دانشگاه پیام نور
واحد تهران مرکز

پایان نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

بررسی قضایای وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم

نگارش
فرشته پارسافر

استاد راهنما
دکتر توفیق الهویرنلو

استاد مشاور
دکتر محمد حسن بیژن زاده

آذر ۱۳۸۹

تقدیم

به همسر عزیزم که با صبوری ها و مهربانی هایش از آغاز

تا پایان راه همراه و همدل من بود

و همچنین تقدیم به پدر و مادر عزیزم که با نگاههای

مهربان و کلامشان در این مسیر مشوق و یاریگر من بودند.

چکیده

را با استفاده از مشتق پذیری تعمیم یافته $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ ابتدا جواب مسئله مقدار اولیه فازی بررسی می کنیم . در حالت مشتق پذیری تعمیم یافته قوی دو معادله انتگرالی متفاوت به (ii) و (i) قوی نوع H–مشتق پذیری فقط یکی از آنها را بدست می عنوان جواب بدست می آوریم در صورتی که در حالت آوریم.

یک مسئله کشی فازی مرتبه دوم به $X'(t_0)=k_2$ و $X(t_0)=k_1$ با استفاده از مقدار های اولیه سپس صورت

$$X''(t)= f(t, X(t,r), X'(t,r)) \ , \quad X(t_0)=k_1 \quad , X'(t_0)=k_2$$

شرایط اولیه فازی هستند.سپس وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل فازی k_2 و k_1 بدست می آوریم.

، یک جواب منحصر به فرد برای معادله $x:[a,b] \rightarrow E$ مرتبه دوم را بررسی می کنیم. یک نگاشت پیوسته باشند و در شرایط لازم قضایای آتی صدق x' و x دیفرانسیل فازی مرتبه دوم هست اگر و فقط اگر کند. سپس یکتایی جواب بدست آمده را مورد بررسی قرار می دهیم.

به عنوان نگاشت انقباض تعریف می کنیم و با استفاده از قضیه نقطه ثابت G بدین ترتیب که یک عملگر باناخ یکتا بودن جواب را برای معادله ثابت می کنیم.

فهرست مطالب

فصل اول پیشگفتار.. ۱

۱-۱ مقدمه... ۲

فصل دوم مجموعه های فازی و مفاهیم آن ۶

۲-۱ مقدمه... ۷

۲-۲ مفاهیم اساسی منطق فازی ۷

۲-۳ نمایش و تعاریف مجموعه های فازی ۸

۲-۴ انواع مجموعه های فازی ۱۰

۲-۵ مجموعه های مساوی و زیرمجموعه ۱۴

۲-۶ عملیات اصلی مجموعه های فازی... ۱۵

۲-۷ مجموعه فازی تهی و مجموعه فازی تام.. ۱۶

۲-۸ ضرب کارتزین مجموعه های فازی ۱۷

۲-۹ جمع وضرب مجموعه های فازی ۱۷

۲-۱۰ α- برش ها ۱۸

۲-۱۱ اصل تجزیه ۱۹

۲-۱۲ اصل گسترش ۱۹

۲-۱۳ اعداد فازی وعملیات بر روی آنها ۲۰

۲-۱۴ رابطه فازی ومشتق فازی ۲۴

۲-۱۵ آنالیز توابع فازی ۲۸

۲-۱۶ معادلات دیفرانسیل فازی ۳۰

۲-۱۶-۱ روش سیکالا.. ۳۱

۲-۱۶-۲روش حل جدید.. ۳۳

۲-۱۶-۳مشتقات.. ۳۵

۲-۱۶-۴روابط بین مشتقات... ۳۸

۲-۱۶-۵ جواب مساله مقدار اولیه فازی.. ۳۹

۲-۱۶-۶ارتباط بین جوابها.. ۴۱

فصل سوم وجود ویکتایی جواب معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم.................................. ۴۳

۳-۱ مقدمه ۴۴
۳-۲ مفاهیم اولیه ۴۴
۳-۳ معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم ۵۸
فصل چهارم حل معادلات با استفاده از سری توانی ۶۵
۴-۱ مقدمه ۶۶
۴-۲ سری توانی ۶۶
مراجع فارسی ۷۶
مراجع لاتین ۷۷
چکیده انگلیسی ۸۰
واژه نامه ۸۱

