دانشگاه بین‌المللی امام‌خمینی

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

مجموعه‌های صحیح و گراف‌های کیلی صحیح برخی از گروه‌های متناهی

استاد راهنما:
دکتر ابراهیم وطن دوست

استاد مشاور:
دکتر محمد اخویزادگان

تحقیق و نگارش :
صفر انوری آذر

مهر ماه ۱۳۹۲

فهرست مندرجات

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، در شمردن نعمت‌هایش عاجز و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، بالاتر از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌دریغ او با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین می‌کند، برحسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ " از استاد باکمالات و شایسته جناب آقای دکتر ابراهیم وطن‌دوست که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و زحمت راهنمایی این رساله را برعهده گرفتند؛ از استاد صبور و باتقوا جناب آقای دکتر اخوی‌زادگان که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل نمودند و همه دوستان و همکلاسی‌هایم که مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند و نیز از داور یا داورانی که با نقطه نظرات خود بر من منت می‌دهند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

فرض می‌کنیم G یک گروه نابدیهی، $S = S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\}$ و $1 \notin S \subset G$. گراف کیلی G که آن را به صورت $Cay(S:G)$ نمایش می‌دهیم، یک گراف با مجموعه‌ی رئوس G است که در آن دو رأس a و b مجاور هستند هرگاه $ab^{-1} \in S$. یک گراف صحیح است، اگر مقادیر ویژه‌ی مجاورت آن صحیح باشند.

فرض کنید G گروهی متناهی و $\hat{G}$ مجموعه‌ی تمام سرشت‌های نمایش‌های G روی اعداد مختلط باشد برای هر $A \subseteq G$ ، $\chi \in \hat{G}$ و $\chi(A) = \sum_{a \in A} \chi(a)$ ، مجموعه‌ی A را صحیح می‌نامیم ، هرگاه $\chi(A) \in \mathbb{Z}$.

در این پایان‌نامه مجموعه‌های صحیح و گراف‌های کیلی صحیح روی برخی از گروه‌های متناهی و همچنین مفهوم یک مجموعه صحیح را بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: گراف کیلی، طیف گراف، گراف‌های صحیح، سرشت تحویل ناپذیر

Abstract

Let G be non-trivial group, $S = S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\}$ and $1 \notin S \subset G$. The Cayley graph of G denoted by $Cay(S : G)$ is a graph with vertex set G and two vertices a and b are adjacent if $ab^{-1} \in S$. A graph is called integral, if its adjacency eigenvalues are integers.

Suppose G be a finite group, let $\hat{G}$ be the set of characters of representatioins of G over the complex numbers. for any subset $A \subseteq G, \chi \in \hat{G}$ and $\chi(A) = \sum_{a \in A} \chi(a)$. We call A integral if $\chi(A) \in \mathbb{Z}$.

In this thesis we introduce integral Cayley graphs on some of finite groups. Also we introduce the notion of an integral set.

Key Words: Cayley graph, Spectrum of graphs, Integral graphs, Irreducible characters.

مقدمه

یک گراف را صحیح می‌نامیم هرگاه مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت آن صحیح باشند. مفهوم گراف‌های صحیح در ابتدا توسط هراری [۱] و شونک [۲] در سال ۱۹۷۴ معرفی شد[۹]. در سال ۱۹۷۶ باسمیکر [۳] و سوتکویچ [۴] نشان دادند که تعداد گراف‌های صحیح، همبند و مکعبی، دقیقاً برابر ۱۳ است. این نتیجه مستقلاً توسط شونک در سال ۱۹۷۶ معرفی شد [۳]. البته قسمتی از این تحقیق توسط سوتکویچ در سال ۱۹۷۵ ارائه شد [۶]. در سال ۱۹۹۹ بالینسکا [۵] ثابت کرد که تعداد گراف‌های همبند و صحیح با حداکثر ۱۰ رأس دقیقاً برابر با ۱۵۰ عدد است [۱۸].

