چکیده

یک نقطه ثابت برای نگاشت $T : X \longrightarrow X$ ، نقطه‌ی $x \in X$ است به طوری که $T(x) = x$. در این پایان‌نامه، با استفاده از مفهومی به نام مرکز به معرفی گردایه‌ای از نگاشت‌های پیوسته غیرخطی در فضاهای باناخ با عنوان نگاشت نوع J می‌پردازیم. این نگاشت‌ها به ما اجازه می‌دهند فضاهای باناخ را بدون نواحی مسطح غیرفشرده در کره‌های آن، به‌طوری که این فضاها دارای خاصیت نقطه ثابت برای این نوع نگاشت باشند، توصیف نمائیم. در بخش‌های مختلف این پایان‌نامه، با معرفی فضای به‌طور اکید محدب، به بررسی وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های نوع J می‌پردازیم. با استفاده از یک خاصیت هندسی فضاهای باناخ به نام خاصیت (C) که توسط براک درسال ۱۹۷۳ معرفی شد، درصدد یافتن نقطه ثابت برای نگاشت نوع J هستیم. با استفاده از این قضیه به اثبات وجود جواب برای معادلات انتگرال-تابعی به شکل

$$y(t) = \phi\left(t, \int_{\Omega} K(t,w) g(w, y(w)) d\mu(w)\right) \qquad , \qquad t \in \Omega$$

می‌پردازیم و همچنین وجود جواب برای معادلات انتگرال-تابعی منفرد ضعیف به فرم،

$$y(t) = \phi\left(t, \lambda \int_{\Omega} K(t,s) g(s, y(s)) ds\right) \qquad , \qquad t \in \Omega \quad a.e$$

با هسته‌ای به شکل

$$K(t,s) = h(t,s)|t-s|^{-\alpha} \qquad , \qquad 0 < \alpha < n \qquad , \qquad t \neq s$$

را در فضای باناخ مورد بررسی قرار می‌دهیم. سرانجام، وجود صفر را برای انواع خاصی از عملگرهای افزاینده بررسی می‌نمائیم.

کلمات کلیدی: نقاط ثابت، عملگرهای غیرخطی، فضاهای باناخ به‌طور اکید محدب تقریبی، عملگر افزاینده

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان نامه، گردایه‌ای وسیع از نگاشت‌های پیوسته که آنها را نگاشت‌های نوع J می‌نامیم و در بسیاری جهات نگاشت‌های غیرانبساطی (شبه) را نیز شامل می‌شوند، معرفی می‌نمائیم.

هرگاه C زیرمجموعه بسته، محدب و کراندار از فضای نرم‌دار $(X, ||.||)$ و $T : C \longrightarrow X$ نگاشت غیرانبساطی با نقطه ثابت $y_۰ \in C$ باشد، آنگاه برای هر $x \in C$، داریم :

$$||T(x) - y_۰|| \leq ||x - y_۰|| \qquad (۱)$$

نامساوی بالا ممکن است برای نگاشت غیرانبساطی فاقد نقطه ثابت، البته به‌ازای $y_۰$ای که متعلق به C نیست، برقرار باشد. به‌عنوان مثال، نگاشت آفین بِل[۱]، که روی گوی واحد B از فضای دنباله‌ای $c_۰$ به‌صورت $T(x_۱, x_۲, \ldots) = (۱, x_۱, x_۲, \ldots)$ تعریف شده است، در نظر بگیرید.

با فرض اینکه $y_۰ = ۲e_۱ = (۲, ۰, ۰ \ldots)$ باشد، T در B در نامساوی (۱) صدق می‌کند، در واقع برای هر $x = (x_۱, x_۲, \ldots) \in B$،

$$\begin{aligned} ||T(x) - y_۰|| &= ||(-۱, x_۱, x_۲, \ldots)|| \\ &= ۱ \leq ۲ - x_۱ = ||(x_۱ - ۲, x_۲, x_۳, \ldots)|| = ||x - y_۰|| \end{aligned}$$

در این پایان نامه، نشان می‌دهیم هنوز امکان به‌دست آوردن اطلاعاتی در مورد T وجود دارد که ما را به یافتن هر نقطه‌ی $y_۰ \in X$ که در نامساوی (۱) صدق می‌کند، رهنمون می‌نماید. چنین نقطه‌ای را مرکز می‌نامیم.