فصل اول

پیشگفتار

۱-۱مقدمه

دو حادثه در قرن ۲۱ منجر به پیدایش منطق فازی یا منطق مبهم گردید:

۱-پارادکس های مطرح شده توسط برتراند راسل در ارتباط با منطق ارسطویی بود، وی بیان می دارد:

" تمام منطق سنتی بنا به عادت فرض را برآن می گذارند که نمادهای دقیقی به کار گرفته شده است. به این دلیل موضوع در این زندگی خاکی قابل پیگیری نیست بلکه فقط برای زندگی ماورا الطبیعه معتبر است."[۱]

۲-دومین حادثه کشف اصل عدم قطعیت توسط هایزنبرگ در فیزیک کوانتوم بود. اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به باور کورکورانه ما به قطعیت در علوم و حقایق علمی خاتمه داد و یا دست کم آن را دچار تزلزل نمود.[۲]

هایزنبرگ نشان داد حتی اتم های مغز نیز نامطمئن هستندو حتی با اطلاعات کامل نمی توانید چیزی بگوئید که صد در صد مطمئن باشید. وی نشان داد که در فیزیک حتی حقیقت گزاره ها تابع درجات هستند.

در این میان منطقیون برای گریز از خشکی و جزمیت منطق دو ارزشی منطق های چند ارزشی را به عنوان تعمیم منطق دو ارزشی پایه گذاری نمودند. اولین منطق سه ارزشی توسط لوکازویچ منطق دان لهستانی معرفی شد. در منطق سه ارزشی گزاره ها بر حسب سه ارزش { 0 و $\frac{1}{2}$ و 1 } مقدار دهی می شوند. مسلما این منطق از منطق ارسطویی بهتر است اما باز هم با واقعیت فاصله دارد. لذا منطق های n مقداره توسط منطق دانان از جمله لوکازویچ ارائه شد. در منطق n مقداری هر گزاره می تواندیکی از مقادیر زیر را اختیار کند:

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$$

روشن است که هر چه n بزرگتر باشد دسته بندی ارزش ها به واقعیت نزدیک تر است.

منطق فازی نیز یک منطق چند ارزشی است.

تمایز عمده منطق فازی و منطق چند ارزشی آن است که در منطق فازی حقیقت و حتی ذات مطالب هم می توانند نا دقیق باشند. در منطق فازی مجاز به بیان مطالبی از جمله "کاملا درست" یا "کم وبیش درست

است " هستیم . حتی می توان از احتمال نا دقیق مثل " تقریبا ناممکن" یا " نه چندان " استفاده کرد و بدین ترتیب منطق فازی نظام کاملا منعطفی در خدمت زبان طبیعی قرار می دهد.

منطق فازی یک جهان بینی جدید است

که علی رغم ریشه داشتن در فرهنگ مشرق زمین با نیازهای پیچیده دنیای امروز سازگارتر از منطق ارسطویی است. منطق فازی جهان را آن طور که هست به تصویر می کشدو بدیهی است که چون ذهن ما با منطق ارسطویی پرورش یافته است برای درک مفاهیم فازی باید در ابتدا کمی تامل کنیم.

ولی وقتی آن را شناختیم دیگر نمی توانیم به سادگی آن را فراموش کنیم .

منطق فازی را می توان منطق خاکستری نامید.

منطق دو ارزشی منطق خاکستری را نادیده می گیرد و آن را نفی می کند یا آن را تماما سیاه یا سفید فرض می کند.

منطق فازی می گوید: تمام حقیقت، حقیقتی خاکستری است اما منطق دو ارزشی می گوید که تمام حقیقت سیاه یا سفید است، حقیقتی کاملا درست یا کاملا غلط.

منطق فازی عبارت است از استدلال با مجموعه های فازی

مجموعه های فازی توسط بلک و لطفی زاده ارائه گردید . ابتدا در سال ۱۹۳۷ ماکس بلک مقاله ای راجع به آنالیز منطق به نام ابهام را در مجله علم منتشر کرد. البته جهان علم آن را نادیده گرفت.

]۳[در سال پروفسور ۱۹۶۵ لطفی زاده مقاله مجموعه های فازی را منتشر کرد.