فرض کنید G یک گروه نابدیهی باشد، $S = S^{-1} := \{s^{-1}|s \in S\}$ و $1 \notin S \subset G$. گراف کیلی G که به صورت $Cay(S:G)$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس G است که در آن دو رأس a و b مجاور هستند هرگاه $ab^{-1} \in S$. اگر مجموعه‌ی S گروه G را تولید کند، در آن صورت گراف $Cay(S:G)$ همبند می‌شود. کلوتز [۶] و ساندر [۷] نشان دادند که تمام مقادیر ویژه‌ی غیر صفر $Cay(\mathbb{U}_n:\mathbb{Z}_n)$ صحیح هستند و مقدار $\phi(n)$ — تابع حسابی اویلر— را عاد می کنند؛ چنان‌که $\mathbb{Z}_n$، گروه دوری از مرتبه‌ی n و $\mathbb{U}_n$، زیر مجموعه‌ای از تمام عناصر مرتبه‌ی n از $\mathbb{Z}_n$ می‌باشد[۲۵].

---

[۱] Harary
[۲] Schwenk
[۳] Bussemaker
[۴] Cvetkovic
[۵] Balinska
[۶] Klotz
[۷] Sander

در سال ۱۹۷۹ بابای [8] طیف گراف‌های کیلی را با استفاده از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر مربوط به گروه G مشخص کرد[۱۹]. کلوتز و ساندر در سال ۲۰۰۷ نشان دادند که اگر مجموعه‌ی S به جبر بول تعلق داشته باشد و توسط زیر گروه‌هایی از گروه آبلی G تولید شده باشد، آن‌گاه $Cay(S:G)$ یک گراف صحیح می‌باشد[۲۵].

در فصل اول این پایان‌نامه خلاصه‌ای از نظریه‌ی نمایش و نظریه‌ی گراف ارائه کرده‌ایم، تا خواننده با مفاهیم اولیه‌ی استفاده شده در فصل‌های بعدی آشنا شود و دیدی کلی نسبت به آن‌چه ارائه شده است پیدا کند.

در فصل دوم اتم‌های یک جبر بول را بیان کرده و عدد اتمی برخی از گروه‌های متناهی را محاسبه می‌نماییم. در انتهای فصل نیر مجموعه‌های صحیح را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم با استفاده از نتایج حاصل از قضایای اصلی ارائه شده توسط بابای [۱۹] و مجموع رامانوجان [9]، گراف‌های کیلی صحیح روی گروه‌های دوری از مرتبه دلخواه را معرفی و طیف هر یک را به طور کامل مشخص کنیم. در آخر نیز جدول سرشت چند گروه خاص را که در این پایان‌نامه مورد نیاز است، گنجانده شده است.

[8] Babai

[9] Ramanujan

فصل ۱

پیش نیازها و مقدمات

برای درک بهتر مطالب ارائه شده در این پایان‌نامه لازم است خواننده با مطالب نظریه‌ی نمایش و نظریه‌ی گراف و جبر بول آشنا باشد. در بخش اول تعاریف و قضایایی در رابطه با گروه و نظریه‌ی نمایش گروه آورده شده است. در بخش دوم به چند قضیه اساسی از رده‌های مزدوجی اشاره کرده‌ایم. در بخش سوم سرشت یک گروه را معرفی و تعاریفی مانند سرشت تحویل‌ناپذیر، سرشت خطی و ... را ارائه می‌کنیم. در بخش چهارم تعاریف و قضایای مقدماتی گراف را بیان کرده و به معرفی مفاهیم گراف‌های صحیح، گراف‌های کیلی می‌پردازیم. و در ادامه، مفاهیم و قضایای اصلی جبر بول را بیان می‌کنیم.

۱—۱ نمایش گروه

تعریف ۱.۱ گروه ضربی حاصل از ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ با درایه‌های در F را به اختصار با $GL(n,F)$ نمایش می‌دهند، که F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۱ نمایش G روی F عبارت است از همریختی چون ρ از G به $GL(n,F)$ به ازای عدد صحیحی چون n. n را درجه‌ی ρ نامند.

از این رو اگر ρ تابعی از G به $GL(n,F)$ باشد آنگاه ρ نمایش G است اگر و فقط اگر به ازای هر $g,h \in G$ ، $(gh)\rho = g\rho h\rho$.

مثال ۱.۱ گیریم G گروه دووجهی $D_8 = \langle a,b | a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ باشد. ماتریس‌های A و B را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که $B^{-1}AB = A^{-1}$ و $A^4 = B^2 = I$. نتیجه می‌شود که تابع $\rho : G \to GL(2,F)$ با ضابطه‌ی $\rho : a^ib^j \to A^iB^j, (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1)$، نمایش D_8 روی F است. درجه‌ی ρ مساوی ۲ است.

