دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

رشته ریاضی محض – آنالیز

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

عملگرهای فشرده نرمال

استاد راهنما

دکتر عبدالحمید ریاضی

دانشجو

مرضیه رضایی

۱۱۶۹۷۳

بسمه تعالی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
معاونت پژوهشی

تاریخ: ....

پیوست: ....

نام و نام خانوادگی: مرضیه رضائی — **دانشجوی آزاد** ■ — **بورسیه** □ — **معادل** □

شماره دانشجوئی: ۸۴۱۱۳۰۱۷ — دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر — **رشته تحصیلی:** ریاضی محض - آنالیز

نام و نام خانوادگی استاد راهنما: دکتر عبدالحمید ریاضی

عنوان پایان نامه به فارسی: عملگرهای فشرده نرمال

عنوان پایان نامه به انگلیسی: Compact normal operators

نوع پروژه: کارشناسی ارشد ■ — دکترا □

کاربردی □ — **بنیادی** □ — **توسعه ای** □ — **نظری** ■

تاریخ شروع: مهر ۸۵ — **تاریخ خاتمه:** مهر ۸۶ — **تعداد واحد:** ٦

سازمان تأمین کننده اعتبار: ---

واژه های کلیدی به فارسی: عملگر فشرده، عملگر نرمال، مقدار ویژه، مقدار منفرد

واژه های کلیدی به انگلیسی: Compact operator, Normal operator, Eigenvalue, Singular value

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت های پژوهشی دانشگاه:

استاد راهنما:

دانشجو: در اختیار دادن دیگر سایت های معتبر علمی توسط دانشگاه، غنی کردن و به روز کردن کتابخانه

چکیده

در این پروژه شرایطی لازم و کافی برای ماتریس های مختلط $n \times n$ مطرح می‌شوند که تحت آن نرمال باشند. همچنین شرایطی نیز برای نرمال بودن عملگرهای خطی فشرده روی فضای هیلبرت تفکیک پذیر در حالت کلی بررسی می‌شوند. در ادامه، چند نامساوی از مقادیر ویژه‌ی جمع عملگرهای فضای هیلبرت آورده شده است.

مراجع اصلی در این پروژه مقالات زیر می باشند:

J. Yang, H. Du, A note on compact normal operators, Journal of Computational and Applied Mathematics 151 (2003) 229 - 233.

M. Sadkane, A note on normal matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics 136 (2001) 185 - 187.

O. Hirzallah, F. Kittaneh, Inequalities for sums and direct sums of Hilbert space operators, Linear Algebra and its Applications 424 (2007) 71 - 82.

X. Zhan, On some matrix inequalities, Linear Algebra and its Applications 376 (2004) 299 - 303.

واژه‌های کلیدی: عملگر فشرده، عملگر نرمال، مقدار ویژه، مقدار منفرد

فهرست مندرجات

مقدمه

عملگرهای خطی فشرده روی یک فضای هیلبرت، قسمت مهمی از عملگرهای خطی کراندار را تشکیل می‌دهند و خواص بسیار جالبی دارند([۱]). از این رو بسیار مهم است که شرایطی را برای این عملگر ها بیابیم که طی آن، خاصیت دیگری چون نرمال بودن را به عنوان مثال داشته باشند. در واقع شرطهایی که طبق آن، عملگرهای خطی می‌توانند دو خاصیت مهم فشردگی و نرمال بودن را همزمان داشته باشند.