در ابتدای پیدایش تفکر فازی استقبال چندانی از آن نشد زیرا برخی آن را بر خلاف اصول علمی می دانستندو نیز کاربردهای آن ناشناخته بود. بسیاری از مفاهیم بنیادی تئوری فازی به وسیله لطفی زاده در اواخر دهه ۶۰ و اوایل دهه ۷۰ مطرح گردید. در سال ۱۹۷۳ مقاله دیگری تحت عنوان " طرح یک راه حل جدید برای تجزیه و تحلیل سیستم های پیچیده و فرایند های تصمیم گیری " منتشر گردید. او در این مقاله متغیر های زبانی و استفاده از قواعد " اگر وآنگاه "را برای فرموله کردن دانش بشری معرفی نمود. مهندسان ژاپنی در یافتند که کنترل کننده های فازی به سهولت فابل طراحی بوده و درموارد بسیاری می توان از آنها استفاده کرد. در سال ۱۹۸۰ اولین کاربرد منطق فازی یعنی کنترل سیستم تصفیه آب توسط شرکت ژاپنی "سوگنو" ساخته شد.

سپس یکی از پیشرفته ترین سیستم های کنترل قطار زیرزمینی را در جهان به وجود آوردند. این موفقیت ها توجه آمریکا و اروپا را جلب کرد تا بزرگترین سازمان مهندسی" IEEE " سیستم های فازی را به رسمیت بشناسد.

جدول (۱-۱) مقایسه ای بین ریاضیات کلاسیک و ریاضیات فازی را نشان می دهد.

ریاضیات کلاسیک	ریاضیات فازی
مجموعه یعنی تابع عضویت بابرد ۰و۱	مجموعه یعنی تابع عضویت بابرد پیوسته
مفاهیم کاملا دقیق	مفاهیم منعطف و کیفی
استدلال دقیق و مکانیکی	استدلال تقریبی و انسانی
منطق دو ارزشی ارسطویی	منطق چند ارزشی با ارزش های کیفی
دنیای خیالی	دنیای واقعی

جدول۱-۱

منطق فازی کاربردهای متعددی دارد. ساده ترین نمونه یک سیستم کنترل دما یا ترموستات بر اساس قوانین فازی کار می کند. سال هاست که از منطق فازی برای کنترل دمای آب یا میزان کدر شدن آبی که لباس ها کاربراتورهای فازی، در آن شسته شده اندر ساختمان اغلب ماشین های لباسشویی، مایکروفرهای فازی، سمعکهای فازی و اسباب بازیهای رایانه ای سیستمهای کنترل وسایل الکتریکی دیگر و صدها وسیله ی هوشمند دیگر را مشاهده می کنیم. گسترش ایده های فازی در شرق دور و در غرب دلیل دیگری بر توسعه مرزهای این دیدگاه است. دیدگاه جهانی فازی خود یک دیدگاه تازه ی جهانی است.

ابداع گردید. نسخه ی] ۲۷و۳۵[اصطلاح معادلات دیفرانسیل فازی در سال ۱۹۷۸ بوسیله نویسندگان در مبسوط این یادداشت ها دو سال بعد منتشر شد.

) با توجه به کاربردهای روز افزونشان اهمیت فراوانی یافته است.*FDEs* اخیراً معادلات دیفرانسیل فازی (

) را در تحلیل مسائل دینامیکی *FDEs* در [۲۸] مفهوم معادله دیفرانسیل فازی (و همکارانش *Kandel*

بکار گرفتند، معادلات دیفرانسیل فازی و مساله ی مقدار اولیه (مسئله کشی) فازی از طرف *Kaleva*، *Seikkala* در [۳۵] *Ouyang*، *Wu*، *Kolden* و *Wu Menda* به طور جدی مورد بحث و بررسی واقع گردید.

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشدکه مختصری از محتوی هر فصل را در زیر بیان می کنیم.

در فصل دوم مجموعه های فازی ، مفاهیم و عملکرد های مجموعه های فازی همراه با مثال های عددی و تصاویری جهت معرفی آورده شده اند. روابط فازی و مشتق فازی نیز ارائه شده اند. در بخش روابط فازی صورتهای گسسته و پیوسته روابط فازی مورد بررسی قرار گرفته است.

اصل گسترش و اصل تجزیه ، معادلات دیفرانسیل فازی ومشتقات فازی از دیگر مطالب این فصل هستند.همچنین اشاره ای به قضایای مرتبط با وجود و یکتایی جواب این معادلات که در تحقیقات قبلی صورت گرفته ، شده است.