تعریف ۳.۱ تابع $\rho : G \to GL(n,F)$ با ضابطه‌ی $g\rho = I_n$، به‌ازای هر $g \in G$، یک نمایش G است.

بنابراین هر گروه، نمایش‌هایی دارد که درجاتشان به قدر دلخواه بزرگ است.

تعریف ۴.۱ نمایش $\rho : G \to GL(۱, F)$ با ضابطه‌ی $g\rho = (۱)$، نمایش بدیهی G نامیده می شود.

تعریف ۵.۱ فرض کنید G یک گروه و V یک فضای برداری روی F باشد. در این صورت V را یک FG–مدول نامیم هرگاه برای هر $v \in V$ و هر $g \in G$، حاصل‌ضرب vg تعریف شود و به‌ازای هر $u, v \in V$، $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $vg \in V$

۲) $v(gh) = (vg)h$

۳) $v۱ = v$

۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$

۵) $(u + v)g = ug + vg$.

از شرایط (۱) و (۴) و (۵) این تعریف نتیجه می‌شود که به ازای هر $g \in G$ اگر B یک پایه‌ی V باشد، تابع $\rho_g : V \to V$ با ضابطه‌ی $v\rho_g = vg$ یک درونریختی V است. نماد $[g]_B$ را برای نشان دادن ماتریس درونریختی ρ_g نسبت به پایه‌ی B به کار می‌بریم.

قضیه ۱.۱

۱) اگر $\rho : G \to GL(n, F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$، آنگاه با تعریف vg به صورت زیر، V به FG–مدول تبدیل می‌شود.

$$vg = v(g\rho)$$

به‌علاوه پایه‌ای مانند B برای V وجود دارد به‌صورتی که برای هر $g \in G$، $g\rho = [g]_B$.

۲) فرض کنید V یک FG–مدول و B پایه‌ای برای آن باشد. در این صورت تابع $g \to [g]_B$ نمایش G روی F است.

اثبات: به قضیه‌ی ۴.۴ از [۱۱] رجوع شود. ■

تعریف ۶.۱ فرض کنید V یک FG–مدول باشد. زیر مجموعه W از V را یک FG–زیر مدول V نامیم هرگاه W زیرفضایی از V باشد و به‌ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

تعریف ۷.۱ FG–مدول V را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه مخالف صفر باشد و FG–زیر مدولی غیر از $\{0\}$ و V نداشته باشد. در غیر این‌صورت آن‌را تحویل‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۸.۱ نمایش $\rho : G \to GL(n,F)$ را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه F^n یعنی FG–مدول متناظر با آن که به صورت زیر تعریف می‌شود، تحویل‌ناپذیر باشد.

$$vg = v(g\rho); (v \in F^n, g \in G)$$

همچنین ρ را تحویل‌پذیر نامیم هرگاه F^n تحویل‌پذیر باشد.

تعریف ۹.۱ FG–مدول بدیهی عبارت است از فضای برداری یک‌بعدی V روی F با خاصیت:

$$vg = v; (\forall v \in V, g \in G)$$

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید V و W دو FG–مدول باشند. تابع $T : V \to W$ را یک FG–همریختی نامیم هرگاه T تبدیل خطی باشد و نیز داشته باشیم:

$$(vg)T = (vT)g; (\forall v \in V, \forall g \in G)$$

تعریف ۱۱.۱ FG—مدول V را کاملاً تحویل‌پذیر گوییم هرگاه $V = U_۱ \oplus U_۲ \oplus \ldots \oplus U_r$، که در آن هر کدام از U_iها FG—زیر مدول‌های تحویل‌ناپذیر V هستند.

قضیه ۲.۱ اگر G گروهی متناهی و F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، آن‌گاه هر FG—مدول ناصفر، کاملاً تحویل‌پذیر است.

اثبات: به قضیه‌ی ۷.۸ از [۱۱] رجوع شود. ■

لم ۱.۱ (لم شور[۱]) فرض کنید V و W ، $\mathbb{C}G$—مدول تحویل‌ناپذیر باشند. در این صورت:

(۱) اگر $T : V \longrightarrow W$ $\mathbb{C}G$— همریختی باشد، آن‌گاه یا T یک $\mathbb{C}G$— یکریختی است و یا به‌ازای هر $v \in V$ ، $vT = ۰$.