در ابتدا در مقاله‌ی $Sadkane$، ([۱۱]، ۲۰۰۱)، شرایطی لازم و کافی برای ماتریس های مختلط $n \times n$ ارائه شد که نرمال باشند. از آنجا که ماتریس های $n \times n$ می‌توانند به عنوان کلاس عملگرهای خطی فشرده روی فضای هیلبرت $\mathbb{C}^n$ در نظر گرفته شوند، بررسی هایی توسط $Yang$ و Du صورت گرفت که آیا این شرایط برای همه‌ی عملگرهای خطی فشرده روی یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر، قابل تعمیم هستند یا خیر. پاسخ مثبت بود و با روشی دیگر این شرط ها برای عملگرهای خطی فشرده در حالت کلی بررسی شدند.([۲]، ۲۰۰۳)

در بخش دیگری از این پروژه، نامساوی هایی از مقادیر ویژه‌ی جمع عملگرهای فضای هیلبرت آورده شده‌اند که توسط $Hirzallah$ و $Kittaneh$ ارائه شده‌اند. ([۷]، ۲۰۰۷)

فصل ۱

تعاریف و قضایا

در این فصل مفاهیم و قضایای اولیه‌ی مورد نیاز در فصل های دیگر مطرح خواهد شد.

۱.۱ عملگرهای فشرده و نرمال

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضای نرمدار و U گوی یکه ای در X باشد. نگاشت خطی F از X به Y را فشرده گوییم هرگاه بستار$F(U)$، زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از Y باشد.
به طور مشابه، اگر H و H' فضاهای هیلبرت باشند، عملگر $A : H \longrightarrow H'$ را روی H فشرده نامیم، هرگاه بستار $A(U)$ در H' فشرده باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم $BL(H)$ مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H باشد.
عملگر $A \in BL(H)$ را نرمال نامیم هرگاه $A^*A = AA^*$. A^* عملگر الحاقی A، عملگر یکتایی در $BL(H)$ است که شرط زیر برای آن برقرار است:

$$< A(x), y >=< x, A^*(y) > \qquad , \forall x, y \in H$$

تعریف ۳.۱.۱ A خودالحاق نامیده می شود هرگاه $A = A^*$.

توجه کنید که اگر X یک فضای ضرب داخلی غیر کامل باشد و $A \in BL(X)$، آنگاه ممکن است عملگری مانند $B \in BL(X)$ موجود نباشد که شرط $< A(x), y >=< x, B(y) >, \quad \forall x, y \in X$ برای آن برقرار باشد.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنیم $X = c_{00}$، فضای تمام دنباله های اسکالر با تعداد متناهی مولفه‌های غیر صفرباشد. ضرب داخلی زیر را روی X در نظر می‌گیریم:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\overline{y}(j)$$

برای $x \in X$، فرض کنیم:

$$A(x) = (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x(j)}{j}, 0, 0, ...)$$

آنگاه $A \in BL(X)$. در حقیقت $||A|| \leq (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$.

برای $n = 1, 2, ...$، فرض کنیم $u_n = (0, ..., 0, 1, 0, , 0...)$ که ۱، n امین مولفه است.
اگر $B \in BL(X)$ و $< A(x), y >=< x, B(y) > \quad , \forall x, y \in X$، آنگاه:

$$\overline{B(u_1)(n)} =< u_n, B(u_1) >=< A(u_n), u_1 >= \frac{1}{n} \neq 0 \qquad , \forall n = 1, 2, ...$$

ولی این غیر ممکن است زیرا $B(u_1) \in c_{00}$.

تعریف ۵.۱.۱ برای $A \in BL(H)$، نرم A را به این شکل تعریف می کنیم:

$$||A|| = \sup\{||Ax|| : x \in H, ||x|| \leq 1\}$$

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضای نرمدار و $F : X \to Y$ خطی باشد. F فشرده است اگر و فقط اگر برای هر دنباله‌ی کراندار (x_n) در X، $(F(x_n))$ زیر دنباله ای همگرا در Y داشته باشد.

اثبات: فرض کنیم F فشرده باشد و (x_n) دنباله‌ای در X باشد که برای α ای مثبت، $||x_n|| < \alpha \quad , n = ۱, ۲, \ldots$. آنگاه $F(\frac{x_n}{\alpha}) \in F(U)$.
(U گوی باز یکه در X)
از آنجائیکه $\overline{F(U)}$ فشرده است، $(F(\frac{x_n}{\alpha}))$ زیر دنباله ای همگرا در $\overline{F(U)} \subset Y$ دارد.
در نتیجه، زیر دنباله ای از $(F(x_n))$ در Y همگراست.