-مشتق Hدرفصل سوم وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم با شرایط اولیه، تحت پذیری تعمیم یافته مورد بررسی قرار می گیرد.

-مشتق پذیری وتعمیم مشتق پذیری جواب مسئله مقدار اولیه فازی را بدست می Hدر فصل سوم با توجه به آوریم.سپس با استفاده ازخصوصیات انتگرال فازی وقضایای وجود ویکتایی جواب مسائل مقدار اولیه فازی مرتبه دوم مورد بررسی قرار می گیرد که می توان آن را برای مسائل فازی با مرتبه های بالاتر تعمیم داد .

سر انجام در فصل چهارم به حل معادلات با استفاده از سری توانی با تقریب مرتبه سوم می پردازیم.

فصل دوم

مجموعه های فازی و مفاهیم

۲-۱ مقدمه

هر مجموعه از عناصر قطعی یک ویژگی معین و قطعی دارد . در بسیاری از مجموعه ها نمی توان یک ویژگی قطعی پیدا کرد، لذا برای حل این مشکل تئوری مجموعه های فازی مطرح شدکه در مقایسه با مجمو عه های قطعی ، مبین مجمو عه های مبهم است. در دهه اخیر به علت به کارگیری منطق فازی در ساخت محصولات خانگی منطق فازی به عنوان یک مفهوم علمی کاربردی با استقبال دانشگاهیان و فرهنگیان روبرو شد. طی چند سال اخیر تنها دانشمندان ژاپنی متجاوز از ۱۰۰ فناوری مبتنی بر منطق فازی را به ثبت رسانده و در ساخت وسایلی همچون یخچال و ماشین لباسشویی و ...از آن بهره گرفته اند. اولین و موفق ترین کاربردهای منطق فازی در زمینه کنترل بوده است. کاربردهای دیگر منطق فازی را در کارخانجات ذوب آهن ، صنعت خودرو سازی(در سیستم ترمز) ، آسانسور، شیشه سازی ، تصفیه آب، واحدهای تولید انرژی و وسایل الکترونیکی همچون ویدئو، سیستم های ترابری جهان ، شبکه مونوریل (قطار تک ریل) توکیو در ژاپن و سایر سیستم های حرکتی و جابجایی بار، سیستم های تهویه هوا نیز می توان جستجو نمود. رواج کاربرد منطق فازی در پردازش هوش و دانش بشری را نیز نمی توان از نظر دور داشت.

در این فصل به بحث درباره ی مفاهیم اساسی منطق فازی ، نمایش و مفهوم مجموعه های فازی ، اعمال بر روی این مجموعه ها ، α- برش ها، اصل تجزیه، اصل گسترش، اعداد فازی و اعمال روی آنها، رابطه های فازی و مشتق فازی همچنین آنالیز توابع فازی و غیره خواهیم پرداخت.

۲-۲ مفاهیم اساسی منطق فازی

الف)مجموعه ها ی فازی

ب)روابط فازی

ج)استدلال فازی

در این بخش به تشریح مجمو عه های فازی خواهیم پرداخت و روابط فازی را در بخش های آتی مورد بحث قرار خواهیم داد.

۲-۲-۱ مجموعه های فازی

در یک گفتگوی روزانه کلمات مبهم بسیاری به کارگرفته می شوند. مثلاً" این پارک زیبااست" یا "امروز هوا سرد است" یا" این فرد قد بلند است". مجموعه های فازی با مفاهیم نا دقیقی مانند (زیبا و گرم) و یا افراد قد بلندکه قابل بیان به وسیله ی مجموعه های معمولی نیستند مواجه است. از آنجا که نمی توان این

گونه مفاهیم مبهم را توسط مجموعه های قطعی در نظر گرفت از مجمو عه های فازی استفاده می کنیم. پس مجموعه های فازی برای برخورد باکلماتی از قبیل زیبا، گرم و قد بلند ارائه شده اند.