هدف، معرفی گردایه‌ای از همه‌ی نگاشت‌های مرکزپذیر می‌باشد. این گردایه از نگاشت‌ها شامل همه‌ی انقباض‌های تعریف شده در مجموعه‌های بسته‌ی فضاهای باناخ[۲] و حتی همه‌ی نگاشت‌های شبه‌ـغیرانبساطی (نگاشتی که هر نقطه ثابت آن، مرکز است) که توسط تریکمی[۳] برای توابع حقیقی در

۱) Beal's mapping

۲) Banach

۳) Tricomi

سال ۱۹۶۶ معرفی شد و یا توسط دیاز[۱] و متکالف[۲] در سال ۱۹۶۹، [۱۲] و داتسون[۳] در سال ۱۹۷۰، [۱۳] برای نگاشت‌هایی در فضاهای باناخ مطالعه شده است، می‌باشد.

همچنین گردایه‌ای از نگاشت‌های شبه‌ـغیرانبساطی به‌طور سره، گردایه‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی دارای نقطه ثابت را شامل می‌شود، اگر چه نگاشت‌های پیوسته که دارای مرکز هستند ولی شبه‌ـغیرانبساطی نیستند، یافت می‌شوند.

ساختار این پایان نامه به این‌صورت است : در فصل اول به بیان آن دسته از تعاریف، لم‌ها و قضایایی می‌پردازیم که خواننده می‌تواند در طول فصول بعدی، در قسمت‌های مختلف آن برحسب ضرورت به آن مراجعه کند. در فصل دوم، مفهوم نگاشت‌های نوع J را بیان نموده و نمونه‌هایی از این نوع نگاشت‌ها را معرفی می‌نمائیم. همچنین قضیه نقطه ثابت را برای نوع خاصی از نگاشت‌های نوع J با عنوان نگاشت ACN، بیان و اثبات می‌کنیم. فصل سوم به برخی از قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های نوع J اختصاص دارد و همچنین در این فصل به بیان نتایجی از این قضایای نقطه ثابت می‌پردازیم، سپس توصیفی از یک قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های نوع J از خاصیت هندسی فضاهای باناخ ارائه می‌دهیم که در سال ۱۹۷۳ توسط براک[۴] [۷] معرفی شد. این خاصیت را خاصیت (C) می‌نامیم. در بخش آخر این فصل، مفهوم مرکز را به نگاشت‌هایی که مقادیر محدب و فشرده ضعیف می‌گیرند، تعمیم می‌دهیم.

فصل چهارم به دو بخش تقسیم می‌شود که در بخش اول به معرفی فضاهای باناخی که دارای خاصیت (C) هستند می‌پردازیم و در بخش دوم خلاصه‌ای از رابطه میان نگاشت‌های غیرانبساطی و نگاشت‌های نوع J را بیان می‌کنیم.

در فصل پنجم نتایج به‌دست آمده در فصول قبل را برای اثبات یک قضیه وجودی برای معادلات انتگرال‌ـتابعی خاص به‌کار می‌بریم. در بخش بعدی نویسنده‌ای به نام دارویش[۵] به بررسی وجود جواب

۱) Diaz
۲) Metcalf
۳) Datson
۴) Bruck
۵) Darwish

یک معادله انتگرال‌ـتابعی منفرد ضعیف برای فضاهای باناخ با بعد نامتناهی می‌پردازد و در بخش آخر این فصل وجود صفر را برای عملگرهای افزاینده بررسی خواهیم نمود.

در تدوین این پایان نامه مطالب مقاله‌های [۱۶]، [۲۲] و [۹] به‌طورکامل، مورد استفاده قرارگرفته است.

فصل اول

مقدمات

در این بخش به مرور مطالبی از آنالیز ریاضی، آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی و نظریه نقطه ثابت متریک می‌پردازیم. برای سهولت کار، تعاریف، لم‌ها و قضایایی را در این فصل می‌آوریم که خواننده می‌تواند در طول فصول بعدی، در قسمت‌های مختلف آن، برحسب ضرورت به آن مراجعه کند.