به عکس، حال فرض کنیم به ازای هر دنباله‌ی کراندار (x_n) در X، $(F(x_n))$ زیر دنباله ای همگرا در Y داشته باشیم. برای نشان دادن فشردگی $\overline{F(U)}$، دنباله‌ی (y_n) را در آن در نظر می گیریم. $(x_n) \in U$ را طوری می یابیم که $||y_n - F(x_n)|| < \frac{۱}{n}$ برای $n = ۱, ۲, \ldots$.
فرض کنیم (x_{n_j}) زیر دنباله‌ای از (x_n) باشد بطوریکه $(F(x_{n_j}))$ به $y \in Y$ همگرا باشد.
این نتیجه می دهد زیر دنباله‌ی (y_{n_j}) از (y_n) نیز به y همگراست که در $\overline{F(U)}$ است.
بنابراین $\overline{F(U)}$ فشرده است و نتیجه می دهد F یک نگاشت فشرده است.

قضیه ۷.۱.۱ حد عملگرهای فشرده، عملگری فشرده است.
[مرجع [۹]، صفحه ۳۰۵، قضیه ۱۷.۲]

قضیه ۸.۱.۱ (قضیه بولزانو وایرشتراس) هر دنباله‌ی کراندار در $\mathbb{K}^n$ دارای زیر دنباله‌ای همگراست.
[مرجع [۹]، صفحه ۲۶۹]

قضیه ۹.۱.۱ اگر $H_۱$ و $H_۲$ فضاهای هیلبرت باشند و $K \in BL(H_۱, H_۲)$ عملگری مرتبه متناهی باشد، آنگاه K فشرده است.

اثبات : فرض کنیم $\{x_n\} \subset H_۱$ و $||x_n|| = ۱$، آنگاه $\{Kx_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای بابعد متناهی $Im(K)$ است. از آنجائیکه $Im(K)$ بطور خطی با $\mathbb{C}^k$، برای k ای، ایزومتر است، نتیجه می شود $\{Kx_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد.

مثال ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $\{\lambda_k\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{C}$ باشد که به صفر همگراست. $K \in L(l_۲)$ را این طور تعریف می‌کنیم:

$$K(a_۱, a_۲, ...) = (\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ...)$$

و برای هر عدد صحیح مثبت n، عملگر $K_n \in L(l_۲)$ را تعریف می‌کنیم:

$$K_n(a_۱, a_۲, ...) = (\lambda_۱ a_۱, \lambda_۲ a_۲, ..., \lambda_n a_n, 0, 0, ...)$$

برای هر n، K_n از مرتبه متناهی است بنابراین فشرده است. از آنجا که $||K_n - K|| \le \sup_{k \ge n} |\lambda_k| \longrightarrow 0$، وقتی $n \longrightarrow \infty$، نتیجه می‌شود K نیز فشرده است.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضای نرمدار و $F : X \to Y$ خطی باشد و $F \in CL(X, Y)$. اگر $x_n \xrightarrow{w} x$ در X، آنگاه $F(x) \longrightarrow F(x_n)$.

در این حالت، F رابطور کامل پیوسته می نامیم. ($CL(X,Y)$ مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده روی X می باشد.)

اثبات: فرض کنیم $x_n \xrightarrow{w} x$، بنابراین (x_n) کراندار است. اگر $F(x_n) \not\longrightarrow F(x)$، آنگاه $\epsilon > 0$ و زیر نباله‌ای از (x_n) مانند (x_{n_j}) وجود دارند که $||F(x_{n_j}) - F(x)|| \geq \epsilon$ برای هر j. از آنجا که F فشرده است و (x_{n_j}) کراندار است، لذا زیر دنباله‌ای از (x_{n_j}) چون (z_j) وجود دارد که $(F(z_j))$ به y ای در Y همگراست.
پس $||y - F(x)|| \geq \epsilon$ و لذا $y \neq F(x)$.