(۲) اگر $T : V \longrightarrow V$ یک $\mathbb{C}G$— یکریختی باشد،آن‌گاه T مضرب اسکالری دورنریختی همانی ۱_V است.

اثبات: به لم ۱.۹ از [۱۱] رجوع شود. ■

لم ۲.۱ تمام $\mathbb{C}G$—مدول‌های تحویل‌ناپذیر به‌ازای گروه متناهی و آبلی G دارای بعد ۱ هستند و تعداد آن‌ها مساوی $|G|$ است.

اثبات: به گزاره ۵.۹ از [۱۱] رجوع شود. ■

قضیه ۳.۱ فرض کنید $V_۱, \ldots, V_k$ تشکیل دهنده‌ی مجموعه‌ی کاملی از $\mathbb{C}G$—مدول‌های تحویل‌ناپذیر غیر یکریخت باشند. در این صورت $|G| = \sum_{i=۱}^{k} (dimV_i)^۲$.

اثبات: به قضیه‌ی ۱۲.۱۱ از [۱۱] رجوع شود. ■

مثال ۲.۱ فرض کنید G گروهی با مرتبه ۸ باشد و $d_۱, \ldots, d_k$ ابعاد همه‌ی $\mathbb{C}G$—مدول‌های متعلق به مجموعه‌ی کاملی از $\mathbb{C}G$—مدول های تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشند. بنابه قضیه‌ی ۸.۱، $\sum_{i=۱}^{k} d_i^۲ = ۸$

[۱] Schur

. چون $\mathbb{C}G$—مدول بدیهی، تحویل‌ناپذیر و دارای بعد ۱ است پس به ازای iای، $d_i = ۱$. از این‌رو $d_۱, \dots, d_k$ یکی از دو حالت ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ یا ۲, ۱, ۱, ۱, ۱ را دارد. وقتی که G گروه آبلی است، حالت اول رخ می‌دهد، و وقتی که $G = D_۸$، حالت دوم رخ می‌دهد.

تعریف ۱۲.۱ تابع اویلر[۲] یا تابع فی را با نماد $\phi(n)$ نشان می‌دهیم و آن تابعی است که تعداد عدد صحیح مثبت کوچکتر یا مساوی n را که نسبت به n اول هستند، می‌شمارد. به عبارتی دیگر اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه $\phi(n)$ اعداد صحیح k است که $۱ \leq k \leq n$ و $gcd(n,k) = ۱$.

لم ۳.۱ ثابت کنید اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $(m,n) = ۱$ ، آن‌گاه $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

اثبات: فرض کنید $m = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} ... p_k^{\alpha_k}$ و $n = q_۱^{\beta_۱} q_۲^{\beta_۲} ... q_l^{\beta_l}$ که در آن p_i $(۱ \leq i \leq k)$ و q_j $(۱ \leq j \leq l)$ ، اعداد اول متمایز باشند. با توجه به تعریف تابع اویلر:

$\phi(m) = m(۱ - \frac{۱}{p_۱})(۱ - \frac{۱}{p_۲})...(۱ - \frac{۱}{p_k})$

$\phi(n) = n(۱ - \frac{۱}{q_۱})(۱ - \frac{۱}{q_۲})...(۱ - \frac{۱}{q_l})$

بنابراین:

$\phi(m)\phi(n) = mn(۱ - \frac{۱}{p_۱})(۱ - \frac{۱}{p_۲})...(۱ - \frac{۱}{p_k})(۱ - \frac{۱}{q_۱})(۱ - \frac{۱}{q_۲})...(۱ - \frac{۱}{q_l})$

از طرفی می‌دانیم که طرف راست تساوی فوق برابر است با $\phi(mn)$ ، لذا برهان کامل می‌شود.

[۲] Euler.

۱—۲ رده‌ی مزدوجی

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید G یک گروه متناهی و $x,y \in G$ باشد. گوییم x مزدوج y در G است اگر عضوی مانند $g \in G$ موجود باشد به طوری‌که $y = g^{-1}xg$. مجموعه‌ی تمام عناصری که با x در G مزدوج‌اند عبارت است از $x^G = \{g^{-1}xg | g \in G\}$.