برای مطالعات جامع می‌توان به منابع [۱۸]، [۲۰]، [۲۶]، [۲۸] و [۳۷] مراجعه نمود.

۱.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی (یا مختلط) باشد. تابع $||.|| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را یک نرم نامند، هرگاه به‌ازای هر x و y در X،

۱) $||x|| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ باشد.

۲) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$.

۳) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ به‌ازای هر $x, y \in X$ (نامساوی مثلث).

۲.۱.۱ تعریف. اگر فضای خطی X دارای نرم باشد، آنگاه گوئیم X یک فضای نرم‌دار است.

۳.۱.۱ تذکر. اگر X فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in X$، قرار دهیم $d(x, y) = ||x - y||$، آنگاه d یک متریک روی X است. در نتیجه هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

۴.۱.۱ تعریف. در حالتی که دنباله به یک عدد حقیقی می‌گراید می‌توان تعریف حد را به شرح زیر بیان نمود:

L حد دنباله (x_n) است اگر، برای هر عدد داده شده‌ی $\varepsilon > ۰$، فاصله همه‌ی جمله‌های دنباله به جز شماره باپایانی از آنها از L کمتر از ε باشد.

یک شرط ضعیف‌تر این است که فاصله عمده‌ی با پایانی از جمله‌های دنباله از L کمتر از ε باشد، در این حالت می‌گوئیم که L نقطه انباشتگی دنباله (x_n) است. بنابراین L هنگامی نقطه انباشتگی دنباله (x_n) است که برای هر عدد داده شده‌ی $\varepsilon > ۰$ و هر عدد داده شده‌ی N، $n \geq N$ای موجود باشد به‌طوری که $|x_n - L| < \varepsilon$.

۵.۱.۱ نتیجه. اگر دنباله‌ای دارای حد L باشد، L نقطه انباشتگی است، ولی عکس آن معمولاً صحیح نیست. برای مثال دنباله (x_n) که با $x_n = (-۱)^n$ تعریف می‌شود دارای دو نقطه انباشتگی ۱+ و ۱− است ولی حد ندارد.

۶.۱.۱ تعریف. دنباله (x_n) در فضای خطی نرم‌دار X را یک دنباله کشی[1] نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ داده شده، عددی صحیح مانند N وجود داشته باشد به‌طوری که برای همه‌ی $n \geq N$ و $m \geq N$ داشته باشیم :

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon.$$

۱) Cauchy

۷.۱.۱ تعریف. فضای نرم‌دار X را باناخ گویند، هرگاه X نسبت به متریک تولید شده توسط نرم، فضایی کامل باشد، به عبارت دیگر هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

۸.۱.۱ تعریف. دو نرم $||.||_۱$ و $||.||_۲$ روی فضای برداری X هم‌ارزگفته می‌شوند، هرگاه اعداد حقیقی و مثبت a و b موجود باشند به‌طوری که برای هر $x \in X$،

$$a||x||_۲ \leq ||x||_۱ \leq b||x||_۲.$$

۹.۱.۱ قضیه. هر دو نرم روی یک فضای برداری با بعد متناهی هم‌ارزند.

اثبات: به [۲۷، صفحه‌ی ۷۵] مراجعه شود.

۱۰.۱.۱ تعریف. فضای دنباله‌ای l^p به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$l^p = \{x = (x_n)_{n \geq ۱} \ : \ \sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \quad , \quad (p \geq ۱)$$

با نرم $||x_n||_p = (\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{۱}{p}}$.

۱۱.۱.۱ تعریف. فضای c، فضای باناخ از همه‌ی دنباله‌هایی از اعداد حقیقی است که همگرا هستند و $c_۰$ زیر فضای c شامل آن دنباله‌هایی است که همگرا به صفر هستند. در هر حالت $||x_n|| = \sup\{|x_n| : n = ۱, ۲, \dots\}$.

۱۲.۱.۱ تعریف. زیرمجموعه D از فضای متریک X، چگال در X گفته می‌شود هرگاه

$$\overline{D} = X.$$

۱۳.۱.۱ تعریف. فضای برداری نرم‌دار X، جدایی‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه X شامل زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

۱۴.۱.۱ قضیه. فرض کنید D زیرمجموعه ناتهی از فضای متری (X,d) و $\overline{D}$، بستار D باشد. آن‌گاه

(a) $x \in \overline{D}$ است اگر و فقط اگر دنباله (x_n) در D موجود باشد به‌طوری که $x_n \longrightarrow x$.