از طرف دیگر اگر $y' \in Y'$ آنگاه $y'oF \in X'$ و چون $z_j \longrightarrow x$ ، داریم:

$$y'(F(x)) = \lim_{j\longrightarrow\infty}(y'oF)(z_j) = y'(\lim_{j\longrightarrow\infty}(F(z_j))) = y'(y)$$

از این رو $y'(y - F(x)) = 0$ برای هر $y' \in Y'$. طبق قضیه اگر $0 \neq a \in X$، آنگاه $f \in X'$ وجود دارد که $f(a) = ||a||$، پس بایستی $y = F(x)$.
این تناقض ثابت می‌کند $F(x_n) \longrightarrow F(x)$ در Y.

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند، آنگاه:

(الف) اگر $A \in B(X,Y)$ و $\dim(R(A)) < \infty$، آنگاه A فشرده است.

(ب) اگر $A \in B(X,Y)$، فشرده و $R(A)$ بسته باشد، آنگاه $\dim(R(A)) < \infty$.

(ج) اگر $A \in B(X)$، فشرده و $\lambda \neq 0$، آنگاه $\dim(N(A - \lambda I)) < \infty$.
($N(A - \lambda I)$ فضای پوچ $(A - \lambda I)$ است.)

(د) اگر $A \in B(X)$، فشرده و $\dim(X) = \infty$، آنگاه $0 \in \sigma(A)$.

[مرجع [۱۰]، صفحه ۹۸، قضیه ۴.۱۸]

۲.۱ مقدار ویژه و بردار ویژه

تعریف ۱.۲.۱ عدد مختلط k را مقدار ویژه $A \in L(H)$ نامیم، هر گاه:

$$\exists x \neq 0 \in H; \quad A(x) = kx$$

دراین حالت x را بردار ویژه A، متناظر با مقدار ویژه k می نامیم.

هرگاه A خودالحاق باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی‌اند، زیرا:
فرض کنیم $Ax = \lambda x, x \neq 0$، آنگاه:

$$\lambda ||x||^{2} =< Ax, x >=< x, Ax >= \overline{\lambda} ||x||^{2} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

تعریف ۲.۲.۱ طیف عملگر A روی فضای باناخ X، $\sigma(A)$، مجموعه‌ی تمام اسکالرهای λ می باشد که $A - \lambda I$ وارون پذیر نباشد. بنابراین $\lambda \in \sigma(A)$ اگر و فقط اگر یکی از شرایط (الف) و (ب) برقرار باشد:

(الف) برد $A - \lambda I$ تمام X نباشد.

(ب) $A - \lambda I$ یک به یک نباشد.

اگر (ب) برقرار باشد، λ را مقدار ویژه A نامیم و هر $x \in N(A - \lambda I)$، $(x \neq 0)$، بردار ویژه متناظر با آن است.

[مرجع [۱۰]، صفحه ۹۸]

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم A یک عملگر فشرده روی فضای هیلبرت H باشد. آنگاه یک دنباله‌ی غیر صعودی متناهی یا نامتناهی از اعداد مثبت مانند (α_n) و مجموعه‌های برداری متعامد یکه‌ی $\{u_۱, u_۲, ..\}$ و $\{v_۱, v_۲, ...\}$ در H وجود دارند که،

$$A(x) = \Sigma_n \alpha_n < x, u_n > v_n, \qquad x \in H$$

برای هر x در H داریم:

$$A^*(x) = \Sigma_n \alpha_n < x, v_n > u_n$$

$$A^*A = \Sigma_n \alpha_n^۲ < x, u_n > u_n, AA^* = \Sigma_n \alpha_n^۲ < x, v_n > v_n$$