لم ۴.۱ اگر $x,y \in G$ آن‌گاه $x^G = y^G$ یا $x^G \bigcap y^G = \emptyset$.

اثبات: فرض کنید که $x^G \bigcap y^G$ تهی نیست و عضو $z \in x^G \bigcap y^G$ را در نظر بگیرید. در این صورت عضوهای $g,h \in G$ وجود دارند به قسمی که $z = g^{-1}xg = h^{-1}yh$

از اینرو $x = gh^{-1}yhg^{-1} = k^{-1}yk$ که $k = hg^{-1}$ لذا برای عضو دلخواه $a \in x^G$ داریم:

$$a = b^{-1}xb, b \in G \Rightarrow a = b^{-1}k^{-1}ykb \Rightarrow a = c^{-1}yc, c = kb \Rightarrow a \in y^G$$

بنابراین $x^G \subseteq y^G$. به همین نحو نتیجه می‌گیریم که $y^G \subseteq x^G$ (با استفاده از $y = kxk^{-1}$)، و لذا $x^G = y^G$. ■

تعریف ۱۴.۱ اگر $G = x_1^G \bigcup \ldots \bigcup x_l^G$ و رده‌های مزدوجی x_1^G، ...، x_l^G متمایز باشند، آن‌گاه x_1، ...، x_l را نماینده‌های رده‌های مزدوجی G می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید $x \in G$. مرکزساز x در G، که آن‌را با نماد $C_G(x)$ نشان می‌دهند، عبارت‌است از مجموعه‌ی عناصری از G که با x جابه‌جا می‌شوند، یعنی:

$$C_G(x) = \{g \in G | xg = gx\}$$

قضیه ۴.۱ فرض کنید $x \in G$. در این‌صورت:

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

.

اثبات: به قضیه‌ی ۸.۱۲ از [۱۱] رجوع شود. ■

قضیه ۵.۱ فرض کنید $G = D_{۲n} = \langle a, b | a^n = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$. در این‌صورت:

۱) اگر n فرد باشد، آن‌گاه G دقیقاً دارای $\frac{n+۳}{۲}$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{۱\}, \{a, a^{-۱}\}, \ldots, \{a^{\frac{n-۱}{۲}}, a^{\frac{-(n-۱)}{۲}}\}, \{b, ab, \ldots, a^{n-۱}b\}$$

۲) اگر $n = ۲m$، آن‌گاه G دقیقاً دارای $m + ۳$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{۱\}, \{a^m\}, \{a, a^{-۱}\}, \ldots, \{a^{m-۱}, a^{-m+۱}\}, \{a^{۲j}b | ۰ \leq j \leq m - ۱\}, \{a^{۲j+۱}b | ۰ \leq j \leq m - ۱\}$$

اثبات: به فصل دوازدهم از [۱۱] رجوع شود. ■

۱—۳ سرشت

سرشت نمایش خواص قابل توجهی دارد، و ابزار اساسی محاسبه در نظریه‌ی نمایش‌ها است. از آن‌جا که هر $\mathbb{C}G$—مدول با سرشتش معین می‌شود، بنابراین خیلی از مسائل نظریه‌ی نمایش با استفاده از سرشت‌ها قابل حل‌اند. در این بخش سرشت گروه را تعریف خواهیم کرد. سپس سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک گروه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید که $\rho : G \mapsto GL(n,F)$ نمایش گروه متناهی G است. به هر ماتریس $n \times n$ای چون $g\rho$ $(g \in G)$ عدد مختلطی که با جمع کردن تمام عناصر قطر اصلی این ماتریس حاصل می‌شود، نسبت می‌دهیم و آن را $\chi(g)$ می‌نامیم. تابع $\chi : G \mapsto \mathbb{C}$ را سرشت نمایش ρ می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید V ، $\mathbb{C}G-$ مدولی با پایه B باشد. در این صورت سرشت V عبارت است از تابع $\chi : G \mapsto \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $(g \in G)$ ، $\chi(g) = tr[g]_B$. سرشت V به پایه‌ی B بستگی ندارد.

تعریف ۱۸.۱ گوئیم χ سرشت G است اگر χ سرشت یک $\mathbb{C}G-$ مدول باشد. به علاوه گوئیم χ سرشت تحویل ناپذیر G است اگر χ سرشت یک $\mathbb{C}G-$ مدول تحویل ناپذیر باشد، همچنین گوئیم χ سرشت تحویل پذیر G است اگر χ سرشت یک $\mathbb{C}G-$ مدول تحویل پذیر باشد.