در جملات قبل کلمات زیبا و سرد دقیق نیستند. بیان این عبارات با مجموعه های معمولی امکان پذیر نیست و ما حتماً باید عبارات را به صورت دقیق مانند مجموعه ی افرادی که بیش از ۱۷۰ سانتیمتر قد دارند و یا دمای پایین تر از ۱۰درجه بیان کنیم. اندازه گیری قد یک فرد تعلق و یا عدم تعلق او را به مجموعه ی فازی پیش گفته تعیین نمی کند. این مجموعه های معمولی که به صورت دقیق بیان می شوند در نظریه ی مجموعه های فازی به مجموعه های قطعی(قاطع) معروفند. می توانیم یک مجموعه را به صورت عنصرهای آن به همراه درجه ی عضویت هر عضو در نظر بگیریم. نظریه مجمو عه های فازی توسیعی از نظریه مجمو عه های قطعی است. در این بخش به تعریف این مفهوم هم چنین روشهای نشان دادن آن می پردازیم و تعاریف مقدماتی در مورد مجموعه های فازی را نیز بیان می کنیم، تا بتوانیم با استفاده از این ابزار یک مدل ریاضی برای مجموعه های فازی داشته باشیم و به صورت دقیق تر در باره ی موارد دیگر از جمله اعداد و توابع فازی، اندازه گیری میزان فازی بودن مجموعه، روابط و آنالیز فازی بحث کنیم.

۲-۳ نمایش و تعاریف مجموعه های فازی

مجموعه های قطعی یا کلاسیک معمولا به صورت تعدادی عضو با نماد $x \in X$ تعریف می شوند که این اعضاء می توانند قابل شمارش باشند و هر عضو X می تواند متعلق به مجموعه ی قطعی A باشد یا نباشد. در صورت تعلق به مجموعه ی A درجه ی عضویت آن یک و در غیر این صورت درجه ی عضویت آن صفر است. واضح است که A زیر مجموعه ی مجموعه ی X خواهد بود اما در نظریه مجموعه های فازی ، عضویت یک عضو در مجموعه درجه بندی می شود و در بازه ی $[0,1]$تعریف می گردد. بنابراین یک عضو در یک مجموعه فازی به همراه درجه عضویت خود بیان می گردد. پس داریم:

۲-۳- ۱ تعریف تابع عضویت

اگرX مجموعه ای فازی باشد، به هر عضو x از مجموعه ی مرجع X یک عدد $\mu_A(X)$ در بازه ی $[0,1]$ نسبت داده می شود که مبین درجه عضویت آن مجموعه ی فازی است که میزان تعلق x به مجموعه ی فازی A را نشان می دهد و برد این تابع ، اعداد حقیقی غیر منفی می باشد که یک مقدار حداکثر برای آن در نظر می گیریم و در حالت نرمال به صورت فاصله ی بسته ی $[0,1]$ در نظر گرفته می شود.

$$\mu_A : X \mapsto [0,1]$$

بنابراین می توان گفت مجموعه ی فازی تعمیم مجموعه ای قطعی است به شرطی که تابع عضویت آن تابعی پیوسته در بازه ی $[0,1]$ باشد.

در صورتی که برد این تابع $\{0,1\}$ در نظر گرفته شود همان مجموعه ی صریح (قطعی) را خواهیم داشت.

مجموعه های فازی را به یکی از شیوه های زیر می توانیم نمایش دهیم.

الف: به وسیله ی فهرست کردن تک تک اعضاء متعلق به مجموعه ی مرجع که تابع عضویت آن غیر صفر باشد. این اعضاء را به صورت زوجهای مرتب $(x, \mu_A(x))$ نمایش می دهیم.

به عنوان مثال فرض کنید مجموعه A اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۷ باشد و تابع عضویت آن به صورت زیر داده شده باشد

$$\mu_A(1)=0.2 \text{ و } \mu_A(2)=0.5 \text{ و } \mu_A(3)=0.8 \text{ و } \mu_A(4)=1 \text{ و } \mu_A(5)=0.7 \text{ و } \mu_A(6)=0.3$$

پس می توان مجموعه فازی A رابه صورت زیر بیان کرد.

$$A=\{(1,.2),(2,.5),(3,.8),(4,1),(5,.7),(6,.3)\}$$

ب: به صورت تحلیلی و تعریف مشروط به شکل تابع

به عنوان مثال مجموعه ی فازی قد افراد به صورت زیر بیان می شوند.

$$A=\{(x,\mu_A(x)) \mid x\in X\}$$

که در آن
$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\le 10\\ \left(1+(x-10)^{-2}\right)^{-1}, & x>10\end{cases}$$

ج: مجموعه ی فازی معرفی شده در این قسمت، در دو حالت گسسته و پیوسته بررسی می شود.

۱) حالت گسسته (وقتی که مجموعه ی مرجع متناهی است): فرض کنیم مجموعه ی مرجع X به صورت $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ باشد، آنگاه یک مجموعه ی فازی مثل A بر روی X را به طریق زیر می توان بیان کرد

$$A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\dots=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

به عنوان مثال مجموعه ی اعداد طبیعی نزدیک به ۱۰ = A را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$A=\frac{.1}{7}+\frac{.5}{8}+\frac{.8}{9}+\frac{1}{10}+\frac{.8}{11}+\frac{.5}{12}+\frac{.1}{13}$$

۲) حالت پیوسته (وقتی مجموعه ی مرجع نا متناهی است): وقتی مجموعه ی مرجع X یک مجموعه ی نا متناهی است، یک مجموعه ی فازی A بر روی X را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$A=\int_x \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

در مثال فوق وقتی مجموعه فازی روی یک دامنه پیوسته تعریف شده است به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$A = \int_R \frac{1}{x(1+(x-10)^{-2})}$$

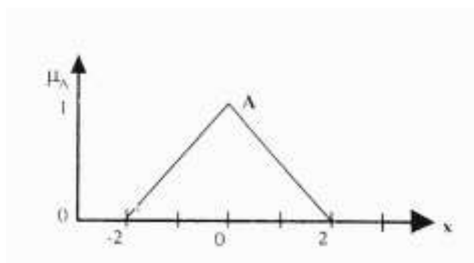
که در آن $\mu_A(x)$ می تواند حد بالایی به جز یک داشته باشد.

۲-٤ انواع مجموعه های فازی(مثلثی-ذوزنقه ای-نمایی)

در این قسمت انواع مجموعه های فازی عبارتند از مجمو عه های فازی مثلثی، ذوزنقه ای ونمایی که با نمودهای متناهی و نامتناهی مورد بررسی قرارمی دهیم.

۲-٤- ۱ مجموعه های فازی مثلثی

شکلهای (۲-۱) و (۲-۲) به ترتیب نمود نامتناهی و متناهی مجموعه های فازی مثلثی را با قاعده ی ۴ و ارتفاع یک در $x = 0$ نشان می دهند.



شکل ۲-۱ مجموعه ی فازی مثلثی(نمود نامتناهی)

بیان نامتناهی مجموعه ی فازی شکل (۲-۱) عبارت است از

$$A = \int_{-2}^{0} \frac{(2+x)}{2x} + \int_{0}^{2} \frac{(2-x)}{2x}$$

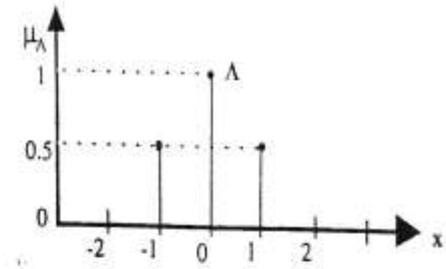
اکنون سعی می کنیم تا این عبارت را به کمک بیان متناهی بنویسیم.

حالت اول) اگر مجموعه مرجع به صورت زیر باشد

$$X = \{-2,-1,\circ,1,2\}$$

آنگاه بیان متناهی مجموعه فازی A به صورت $A = \left\{\frac{.5}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{.5}{1}\right\}$ خواهد بود.

این موضوع در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ بیان متناهی(حالت اول)

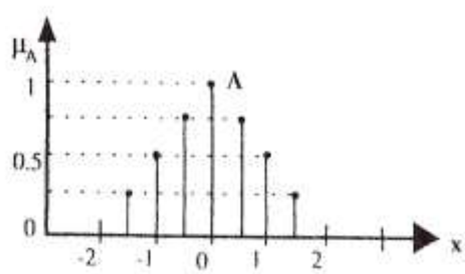
حالت دوم) اگر مجموعه ی مرجع X پیچیده تر و به صورت زیر باشد

$$X = \{-2,-1.5,-1,-.5,0,1,1.5,2\}$$

در این صورت

$$A = \left\{\frac{.25}{-1.5},\frac{.5}{-1},\frac{.75}{-.5},\frac{1}{0},\frac{.75}{.5},\frac{.5}{1},\frac{.25}{1.5}\right\}$$

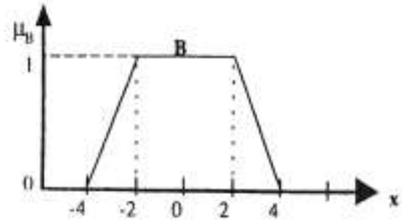
و این در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.