دنباله‌ی (α_n)، دنباله‌ی مقادیر منفرد A نامیده می‌شود. در واقع jـامین مقدار منفرد A، jـامین مقدار ویژه‌ی عملگر $(A^*A)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود و آن را با $s_j(A)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار نامتناهی باشد و $A \in CL(X)$. آنگاه طیف A یک مجموعه‌ی شماراست که شامل صفر می باشد.
اگر $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ مجموعه‌ی نامتناهی مقادیر ویژه‌ی A باشد، آنگاه $\lambda_n \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

اثبات : $\sigma(A)$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathbb{K}$ است، زیرا $\forall \lambda \in \sigma(A), |\lambda| \leq ||A||$.
از آنجا که $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\} \subset \sigma(A)$، پس طبق قضیه بولزانو وایرشتراس، $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد.

صفر تنها نقطه حدی ممکن است، کافیست نشان دهیم برای هر $\epsilon > 0$، مجموعه‌ی $S = \{\lambda \in \sigma(A) : \quad |\lambda| > \epsilon\}$ متناهی است.
فرض کنیم برای یک $\epsilon > 0$، S مجموعه‌ی نامتناهی λ_1، λ_2، ... باشد، v_j را بردار ویژه‌ی A متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_j در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $M_n = sp\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.
v_j ها بطور خطی مستقلند، لذا M_{n-1} زیر فضای سره‌ی M_n است. از این رو،

$$\exists w_n \in M_n; \quad 1 = ||w_n|| = d(w_n, M_{n-1}) \qquad (i)$$

(d تابع فاصله است.)
حال،

$$||Aw_n - Aw_m|| = ||\lambda_n w_n - (\lambda_n w_n - Aw_n + Aw_m)|| \qquad (ii)$$

$\lambda_n w_n - Aw_n, Aw_m \in M_{n-1}$ که $n > m$. لذا از (i) و (ii) برای $n > m$ داریم:

$$||Aw_n - Aw_m|| \geq |\lambda_n| d(w_n, M_{n-1}) = |\lambda_n| \geq \epsilon$$

ولی این غیر ممکن است زیرا $\{Aw_n\}$ یک زیردنباله‌ی همگرا دارد.

تعریف ۵.۲.۱ دنباله‌ی متعامد یکه‌ی $\{\varphi_n\}$ از بردارهای ویژه‌ی $A \in L(H)$، متناظر با مقادیر ویژه‌ی غیر صفر A، $\{\lambda_n\}$، یک مجموعه پایه از بردارهای ویژه و مقادیر ویژه‌ی A نامیده می شود، هر گاه:

$$\forall x \in H, \quad Ax = \sum_k \lambda_k < x, \varphi_k > \varphi_k$$

قضیه طیفی وجود چنین مجموعه پایه‌ای از مقادیر و بردارهای ویژه را برای هر عملگر فشرده و خود الحاق اثبات می‌کند.

قضیه ۶.۲.۱ (قضیه طیفی) فرض کنیم A عملگری فشرده و خودالحاق روی H باشد. مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی $\phi_۱$، $\phi_۲$ و ... از بردارهای ویژه‌ی A، متناظر با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و ... وجود دارد، به قسمی که $\forall x \in H$, $Ax = \sum_k \lambda_k < x, \phi_k > \phi_k$.

اگر $\{\lambda_k\}$ دنباله‌ای نامتناهی باشد، آنگاه به صفر همگرا خواهد شد.
واضح است که اگر $\{\phi_k\}$ پایه‌ی متعامد یکه‌ای برای H باشد، آنگاه ماتریس متناظر با A و $\{\phi_k\}$ ماتریسی قطری خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} \lambda_۱ & & \\ & \lambda_۲ & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

اثبات : فرض کنیم $H_۱ = H$ و $A_۱ = A$. می‌توان نتیجه گرفت یک مقدار ویژه‌ی $\lambda_۱$ از $A_۱$ و بردار ویژه‌ای مانند $\phi_۱$ متناظر با آن وجود دارد که $||\phi_۱|| = ۱$ و $|\lambda_۱| = ||A_۱||$.