قضیه ۶.۱ فرض کنید G دقیقاً دارای l رده تزویجی با نماینده‌های $g_1, ..., g_l$ است، و فرض کنید χ و ψ سرشت G باشند. در این صورت:

(۱) $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$

(۲) $\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$

اثبات: به قضیه‌ی ۵.۱۴ از [۱۱] رجوع شود. ■

لم ۵.۱ فرض کنید χ سرشت $\mathbb{C}G-$مدول V و $g \in G$ با مرتبه‌ی m باشد. در این‌صورت :

۱) $\chi(1) = dimV$.

۲) $\chi(g)$ مجموع تعدادی از ریشه‌های $m-$ام واحد است .

۳) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

۴) اگر g و g^{-1} مزدوج باشند، آن‌گاه $\chi(g)$ عددی حقیقی است.

اثبات: به گزاره‌ی ۹.۱۳ از [۱۱] رجوع شود. ■

قضیه ۷.۱ تعداد سرشت‌های تحویل ناپذیر G مساوی تعداد رده‌های تزویجی G است. با توجه به اینکه مقدار سرشت روی هر رده‌ی تزویجی ثابت است، می‌توان حاصلضرب داخلی سرشت را تا حد امکان ساده کرد.

اثبات: به قضیه‌ی ۳.۱۵ از [۱۱] رجوع شود. ■

قضیه ۸.۱ فرض کنید $\chi_1, ..., \chi_k$ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G و $g_1, ..., g_k$ نماینده‌های رده‌های تزویجی G باشند. در این صورت روابط زیر به‌ازای هر $r, s \in \{1, ..., k\}$ برقرار است:

(۱) روابط تعامد سطری:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

(۲) روابط تعامد ستونی:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|$$

اثبات: (۱) می دانیم که $G = \bigcup_{i=1}^{k} g_i^G$ ، $|g_i^G| = \frac{|G|}{|C_g(g_i)|}$ و اثر سرشت روی هر رده‌ی مزدوج یکسان است.

$\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \delta_{rs} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_r(g)\overline{\chi_s(g)} = \frac{1}{|G|}(\sum_{x\in g_1^G}\chi_r(x)\overline{\chi_s(x)} + ... + \sum_{x\in g_k^G}\chi_r(x)\overline{\chi_s(x)}) = \frac{1}{|G|}(|g_1^G|\chi_r(g_1)\overline{\chi_s(g_1)} + ... + |g_k^G|\chi_r(g_k)\overline{\chi_s(g_k)}) = \frac{\chi_r(g_1)\overline{\chi_s(g_1)}}{|C_G(g_1)|} + ... + \frac{\chi_r(g_k)\overline{\chi_s(g_k)}}{|C_G(g_k)|} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$

(۲) فرض کنیم C_i رده‌های تزویجی از G با نماینده‌های g_i باشند. تابع (۱) $\psi_s : G \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\psi_s(g) = 1$ $g \in C_s$ و $\psi_s(g) = 0$ $g \notin C_s$. بدیهی است که ψ_s یک تابع رده‌ای است. از آنجا که $C = \langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle$، اسکالرهای $\lambda_1, ..., \lambda_k$ در $\mathbb{C}$ موجودند که $\psi_s = \lambda_1\chi_1 + ... + \lambda_k\chi_k$. از طرفی

$$\lambda_i = \langle \psi_s, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in C_1} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} + \ldots + \frac{1}{|G|} \sum_{g\in C_s} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{|G|} \sum_{g\in C_k} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in C_s} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_i(g)}|C_s| = \frac{\overline{\chi_i(g)}}{|C_g(g)|} = \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_g(g_s)|}$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_g(g_s)|}\chi_i$$

$$\delta_{rs} = \psi_s(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_g(g_s)|}\chi_i(g_r) = \frac{1}{|C(g_s)|} \sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}$$

■

لم ۶.۱ فرض کنید $\omega = e^{\frac{\pi i}{n}}$، به طوری که $i^2 = -1$. در این صورت روابط زیر برقرارند:

۱) $\sum_{j=1}^{2n-1} \omega^j = -1$.