(b) D بسته است اگر و فقط اگر از $x_n \in D$ و $x_n \longrightarrow x$ نتیجه بگیریم $x \in D$.

اثبات: به [۲۸، صفحه‌ی ۳۰] مراجعه شود.

۱۵.۱.۱ تعریف. هر تابعک خطی روی یک فضای برداری X یک عملگر خطی از X بر فضای $\mathbb{R}$، عددهای حقیقی است. بنابراین هر تابعک خطی روی X یک تابع حقیقی f است، به طوری که

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

۱۶.۱.۱ تعریف. فضای همه‌ی تابعک‌های خطی کراندار روی یک فضای نرم‌دار X را دوگان (یا مزدوج) X نامیده و با X^* نشان می‌دهیم.

۱۷.۱.۱ تعریف. اگر دوگان X^* را با X^{**} نشان دهیم، آن‌گاه به‌ازای هر x متعلق به X یک عنصر φx در X^{**} متناظر است که با $(\varphi x)(f) = f(x)$ تعریف می‌شود و داریم :

$$||\varphi x|| = \sup_{||f||=۱} f(x).$$

۱۸.۱.۱ تعریف. نگاشت φ، ایزومرفیسم طبیعی X در X^{**} نامیده می‌شود و اگر $\varphi(X) = X^{**}$ باشد، می‌گوئیم X انعکاسی است.

۱۹.۱.۱ تعریف. اگر X یک فضای برداری نرم‌دار و $\mathfrak{F}$ دسته‌ای از تابعک‌های خطی روی X، باشد، آن‌گاه توپولوژی ضعیف تولید شده با $\mathfrak{F}$ را ضعیف‌ترین توپولوژی تعریف می‌کنیم به طوری که هر f متعلق به $\mathfrak{F}$ پیوسته باشد.

۲۰.۱.۱ تعریف. دنباله (x_n) در فضای نرم‌دار X همگرای قوی (همگرا در نرم) است هرگاه $x \in X$ای موجود باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$$

۲۱.۱.۱ تعریف. دنباله (x_n) در فضای نرم‌دار X همگرای ضعیف است هرگاه $x \in X$ای موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر fای متعلق به فضای دوگان X^*،

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

قرارداد. همگرایی ضعیف دنباله (x_n) به $x \in X$ را با نماد $x_n \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم.

۲۲.۱.۱ تعریف. فضای باناخی که همگرایی ضعیف و قوی آن یکسان باشد فضای شور[1] نامیده می‌شود.

۲۳.۱.۱ نکته. فرض کنیم $E \subset X$ باشد. بستار ضعیف E یا $\overline{E}^{\omega}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\overline{E}^{\omega} = \{x \in X \ : \ x_n \rightharpoonup x \text{دنباله‌ای از نقاط } E \text{ مانند } (x_n) \text{ موجود باشد به‌طوری که}\}$$

مجموعه E را به‌طور ضعیف بسته نامیم، هرگاه $\overline{E}^{\omega} = E$.

۲۴.۱.۱ قضیه. فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر گوی واحد بسته‌ی X به‌طور ضعیف فشرده باشد.

۲۵.۱.۱ تعریف. اگر Y یک زیر فضای توپولوژیکی X باشد، آنگاه Y به‌طور نسبی فشرده گفته می‌شود هرگاه هر دنباله در Y حاوی زیر دنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای در X باشد.

۱) Schur

۲۶.۱.۱ تعریف. برای دو فضای باناخ $(X, ||.||_X)$ و $(Y, ||.||_Y)$، فضای حاصلضرب $X \times Y$ همراه با نرم $||(x,y)||_1 := ||x||_X + ||y||_Y$ و فضای حاصلضرب $X \times Y$ همراه با نرم

$$||(x,y)||_\infty := \max\{||x||_X, ||y||_Y\},$$

را به‌ترتیب با $X \oplus_1 Y$ و $X \oplus_\infty Y$ نشان می‌دهیم.