حال $H_2 = \{\phi_1\}^{\perp}$ یک زیر فضای بسته از H_1 است و $AH_2 \subset H_2$. فرض کنیم A_2 تحدید A به H_2 باشد. پس A_2 عملگری فشرده و خودالحاق در $L(H_2)$ است. اگر $A_2 \neq 0$، یک مقدار ویژه‌ی λ_2 از A_2 و بردار ویژه‌ای مانند ϕ_2 متناظر با آن وجود دارد که $||\phi_2|| = 1$ و

$$|\lambda_2| = ||A_2|| \leq ||A_1|| = |\lambda_1|$$

بوضوح $\{\phi_1, \phi_2\}$ متعامد یکه است. حال $H_3 = \{\phi_1, \phi_2\}^{\perp}$ یک زیر فضای بسته از H_1 است، $H_3 \subset H_2$ و $AH_3 \subset H_3$.
A_3 را تحدید A به H_3 قرار می‌دهیم،A_3 عملگری فشرده و خودالحاق در $L(H_3)$ است، این روش را ادامه می‌دهیم که ممکن است در مرحله‌ی n ای، $A_n = 0$، قطع شود و یا دنباله‌ای مانند $\{\lambda_n\}$ از مقادیر ویژه و بردار های متناظر آن، $\{\phi_1, \phi_2, ...\}$، بدست آوریم که،

$$|\lambda_{n+1}| = ||A_{n+1}|| \leq ||A_n|| = |\lambda_n|, \qquad n = 1, 2, ...$$

از اثبات قسمت دوم قضیه صرف نظر می‌کنیم. [مرجع [۴]، صفحه ۱۱۳]

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنیم A و B عملگر های فشرده و خود الحاق در $L(H)$ باشند. اگر $AB = BA$، آنگاه A و B هر دو (همزمان) قطری شونده هستند. یعنی: یک مجموعه‌ی متعامد یکه از بردارهای ویژه، $\{\varphi_n\}$، از A و B، متناظر با مقادیر ویژه‌ی $\{\lambda_n\}$ و $\{\mu_n\}$ (به ترتیب برای A وB) وجود دارد که برای هر x،

$$Ax = \Sigma_n \lambda_n < x, \varphi_n > \varphi_n \ , \ Bx = \Sigma_n \mu_n < x, \varphi_n > \varphi_n$$

اثبات: فرض کنیم $\{\lambda_n\}$ یک مجموعه‌ی پایه از مقادیر ویژه‌ی A باشد.

از اثبات قضیه‌ی طیفی داریم که اگر،

$$||\varphi_1|| = 1 \ , \varphi_1 \in \ker(\lambda_1 I - A)$$

و

$$\varphi_n \in \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}\}^\perp \bigcap \ker(\lambda_n I - A) \quad , n = 2, 3, ... \quad (1)$$

آنگاه $\{\varphi_n\}$ یک مجموعه‌ی پایه از بردارهای ویژه برای A است. از فرض $AB = BA$ نتیجه می‌شود $ker(\lambda_n - A)$ تحت B پایا است. از این رو، از آنجا که B فشرده و خود الحاق است، می توانیم φ_n را طوری انتخاب می کنیم که φ_n در (۱) صدق کند و φ_n یک بردار ویژه‌ی B باشد.
پس، $B\varphi_n = \mu_n \varphi_n$

