلف)فرض کنیدچنین نباشد.پس عد دی چون$c > 0$ وزیردنباله ای از $\{x_n\}$چون $\{x_{n_k}\}$وجود دارد،به طوری که برای هر n_k، $\left\|x_{n_k}{}^{-1}\right\| \leq c$.فرض کنید$x_n \to x$.

پس $x_{n_k} \to x$ ودرنتیجه برای n_k به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\left\| {x_{n_k}}^{-1}\left(x - x_{n_k}\right) \right\| \leq c \left\| x - x_{n_k} \right\| < 1 .$$

بنابراین طبق لم ۵.۱، $1 + {x_{n_k}}^{-1}\left(x - x_{n_k}\right)$معکوس پذیر می باشد.ازطرفی

$$x = x_{n_k}\left(1 + {x_{n_k}}^{-1}\left(x - x_{n_k}\right)\right).$$

پس x معکوس پذیر می باشد واین بافرض قضیه تناقض دارد.بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \|{x_n}^{-1}\| = +\infty . \blacksquare$$

۸.۱تعریف. فرض کنیدX یک فضای برداری توپولوژیکی باتوپولوژیτباشد.

۱)فضایX راموضعا محدب[1] گویند اگریک پایه ی موضعی βبرای توپولوژیτ وجودداشته باشدبه طوری که اعضایش محدب باشند.

۲)فضایX یک $F-$ فضااست اگرتوپولوژیτ، القایی توسط مترپایدارd و(X,d) یک فضای متریک کامل باشد.

(مترd روی فضای برداری X پایدارنامیده می شوداگر$d(x+z,y+z) = d(x,y)$ به ازای هر $x,y,z \in X$.)

۳)فضایX یک فضای فرشت[2] است اگرX، $F-$فضای موضعا محدب باشد.

1.Locally convex
2.Freshet space

۹.۱تعریف.فرض کنیدΩزیرمجموعه ی بازازمجموعه اعدادمختلط باشدوX یک فضای برداری توپولوژیکی مختلط باشد.

۱)تابع $f:\Omega \longrightarrow X$ را برΩ به طورضعیف تحلیلی[1]گوییم، اگربه ازای هر $\Lambda \in X^*$، Λf تحلیلی باشد.

۲) تابع $f:\Omega \longrightarrow X$ را برΩ به طورقوی تحلیلی[2] گوییم، اگر $\lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ به ازای هر $z \in \Omega$ وجود داشته باشد.

بنابه پیوستگی تابع Λ وتعاریف بالا هرتابع به طورقوی تحلیلی،به طورضعیف تحلیلی است.عکس این مطلب درقضیه زیر بیان شده است.

۱۰.۱قضیه .فرض کنید Ω زیرمجموعه ی بازازمجموعه اعدادمختلط باشد.اگر X یک فضای فرشت مختلط باشدوتابع $f:\Omega \longrightarrow X$ به طورضعیف تحلیلی باشدآنگاه f برΩ به طورقوی تحلیلی است.(رودین[3]، ۱۹۹۱: ۲۸۷)

۱۱.۱تعریف.فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد.مجموعه $E \subseteq X$ رابه طور ضعیف کراندار[4]می نامیم هرگاه هر $\Lambda \in X^*$، یک تابع کراندارروی E باشد.

۱۲.۱تعریف.تابع $f: ¢ \longrightarrow ¢$ راکه روی کل صفحه ی مختلط تحلیلی باشد،تابع تام[5] می نامیم.

1.Weakly analytic
2.Strongly analytic
3. Rudin
4.Weakly bounded
5.Entire function

۱۳.۱قضیه لیوویل[1]**.** اگرتابع $f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تام وکراندار باشد آنگاه f ثابت است.

۱۴.۱قضیه. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی مختلط باشدو X^* نقاط X راجدا کند . هرگاه تابع $f:\mathbb{C} \longrightarrow X$ به طورضعیف تحلیلی و $f(\mathbb{C})$ یک زیر مجموعه ی به طورضعیف کراندار از X باشد، آنگاه تابع f ثابت است.

برهان.به ازای هر $\Lambda \in X^*$، $\Lambda f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ یک تابع تام وکرانداراست.پس بنابه قضیه لیوویل به ازای هر $\Lambda \in X^*$، Λf ثابت است بنابراین به ازای هر $z\in\mathbb{C}$ داریم $\Lambda f(z) = \Lambda f(0)$.ازطرفی چون X^* نقاط X راجدا می کندپس $f(z) = f(0)$ برای هر $z\in\mathbb{C}$. ■

نکته:درکل این پایان نامه، منظور از Aیک جبرباناخ مختلط می باشد.

۱۵.۱تعریف.فرض کنید A دارای عنصرهمانی ۱باشد.زیرمجموعه ی باز Ω از A مجموعه رنسفورد[2]نامیده می شود هرگاه درشرایط زیرصدق کند:

۱) $1\in\Omega$

۲) $0\notin\Omega$

۳) $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\qquad z\,\Omega \subseteq \Omega$

۱۶.۱مثال. فرض کنید $\mathrm{Inv}(A)$ مجموعه ی تمام عناصرمعکوس پذیر A و

1.Liouville's Theorem
2.Ransford set

$\mathrm{Sing}(A) = A \setminus Inv(A)$ باشد. دراین صورت $\mathrm{Inv}(A)$یک مجموعه ی رنسفورد است.

۱.۱۷تعریف (طیف رنسفورد[1]).فرض کنیدΩ یک زیرمجموعه ی رنسفورد A باشدو$a \in A$

دراین صورت طیف رنسفوردa نسبت به مجموعه ی رنسفوردΩ رابه صورت زیرتعریف می کنیم

$$\sigma^{\Omega}(a) = \{\lambda \in ¢ | \lambda - a \notin \Omega \}.$$

نکته.$\sigma^{\mathrm{Inv}(A)}(a)$ رابه طورمختصربه صورت $\sigma(a)$ نشان می دهیم وطیفa نامیده می شود.

۱.۱۸مثال .$\sigma(0) = \{0\}$ و $\sigma(1) = \{1\}$.

۱.۱۹مثال .فرض کنید X یک فضای فشرده باشد.اگر $\mathrm{f} \in \mathrm{C}(X)$ نشان می دهیم$\sigma(\mathrm{f}) = \mathrm{f}(X)$.

فرض کنیم $\alpha \in f(X)$ بنابراین وجود دارد$x_0 \in X$ به طوری که $\mathrm{f}(x_0) = \alpha$. درنتیجه تابع f-α یک صفردر X دارد. یعنی f-α معکوس پذیر نیست .بنابراین $\alpha \in \sigma(f)$.

برعکس اگر$\alpha \notin f(X)$ دراین صورت f-α یک تابع ناصفر پیوسته روی X است.بنابراین

$(\mathrm{f} - \alpha)^{-1} \in C(X)$. درنتیجه f-α معکوس پذیر است پس $\alpha \notin \sigma(f)$.

۱.۲۰تعریف . شعاع طیفی[2] عنصر $a \in A$ را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$r(a) = sup\{|z| : z \in \sigma(a)\}$$

۱.۲۱لم. فرض کنید $a \in A$ و $\lambda \in ¢$ به طوری که $|\lambda| > \|a\|$ دراین صورت $\lambda - a$ معکوس پذیر است.به عبارت دیگر $\lambda \notin \sigma(a)$ وداریم:

1.Ransford spectrum
2.Usual spectral radius

$$(\lambda - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} \quad و \quad \|(\lambda - a)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}$$

برهان.

چون $\|a\| < |\lambda|$ پس $\left\|\frac{a}{\lambda}\right\| < 1$ درنتیجه بنابه لم۵.۱،

$$\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n.$$

چون$\lambda - a = \lambda\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)$ پس

$$(\lambda - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

ودرنتیجه

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\right\|$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{a}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left\|\frac{a}{\lambda}\right\|}$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|a\|}$$

$$= \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \quad . \blacksquare$$

۲۲.۱تعریف . تابعک خطی $\chi: A \to ¢$ راضربی[1] می نامیم هرگاه

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \qquad \forall a, b \in A$$

اگر χ یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی A باشدآنگاه باتوجه به توضیح زیر،$\chi(1) = 1$

1.Multiplication

فرض کنید$x \in A$و$\chi(x) \neq 0$. دراین صورت چون χ ضربی است،

$$\chi(x) = \chi(x)\chi(1) \Longrightarrow \chi(1) = 1 \quad .$$

۲۳.۱قضیه . روی جبرباناخ $M_n(¢)$، تابعک خطی ضربی ناصفروجودندارد.

برهان.فرض کنیم χ یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی $M_n(¢)$جبرباناخ باشد وE_{ij}ماتریسی باشدکه فقط درایه سطر i ام وستون j ام برابر ۱وبقیه درایه ها۰باشند.دراین صورت

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad .$$

بنابراین اگر $j \neq k$ ، آنگاه بنابه ضربی بودن χ،

$$\chi(E_{ij}E_{jk}) = \chi(E_{ij})\chi(E_{jk})$$

$$= \chi(E_{jk})\chi(E_{ij})$$

$$= \chi(E_{jk}E_{ij})$$

$$= 0 \quad .$$

بنابراین باتوجه به خطی بودن χ، برای هر $B \in M_n(¢)$، $\chi(\mathrm{B}) = 0$.■

۲۴.۱قضیه. اگر χ یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی A باشدآنگاه به ازای هر $a \in A$،$\chi(a) \in \sigma(a)$.بعلاوه χ تابعک خطی کرانداراست و $\|\chi\| = 1$.

برهان .

(برهان خلف)فرض کنیم $a \in A$ وجودداشته باشدبه طوری که $\chi(a) - a$ معکوس پذیرباشد.

آنگاه بنابه ضربی بودن χ داریم

$$\chi(1)=\chi(\chi(a)-a)\chi\left((\chi(a)-a)^{-1}\right)=0\,.$$

واین یک تناقض است، زیرا$\chi(1)=1$.پس به ازای هر $a\in A$،$\chi(a)\in\sigma(a)$.

حال بنابه ۲۰.۱ و۲۱.۱ داریم

$$|\chi(a)|\leq r(a)\leq\|a\|,$$

پس $\|\chi\|\leq 1$.ازطرفی چون $\chi(1)=1$، پس $\|\chi\|\geq 1$.ودرنتیجه $\|\chi\|=1$.■

۲۵.۱قضیه . تابعک $\chi\in A^*$،ضربی ناصفر روی A است اگروتنهااگربه ازای هر $x\in A$داشته باشیم $\chi(x)\in\sigma(x)$.

برهان.(لزوم) ازقضیه ۲٤.۱ نتیجه می شود.

(کفایت). بنابه فرض داریم $\chi(1)\in\sigma(1)=\{1\}$ پس $\chi(1)=1$.

عدد $n\geq 2$رادرنظرمی گیریم وتابع $P:ȼ\to ȼ$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم

$$P(\lambda)=\chi((\lambda 1-x)^n)$$

واضح است P یک چندجمله ای ازدرجه ی n است.فرض کنیم $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ریشه های چندجمله ای Pباشد.بنابراین داریم:

$$0=P(\lambda_i)=\chi((\lambda_i 1-x)^n)\in\sigma((\lambda_i 1-x)^n),$$