۲۷.۱.۱ تعریف. $D \subset X$ را محدب گویند، اگر برای هر $t \in [0,1]$ داشته باشیم

$$tD + (1-t)D \subset D.$$

۲۸.۱.۱ تعریف. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب گفته می‌شود هرگاه $D(f)$ (دامنه f) مجموعه‌ای محدب باشد و برای هر $x, y \in D(f)$ و $0 \leq \lambda \leq 1$،

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

۲۹.۱.۱ گزاره. (نامساوی جنسن[1]) فرض کنید φ روی $(-\infty, \infty)$ یک تابع محدب و f روی $[0,1]$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. در این‌صورت داریم :

$$\int \varphi(f(t))dt \geq \varphi[\int f(t)dt].$$

اثبات: به [۳۷، صفحه‌ی ۱۳۶] مراجعه شود.

۲.۱ موضوعاتی در نظریه نقطه ثابت متریک

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنید $T : X \longrightarrow X$ نگاشتی از فضای متری (X,d) در خودش باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه ثابت T می‌نامیم در صورتی که $Tx = x$.

۱) Jensen

۲.۲.۱ تعریف. فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از فضای متری X با متریک d باشد. در این‌صورت قطر D عبارت است از

$$\operatorname{diam} D = \sup\{d(a,b) \ : \ a,b \in D\}.$$

۳.۲.۱ تعریف. نقطه $x \in D$ که D زیرمجموعه‌ای از فضای نرم‌دار X است، وابسته به قطر نامیده می‌شود، هرگاه

$$\operatorname{diam} D = \sup\{||x-y|| \ : \ y \in D\} \quad , \quad (x \in X)$$

به مجموعه‌های بسته، محدب و کراندار که شامل همه‌ی نقاط وابسته به قطر باشند، مجموعه‌های وابسته به قطر گویند.

۴.۲.۱ تعریف. فرض کنید (X,d) فضای متری باشد. نگاشت $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ که $\mathcal{CB}(X)$ گردایه‌ی همه زیرمجموعه‌های بسته و کراندار از X است، نگاشت مجموعه-مقدار نامیده می‌شود.

۵.۲.۱ تعریف. فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $\mathcal{CB}(X)$ گردایه‌ی همه زیرمجموعه‌های بسته، کراندار و ناتهی X باشد. در این‌صورت متریک هاسدورف[1] به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(A,B) = \max\{d(A,B) \ , \ d(B,A)\},$$

به‌ازای هر $A,B \in \mathcal{CB}(X)$ که در آن

$$d(A,B) = \sup\{\operatorname{dist}(y,A) \ : \ y \in B\};$$

$$d(B,A) = \sup\{\operatorname{dist}(x,B) \ : \ x \in A\};$$

$$\operatorname{dist}(y,A) = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in B\}.$$

۱) Hausdorff

۶.۲.۱ تعریف. فرض کنید K زیرمجموعه‌ی محدب و فشرده از فضای باناخ X باشد. نگاشت $F : K \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ نیم پیوسته‌ی پایینی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنباله‌ی $(x_n) \subset K$ با شرط $lim_{n\to\infty} x_n = x$، دنباله‌ی $y_n \in Fx_n$ وجود داشته باشد به طوری که $lim_{n\to\infty} y_n = y \in Fx$.

۷.۲.۱ تعریف. نگاشت $F : K \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ نیم پیوسته‌ی بالایی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنباله‌ی $(x_n) \subset K$ و $y_n \in Tx_n$ $(T : K \longrightarrow K)$ با شرایط $lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $lim_{n\to\infty} y_n = y$ داشته باشیم $y \in Fx$.

در این نوشتار فرض می‌کنیم $(X, ||.||)$ فضای باناخ حقیقی باشد.

۸.۲.۱ تعریف. گوی بسته و کره‌ی فضای باناخ $(X, ||.||)$ با شعاع r و مرکز $x_\circ \in X$ را به ترتیب با $B[x_\circ, r]$ و $S[x_\circ, r]$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$B[x_\circ, r] = \{x \in X \ : \ ||x - x_\circ|| \leq r\},$$

$$S[x_\circ, r] = \{x \in X \ : \ ||x - x_\circ|| = r\}.$$

همچنین $B_X = B[\circ, ۱]$ را گوی واحد باز و $S_X = \sigma B[\circ, ۱] = \{x \in X \ : \ ||x|| = ۱\}$ را کره واحد می‌نامیم.

۹.۲.۱ تعریف. هرگاه $\emptyset \neq C \subset X$ و $y \in X$ باشد، داریم :

$$\operatorname{dist}(y, C) := \inf\{||y - x|| \ : \ x \in C\}$$

هرگاه اینفیمم به‌ازای یک $x_\circ \in C$ به‌دست آید، این نقطه نزدیک‌ترین نقطه به $y_\circ \in C$ می‌باشد.

قرارداد: مجموعه‌ی همه‌ی نزدیک‌ترین نقاط در C به $y_\circ$ را با نماد $P_C(y_\circ)$ نشان می‌دهیم.

۱۰.۲.۱ نکته. هرگاه C مجموعه‌ی فشرده ضعیف باشد آن‌گاه برای هر $y \in X$، $P_C(y) \neq \emptyset$.

۱۱.۲.۱ تعریف. نگاشت (مجموعه-مقدار) P_C را نگاشت نزدیک‌ترین نقطه می‌نامیم.

۱۲.۲.۱ تعریف. اگر T نگاشت مجموعه-مقدار روی مجموعه X باشد، x نقطه ایستای (یا نقطه ثابت اکید) T نامیده می‌شود هرگاه $Tx = \{x\}$.

۱۳.۲.۱ تعریف. نگاشت $T : C \longrightarrow X$ غیرانبساطی گفته می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in C$،

$$||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y||.$$

۱۴.۲.۱ تعریف. نگاشت $T : C \longrightarrow X$ نگاشت انقباض گفته می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in C$، $k \in [۰, ۱)$ای موجود باشد به‌طوری که

$$||T(x) - T(y)|| \leq k||x - y||.$$

۱۵.۲.۱ تعریف. نگاشت $T : C \longrightarrow C$، انقباضی گفته می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in C$ با $x \neq y$،

$$||T(x) - T(y)|| < ||x - y||.$$

۱۶.۲.۱ تعریف. فرض کنید X فضای باناخ باشد و $C \subset X$. نگاشت $T : C \longrightarrow X$ لیپ شیتز با ثابت k گفته می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in C$،

$$||T(x) - T(y)|| \leq k||x - y||.$$

۱۷.۲.۱ تعریف. نگاشت $T : C \longrightarrow C$ آفین گفته می‌شود، هرگاه برای $y_۱, \ldots, y_n \in C$ و $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \geq ۰$ با شرط $\sum_{j=۱}^{n} \alpha_j = ۱$ داشته باشیم :

$$T(\sum_{j=۱}^{n} \alpha_j y_j) = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_j T(y_j).$$

۱۸.۲.۱ تعریف. نگاشت $T:C\longrightarrow C$ ایزومتری گفته می‌شود هرگاه برای هر $x,y\in C$،

$$||T(x)-T(y)||=||x-y||.$$

۱۹.۲.۱ تعریف. نگاشت غیرانبساطی $T:C\longrightarrow C$ به‌طور مجانبی منظم گفته می‌شود هرگاه برای هر $x\in C$،

$$\lim_{n\to\infty}||T^{n+1}x-T^nx||=0.$$

۲۰.۲.۱ تعریف. فرض کنید X فضای نرم‌دار باشد.در این صورت

۱) هرگاه $A\subseteq X$، در این صورت اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب شامل A در X را پوسته‌ی محدب A می‌نامند و با $conv(A)$ یا $co(A)$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر

$$conv(A)=\Big\{\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\ :\ 0\leq t_i\leq 1\ ,\ \sum_{i=1}^{n}t_i=1\ ,\ a_i\in A\ ,\ n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

۲) هرگاه $A\subseteq X$، اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب بسته در X که شامل A باشند را پوسته‌ی محدب بسته‌ی A می‌نامند و با $\overline{conv}(A)$ یا $\overline{co}(A)$ نمایش می‌دهند.