برای $x \in H$، $u \in \ker(A)$ موجود است که،

$$x = u + \sum_k < x, \varphi_k > \varphi_k \quad (2)$$

اگر $B \ker(A) = (0)$، آنگاه:

$$Bx = \sum \mu_k < x, \varphi_k > \varphi_k \quad (3)$$

فرض کنیم $B \ker(A) \neq \{0\}$. از آنجا که $\ker(A)$ تحت B پایا است، یک مجموعه متعامد یکه $\{\psi_j\} \subset \ker(A)$ و دنباله‌ای از مقادیر ویژه‌ی B مانند $\{\eta_j\}$ موجودند که برای هر $u \in \ker(A)$،

$$Bu = \sum_j \eta_j < u, \psi_j > \psi_j \quad (4)$$

از (۲) ، (۳) و (۴) واضح است که $\{\varphi_n\}$ یا $\{\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, ...\}$ عملگرهای A و B را قطری می کنند.

قضیه ۸.۲.۱ اگر $A \in CL(H)$ خودالحاق باشد، آنگاه $\max_{||x||=1} | < Ax, x > |$ وجود دارد و برابر با $||A||$ است.

اثبات : طبق قضیه، λ، مقدار ویژه‌ای از A وجود دارد که $|\lambda| = ||A||$. فرض کنیم ϕ بردار ویژه‌ی متناظر با λ باشد و $||\phi|| = 1$.
بنابراین:

$$| < A\phi, \phi > | = |\lambda| = ||A|| \geq | < Ax, x > |$$

توجه یک عملگر فشرده که خودالحاق نیست، نیازی نیست دارای مقدار ویژه باشد.

مثال ۹.۲.۱ عملگر زیر را در نظر می‌گیریم:
$A : L_2([0, 1]) \to L_2([0, 1])$
$(Af)(t) = \int_0^t f(s)\, ds$
اگر $a \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$ که،

$$a(t, s) = \begin{cases} 1 & ;0 \leq s \leq t \\ 0 & ;t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

آنگاه:

$$(Af)(t) = \int_0^t a(t, s) f(s)\, ds$$

A فشرده است ولی هیچ مقدار ویژه ای ندارد، زیرا اگر $A\phi = \lambda\phi$، آنگاه:

$$\int_0^t \phi(s)\, ds = \lambda\phi(t) \qquad (*)$$

از آنجائیکه $L_2[0, 1]$ شامل کلاس های هم ارزی توابع مربع انتگرال پذیر است

که تقریباً همه جا برابرند، ϕ را به گونه‌ای می توان باز تعریف کرد که $(*)$ برای تمام t ها برقرار باشد. از این رو،

$$\phi(t) = \lambda\phi'(t), \qquad \phi(0) = 0$$

که نتیجه می دهد $\phi = 0$، در صورتی که بردار ویژه متناظر با λ باید مقداری غیر صفر باشد.

اثبات فشردگی A: فرض کنیم $\phi_1, \phi_2, \ldots$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $L_2[0,1]$ باشد. آنگاه $\phi_{ij}(t,s) = \phi_i(t)\overline{\phi_j}(s), \quad i,j = 1,2,\ldots$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $L_2([0,1]\times[0,1])$ خواهد بود. از این رو،

$$a = \sum_{i,j=1}^{\infty} < a, \phi_{ij} > \phi_{ij}$$

تعریف می کنیم :

$$a_n(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} < A, \phi_{ij} > \phi_{ij}(t,s)$$

آنگاه $||a_n - a|| \to 0$.

فرض کنیم A_n عملگر انتگرالی باشد که روی $L_2[0,1]$ به این شکل تعریف شده است :

$$(A_n f)(t) = \int_0^1 a_n(t,s) f(s)\, ds$$

A_n یک عملگر خطی کراندار مرتبه متناهی می باشد زیرا $Im(A_n) \subset sp\{\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n\}$.