شکل ۲-۳ بیان متناهی (حالت ۲)

۲-٤-۲ مجموعه های فازی ذوزنقه ای

شکل (۲-۴) مثالی از مجموعه های فازی ذوزنقه ای را نشان می دهد.



شکل ۲-۴مجموعه فازی ذوزنقه ای

این مجموعه ی فازی ذوزنقه ای با بیان نا متناهی،

$$B = \int_{-4}^{-2} \frac{(4+x)}{2x} + \int_{-2}^{2} \frac{1}{x} + \int_{2}^{4} \frac{(4-x)}{2x}$$

قابل ارایه است.

حال چگونگی بیان متناهی مجموعه ی فازی ذوزنقه ای را بررسی می کنیم. به این صورت که اگر مجموعه ی مرجع X به شکل زیر باشد.

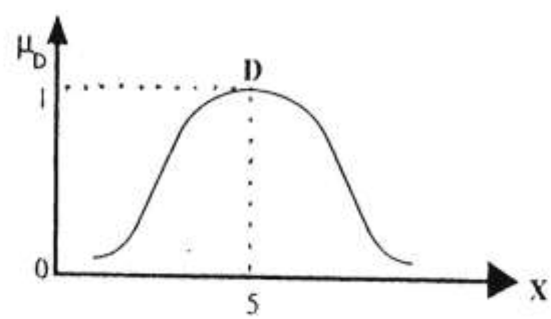
$$X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

آنگاه فرم متناهی مجموعه ی فازی B به صورت زیر است.

$$B = \left\{ \frac{.5}{-3}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{.5}{3} \right\}$$

۲-٤-۳ مجموعه ی فازی نمایی

شکل (۲-۵) مثالی از مجموعه های فازی نمایی را نشان می دهد.



شکل ۲-۵مجموعه فازی نمایی

تابع عضویت این نوع مجموعه ی فازی به وسیله ی توابع نمایی بیان می شود. بیان نامتناهی این نوع از مجموعه فازی به صورت زیر است.

$$D = \int_X e^{\frac{-\circ/5(x-5)^2}{x}}$$

حال شکل متناهی این نوع مجموعه ی فازی نمایی را بررسی می کنیم. اگر مجموعه ی مرجع X به صورت $X=\{0,2,4,6,8,10\}$ باشدآنگاه شکل متناهی D به صورت $D=\left\{\frac{.11}{2},\frac{.607}{4},\frac{.607}{6},\frac{.11}{8}\right\}$ است. چون مقادیر عضویت صفر و ده بسیار کوچک است و به صفر تقریب شده اند آنها را از عبارت حذف کرده ایم.

۲-٤-٤ مجموعه های فازی نرمال، محدب و عدد اصلی وارتفاع و تکیه گاه

فرض کنیم A یک مجموعه ی فازی بر روی مجموعه ی مرجع X است. یک مجموعه ی فازی نرمال، یک مجموعه ی محدب فازی، ارتفاع مجموعه فازی، تکیه گاه یک مجموعه و عدد اصلی یک مجموعه ی فازی به صورت زیر تعریف می شوند.

۲-٤-٤-۱ تعریف

بزرگترین درجه عضویت A را ارتفاع یا بلندی مجموعه فازی A می نامیم و آن را با $h(A)$ نشان می دهیم.

۲-٤-٤-۲تعریف

مجموعه ی فازی A را نرمال گوییم اگر و فقط اگر ارتفاع آن یک باشد یعنی

$$\sup\{\mu_A(x) | x\in X\}=1 \qquad (۲-۱)$$

در غیر این صورت آن را غیر نرمال گوییم.

بدیهی است که هر مجموعه فازی غیر نرمال را می توان با تقسیم بر ارتفاع آن نرمال کرد.