۲۱.۲.۱ قضیه. (اصل انقباض باناخ) فرض کنید X فضای متری کامل و نگاشت $T:X\longrightarrow X$ انقباض باشد. آنگاه T دارای نقطه ثابت یکتا در X است و برای هر $x_0\in X$ دنباله تکرارهای $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به این نقطه ثابت است.

اثبات: به [۲۶] مراجعه شود.

۲۲.۲.۱ لم. فرض کنید E فضای باناخ انعکاسی با نرم $||.||$ و $X\subset E$ بسته، محدب، کراندار و ناتهی باشد و فرض کنید نگاشت $T:X\longrightarrow X$ غیرانبساطی باشد. در این‌صورت دنباله (x_n) در X وجود دارد به‌طوری که

$$x_n-T(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

و

$$x_n - x_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

اثبات: $z \in X$ را ثابت فرض کنید. از اصل انقباض باناخ نتیجه می‌گیریم که دنباله (x_n) در X وجود دارد به‌طوری که

$$x_n = \frac{z}{n} + (1 - \frac{1}{n})T(x_n),$$

بنابراین

$$x_n - T(x_n) = \frac{z - T(x_n)}{n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

از طرفی چون T غیرانبساطی است، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم :

$$||x_n - x_{n+1}|| = ||\frac{1}{n(n+1)}(z - T(x_n)) + (1 - \frac{1}{n+1})(T(x_n) - T(x_{n+1}))||$$
$$\leq \frac{1}{n(n+1)}||z - T(x_n)|| + (1 - \frac{1}{n+1})||x_n - x_{n+1}||$$

در نتیجه

$$||x_n - x_{n+1}|| \leq \frac{||z - T(x_n)||}{n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

۲۳.۲.۱ تعریف. فیلتر $\mathcal{U}$ روی یک مجموعه ناتهی X، زیرمجموعه‌ای از $P(X)$ (مجموعه‌ای توانی X) است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف) $\mathcal{U} \neq \phi$

ب) اگر A و B متعلق به $\mathcal{U}$ باشد آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{U}$

پ) اگر $A \in \mathcal{U}$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه $B \in \mathcal{U}$

اگر علاوه بر شرایط مذکور این شرط را هم داشته باشیم که

ت) اگر $A \in P(X)$ آن‌گاه $A \in \mathcal{U}$ یا $X \backslash A \in \mathcal{U}$

آن‌گاه گوئیم $\mathcal{U}$ یک فرافیلتر روی X است.

۲۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{U}$ یک فرافیلتر روی $\mathbb{N}$ باشد و (x_n) دنباله‌ای در X باشد. در این‌صورت می‌گوئیم حد دنباله‌ی (x_n) تحت $\mathcal{U}$ برابر L است اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم:

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ ||x_n - L|| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$$

در این حالت می‌نویسیم، $\mathcal{U} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

۲۵.۲.۱ قضیه. حد مذکور در تعریف بالا یکتا است.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد یعنی $\mathcal{U} - \lim x_n = L_1$ و $\mathcal{U} - \lim x_n = L_2$ به‌طوری که $L_1 < L_2$ در این‌صورت اگر قرار دهیم $\varepsilon = \frac{||L_1 - L_2||}{3}$ آن‌گاه می‌بایست مجموعه‌های

$$A_1(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ ||x_n - L_1|| < \frac{||L_1 - L_2||}{3}\}$$

و

$$A_2(\varepsilon) = \{n \in N \ : \ ||x_n - L_2|| < \frac{||L_1 - L_2||}{3}\}$$

متعلق به $\mathcal{U}$ باشند و در این حالت مجموعه‌ی

$$\begin{aligned} B(\varepsilon) = A_1(\varepsilon) \cap A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ ||x_n - L_1|| < \frac{||L_1 - L_2||}{3} \\ , \ ||x_n - L_2|| < \frac{||L_1 - L_2||}{3}\} \end{aligned}$$

متعلق به $\mathcal{U}$ است. فرض کنیم $n \in B(\varepsilon)$، در نتیجه

$$||L_1 - L_2|| \leq ||x_n - L_1|| + ||x_n - L_2|| \leq \frac{2||L_1 - L_2||}{3}$$

که این یک تناقض است، بنابراین $B(\varepsilon)$ تهی خواهد بود و در نهایت فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲۶.۲.۱ تعریف. در فضای برداری نرم‌دار X با بعد نامتناهی، دنباله $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر X را یک پایه شادر[۱] برای X نامند هرگاه برای هر $x \in X$، دنباله‌ی یکتایی از اسکالرها مانند $\{\alpha_n\}$

۱) Schauder

موجود باشد به‌طوری که
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n.$$

۲۷.۲.۱ قضیه. فرض کنید X فضای برداری نرم‌دار و $B \subset X$ محدب و $U \subset B$ فشرده و ناتهی باشد، آن‌گاه هر نگاشت پیوسته $T : B \longrightarrow U$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.