و از آنجائیکه $||A|| \leq ||a||$، نتیجه می شود:

$$||A_n - A|| \leq ||a_n - a| \to 0$$

پس A فشرده است. $\square$

قضیه ۱۰.۲.۱ [۱] فرض کنیم $A \in CL(H)$ نامنفی باشد و $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq ...$ یک مجموعه پایه از مقادیر ویژه‌ی A باشند. آنگاه برای هر عدد صحیح n،

$$\lambda_n = \min_{\substack{M \\ \dim M = n-۱}} \max_{\substack{||x||=۱ \\ x \perp M}} < Ax, x >$$

اثبات:
از قضیه قبل می توان گفت که $\{\max | < Ax, x > | : ||x|| = ۱, x \perp M\}$ بدست آمده است. برای $n = ۱$ تنها زیر فضای با بعد صفر، (0) است. پس $\lambda_۱ = \max_{||x||=۱} | < Ax, x > |$، که آن را از قبل می دانیم.

فرض کنیم $\{\phi_n\}$ یک مجموعه پایه از بردارهای ویژه‌ی A متناظر با $\{\lambda_n\}$ باشد. برای هر زیر فضای M با بعد $n - ۱$، $x_۰$ ای در $sp\{\phi_۱, \phi_۲, ..., \phi_n\}$ وجود دارد به قسمی که $x_۰ \perp M$ و $||x_۰|| = ۱$. فرض کنیم $x_۰ = \sum_{k=۱}^{n} a_k \phi_k$.

از آنجائیکه $۱ \leq k \leq n \quad \lambda_k \geq \lambda_n,$،

$$\begin{aligned} &\max_{\substack{||x||=۱ \\ x \perp M}} < Ax, x > \geq < Ax_۰, x_۰ > = < \sum_{k=۱}^{n} \lambda_k a_k \phi_k, \sum_{k=۱}^{n} a_k \phi_k > \\ &= \sum_{k=۱}^{n} \lambda_k |a_k|^۲ \geq \lambda_n ||x_۰||^۲ = \lambda_n \qquad (i) \end{aligned}$$

ولی،

$$\lambda_n = \max_{\substack{||x||=۱ \\ x \perp sp\{\phi_۱, \phi_۲, ..., \phi_{n-۱}\}}} < Ax, x > \qquad (ii)$$

M یک زیر فضای دلخواه از مرتبه‌ی $n - ۱$ است، لذا قضیه از (i) و(ii) نتیجه می شود.□

[۱] $min - max \quad theorem$

قضیه ۱۱.۲.۱ فرض کنیم A و B عملگرهای فشرده‌ی نامنفی در $L(H)$ باشند. فرض کنیم $\phi_1, \phi_2, ...$ و $... \geq \lambda_2(A) \geq \lambda_1(A)$ یک مجموعه پایه از بردارها و مقادیر ویژه‌ی A، $\psi_1, \psi_2, ...$ و $... \geq \lambda_2(B) \geq \lambda_1(B)$ یک مجموعه پایه از بردارها و مقادیر ویژه‌ی B باشند.

(الف) اگر $< Ax, x > \leq < Bx, x >, \forall x \in H$، آنگاه:

$$\lambda_n(A) = \min_{\substack{M \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{||x||=1 \\ x \perp M}} < Ax, x >$$
$$\leq \min_{\substack{M \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{||x||=1 \\ x \perp M}} < Bx, x >= \lambda_n(B)$$

(ب) $|\lambda_n(A) - \lambda_n(B)| \leq ||A - B||$

توجه می کنیم که اگر $||x|| = 1$، آنگاه:

$$| < Ax, x > - < Bx, x > | = | < (A - B)x, x > | \leq ||A - B||$$

از این رو،

$$< Ax, x > \leq < Bx, x > + ||A - B|| \qquad (1)$$
$$< Bx, x > \leq < Ax, x > + ||A - B|| \qquad (2)$$

از (۱)، (۲) و قضیه $min - max$ نتیجه می شود که،

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B) + ||A - B||$$

$$\lambda_n(B) \leq \lambda_n(A) + ||A - B||$$

یا بطور معادل، $|\lambda_n(A) - \lambda_n(B)| \leq ||A - B||$.$\square$