۲-٤-٤-۳ تعریف

مجموعه ی فازی A محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر $x_1\le x\le x_2$ داشته باشیم

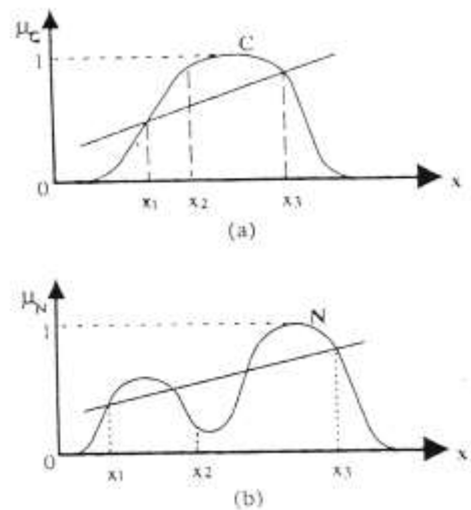
$$\mu_A(X)\ge\min\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\}$$

یا به عبارتی دیگر برای هر $x_1\in X,\ x_2\in X,\ \lambda\in[0,1]$ داریم

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\min\left(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\right) \qquad (۲-۲)$$

همچنین می توان گفت برای آنکه یک مجموعه فازی محدب باشد بایستی نمودار تابع عضویت آن تنها یک قله داشته باشد.

. شکل (۲-۶) مثالی از مجموعه ی فازی محدب و غیر محدب را نشان می دهد.



شکل ۲-۶ مجموعه های فازی (a) محدب (b) غیر محدب

۲-٤-٤-٤ تعریف

فرض کنید X یک مجموعه ی متناهی باشد. برای تعیین اندازه ی یک مجموعه فازی مانند A دو روش بیان می کنیم.

۱-جمع درجه های عضویت آن که به صورت زیر تعریف می شود

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \qquad (۳-۲)$$

۲- مقایسه اندازه ی مجموعه فازی A با مجموعه ی مرجع که به صورت زیر نشان داده می شود (۲-

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|} \qquad (۴$$

که در آن $|A|$ تعداد عناصر مجموعه ی A و $|X|$ تعداد عناصر مجموعه ی مرجع X می باشد.

تعریف عدد اصلی یک مجموعه ی فازی توسیعی از تعریف عدد اصلی یک مجموعه ی قطعی است و یک تابع عضویت خاص به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \qquad (۵-۲)$$

این تابع مشخصه ی یک مجموعه ی قطعی است. در این وضعیت در مجموعه هایی مقدار $\sum_{x \in X} \mu_A(x)$ تعداد عناصر A می باشد

۲-٤-٤-٥ تعریف

تکیه گاه یک مجموعه فازی مجموعه ای است که عناصر مجموعه مرجع در آن درجه عضویت غیر صفر دارند و به صورت زیر نشان داده می شود

$$\sup p(x)=\{x\in X \mid \mu_A(x)>0\}$$

به طور مثال مطابق شکل(۲-۴) (مثال مجمو عه های فازی)می توان نوشت

$$\sup p(A)=(-4,4)$$

۲-٥ مجموعه های مساوی و زیر مجموعه

۲-٥-۱ تعریف

وقتی درجه عضویت دو مجموعه فازی A و B از مجموعه مرجع X یکسان باشند گوییم این دو مجموعه مساوی هستند و می نویسیم :

$$\forall x\in X \qquad \mu_A(x)=\mu_B(x) \quad \Leftrightarrow A=B$$

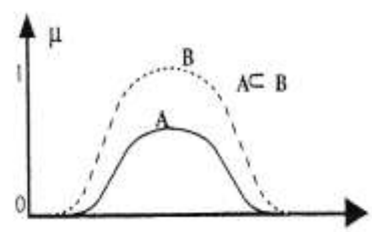
۲-٥-۲ تعریف

مجموعه فازیA ، زیر مجموعه ی مجموعه ی فازی B از مجموعه مرجع X است هر گاه به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$\mu_A(x)\leq\mu_B(x)$$

وA را زیر مجموعه حقیقی B می نامیم هر گاه به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$\mu_B(x)>\mu_A(x)$$



شکل ۲-۷ $A\subset B$

۲-٦ عملیات اصلی مجموعه های فازی: اجتماع، اشتراک، متمم

۲-٦- ۱تعریف