اثبات: به [۲۶، صفحه‌ی ۱۳۶] مراجعه شود.

۲۸.۲.۱ قضیه. (شادر) فرض کنید T یک خود_نگاشت پیوسته از یک زیرمجموعه محدب فشرده و ناتهی B در یک فضای برداری نرم‌دار X باشد. در این‌صورت نگاشت T حداقل یک نقطه ثابت دارد.

اثبات: کافی است در قضیه (۲۷.۲.۱)، $U = B$ اختیار شود تا قضیه فوق حاصل شود.

۲۹.۲.۱ تعریف. زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی D از مجموعه داده شده K، مجموعه‌ی پایای مینیمال برای نگاشت $T : K \longrightarrow K$ نامیده می‌شود، هرگاه $T(D) \subset D$ باشد و همچنین D زیرمجموعه‌های بسته، محدب، سره و ناتهی که T_پایا هستند را شامل نشود.

۳۰.۲.۱ قضیه. فرض کنید K زیرمجموعه محدب، فشرده ضعیف و ناتهی از فضای باناخ X باشد. در این‌صورت برای هر نگاشت $T : K \longrightarrow K$، زیرمجموعه‌ای بسته و محدب از K که T_پایای مینیمال است، وجود دارد.

اثبات: به [۱۹، صفحه‌ی ۳۳] مراجعه شود.

۳۱.۲.۱ قضیه. (کِلی[۱]) برای هر زیرمجموعه بسته، محدب، کراندار و غیرفشرده K از فضای باناخ X، نگاشت لیپ شیتز $T : K \longrightarrow K$ وجود دارد به‌طوری که
$$\inf\{\|x - Tx\| \ : \ x \in K\} = d > 0.$$

۱) Klee

اثبات: به [۱۹، صفحه‌ی ۲۰۶] مراجعه شود.

۳۲.۲.۱ قضیه. فرض کنید K زیرمجموعه محدب، فشرده و ناتهی از فضای باناخ X باشد. در این‌صورت هر نگاشت نیم پیوسته‌ی بالایی با مقادیر محدب ازK بتوی زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی K دارای نقطه ثابت است.

اثبات: به [۱۹، صفحه‌ی ۲۰۰] مراجعه شود.

۳.۱ فضای اندازه

۱.۳.۱ تعریف. یک تابع مجموعه‌ای، عبارت است از تابعی که روی خانواده‌ای از مجموعه‌ها تعریف شده است در حالی که برد آن شامل حداکثر یک عدد حقیقی گسترش یافته می‌باشد. به عبارتی یعنی تابعی که به هر مجموعه‌ی یک دسته، یک عدد حقیقی گسترش یافته مربوط می‌کند. یک تابع مجموعه‌ای نامنفی، یک تابع مجموعه‌ای حقیقی یا حقیقی توسعه یافته است که مقادیر منفی نمی‌گیرد.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنید S یک گردایه‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های ناتهی X باشد. گردایه‌ی S یک جبر مجموعه‌ها نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند :

۱) اگر $A, B \in S$، آن‌گاه $A \cap B \in S$.

۲) اگر $A \in S$ آن‌گاه $A^c \in S$.

۳.۳.۱ تعریف. یک جبر S از مجموعه‌ها را یک σـجبر (σـمیدان) یا هیأت برل[۱] می‌گویند، اگر اجتماع هر دسته‌ی شمارش‌پذیر از مجموعه‌های S باز متعلق به S باشد. یعنی اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های متعلق به S باشد، آن‌گاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ نیز متعلق به S است. به عبارت دیگر یک σـمیدان

---
۱) Borel