۲) اگر l زوج باشد، آن‌گاه $\sum_{j=1}^{n-1} \omega^{lj} = -1$.

۳) اگر l فرد باشد، آن‌گاه $\sum_{j=1}^{n-1} \omega^{lj} + \omega^{-lj} = 0$.

اثبات: برهان ۱: $\sum_{j=1}^{2n-1} \omega^j = \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{2n-1} = \omega\frac{1-\omega^{2n-1}}{1-\omega} = \frac{\omega-1}{1-\omega} = -1$

برهان ۲: $\sum_{j=1}^{n-1} \omega^{lj} = \omega^l + \omega^{2l} + \ldots + \omega^{(n-1)l} = \omega^l\frac{1-\omega^{(n-1)l}}{1-\omega^l} = \frac{\omega^l-1}{1-\omega^l} = -1$

برهان ۳: $\sum_{j=1}^{n-1} \omega^{lj} + \omega^{-lj} = \omega^l + \omega^{2l} + \ldots + \omega^{(n-1)l} + \omega^{-l} + \omega^{-2l} + \ldots + \omega^{-(n-1)l} = \omega^l\frac{1-\omega^{(n-1)l}}{1-\omega^l} + \omega^{-l}\frac{1-\omega^{-(n-1)l}}{1-\omega^{-l}} = \frac{\omega^l+1}{1-\omega^l} + \frac{\omega^{-l}+1}{1-\omega^{-l}} = 0$ ■

لم ۷.۱ فرض کنید G و H دو گروه باشند. همچنین فرض کنید سرشت تحویل‌ناپذیر $G \times H$ به‌صورت $\chi \times \psi$ باشد که در آن χ و ψ به ترتیب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G و H هستند. آن‌گاه مقدار $\chi \times \psi$ برای هر $g \in G$ و $h \in H$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\chi \times \psi)(g,h) = \chi(g)\psi(h)$$

اثبات: به قضیه‌ی ۱۸.۱۹ از [۱۱] رجوع شود. ■

لم ۸.۱ فرض کنید $G = C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$ و $C_{n_i} = \langle a_i \rangle$، به طوری‌که برای هر $i, j \in \{1, \ldots, r\}$؛ $(n_i, n_j) \neq 1$. اگر $\omega_t = e^{\frac{2\pi i}{n_t}}$، در این صورت سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G به صورت:

$$\chi_{l_1 \ldots l_r}(a_1^{k_1}, \ldots, a_r^{k_r}) = \omega_1^{l_1 k_1} \omega_2^{l_2 k_2} \ldots \omega_r^{l_r k_r}$$

به‌طوری‌که $l_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1$ و $i = 1, 2, \ldots, r$.

اثبات: به فصل نوزدهم از [۱۱] رجوع شود. ■

لم ۹.۱ فرض کنید C_n گروه دوری متناهی تولید شده توسط a باشد. در این صورت سرشت‌های تحویل‌ناپذیر C_n، به صورت $\chi_j : a^k \mapsto \omega^{jk}$ می‌باشند، به‌طوری که $j, k = 0, 1, ..., n-1$ و $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

اثبات: به مثال ۹.۹ از [۱۱] رجوع شود. ■

۱—۴ گراف

تعریف ۱۹.۱ یک گراف تشکیل شده است از یک مجموعه‌ی ناتهی به نام رئوس و یک مجموعه از زوج‌های بدون ترتیب از رئوس به نام یال‌هاست. معمولاً یک گراف را با حرف Γ نشان می‌دهند. در گراف $\Gamma = (V.E)$ ، منظور از V مجموعه‌ی رئوس و منظور از E ، مجموعه‌ی یال‌ها می‌باشد.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید Γ یک گراف و v_i و v_j دو رأس آن باشند. یک راه به طول ℓ از v_i به v_j، دنباله‌ای متناهی از رئوس Γ مانند $v_i = u_0 \overset{e_1}{-} u_1 \overset{e_2}{-} u_2 \ldots \overset{e_l}{-} u_l = v_j$ است به‌قسمی که برای هر $1 \leq t \leq \ell$، رئوس u_{t-1} و u_t مجاورند. در این تعریف تکرار یال‌ها و رأس‌ها مجاز است.
راهی که یال و رأس تکراری نداشته باشد را یک مسیر می‌نامیم. یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم.