دانشگاه کاشان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز)

عنوان:

مروری بر فرضیه ریمان و تعمیم‌های آن، نتایج و شرط‌های معادل

استاد راهنما:

دکتر حسن دقیق

به‌وسیله:

مهدیه نعمتی

بهمن‌ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر دلسوز و مادر مهربانم

و آنان که همیشه یاور و پشتیبانم بوده‌اند.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس بزرگ راهنمای عالم هستی را که توفیق خوشه‌چینی از بوستان حکمت و معرفت را به ما عطا کرد معبودی که همواره در سایه‌ی عنایتش بوده‌ام و هر زمان که او را خوانده‌ام آرمان یافته‌ام.

بی‌تردید نگارش این مجموعه مرهون زحمات بی‌دریغ معلمین، دبیران و اساتید بزرگواری است که همواره و در همه حال در نهایت صبر و شکیبایی به یاریم شتافتند، لذا بر خویش فرض می‌دانم تا مراتب سپاس را نسبت به این عزیزان اعلام نمایم. لازم و شایسته است که از استاد راهنمای بزرگوارم **جناب آقای دکتر حسن دقیق** که راهنمایی‌های خردمندانه‌ی ایشان در انجام این پایان‌نامه همواره دریچه تازه‌ای را به رویم گشوده است، قدردانی کنم. همچنین وظیفه خویش می‌دانم به اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر روح‌اله جهانی‌پور و جناب آقای دکتر ناصر بروجردیان که ساعاتی از وقت گرانبهای خود را در اختیار این‌جانب قرار داده این پایان‌نامه را مورد مطالعه قرار دادند مراتب سپاس و تشکر خویش را تقدیم دارم. همچنین از تشریک مساعی جناب آقای دکتر بهنام بازیگران، نماینده‌ی محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه، که قبول زحمت نموده‌اند و در جلسه دفاع بنده شرکت نمودند سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان از پدر و مادرم، فروزان‌ترین شعله‌های محبت و ایثار که همواره وجودشان گرمی‌بخش زندگی‌ام بوده از صمیم قلب سپاسگزارم. از خواهران و برادران خوبم که همدم دیروز، امروز و فردایم هستند تشکر می‌کنم. و سعادت و سلامت همگان را از ایزد یکتا خواهانم.

مهدیه نعمتی

بهمن ۱۳۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به بررسی ویژگی‌های تحلیلی تابع زتای ریمان و معادلات تابعی شامل این تابع می‌پردازیم، سپس فرضیه ریمان در مورد صفرهای این تابع و برخی گزاره‌های معادل با این فرضیه که تاکنون مطرح شده‌اند را بیان می‌کنیم. آن‌گاه مقدماتی از نظریه جبری اعداد و تابع زتای ددکیند ارائه می‌نماییم. در پایان به ارائه مقدماتی از نظریه خم‌های بیضوی پرداخته و به تحلیل تابع زتای خم بیضوی می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: تابع زتای ریمان، فرضیه ریمان، تابع زتای ددکیند، خم بیضوی، خط بحرانی.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست علائم و اختصارات

تابع موبیوس .... μ
تابع اویلر .... φ
تابع منگولد .... Λ
تابع لیوویل .... λ
تابع مقسوم‌علیه .... σ
ثابت اویلر .... γ
تابع گاما .... Γ
نماد آپل .... (a,n)
قسمت حقیقی عدد مختلط .... $\Re$
قسمت غیرحقیقی عدد مختلط .... $\Im$
تابع زتا .... ζ
پیچش دیریکله توابع f و g .... $f*g$
تابع تعداد مقسوم‌علیه .... τ
چندجمله‌ای برنولی .... $B_n(x)$
عدد برنولی .... $B_n(\text{۰})$
تعداد اعداد اول کمتر یا مساوی x .... $\pi(x)$
تابع مرتنس .... $M(x)$
n—امین عدد هارمونیک .... H_n

سری فاری از مرتبه n	F_n
فضای توابع هموار	C^∞
ماتریس ردهفر	R_n
میدان عددی	K
حلقه صحیح‌های جبری K	$\mathcal{O}_K$
میدان مربعی	$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$
مبین پایه $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$	$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
مبین میدان عددی K	d_K
نرم	N
عدد کلاسی میدان عددی K	h_K
منظم‌ساز میدان عددی K	R_K
تابع زتای ددکیند	ζ_K
n—فضای آفین روی میدان K	$\mathbb{A}^n(\bar{K})$
خم جبری	C
n—فضای تصویری روی میدان K	$\mathbb{P}^n(\bar{K})$
خم تصویری	E
نقطه در بینهایت	$\mathcal{O}$
مبین خم تصویری	Δ
j—ناوردا	j
دیفرانسیل ناوردا	ω
زیرگروه m—تابی	$E[m]$
زیرگروه تابی	E_{tors}
میدان متناهی	$\mathbb{F}_q$
نگاشت فربینیوس	Φ_q
تابع زتای خم بیضوی	ζ_E

تابع ارتفاع .... h

تابع ارتفاع متعارف .... $\hat{h}$

شبکه L

$L-$سری متناظر خم E .... $L(E,s)$

مقدمه

تابع زتای ریمان یکی از توابع مهم در مبحث آنالیز مختلط و نظریه اعداد می‌باشد. در سال ۱۸۵۹ ریمان فرضیه معروف خود را در باب صفرهای این تابع مطرح کرد. بنا بر این فرضیه، تمام صفرهای نابدیهی تابع زتای ریمان دارای قسمت حقیقی $\frac{۱}{۲}$ هستند.

اگرچه تا به امروز این مسئله نظر بسیاری از ریاضیدانان معروف را به خود جلب کرده است ولی با وجود تلاش‌های بسیار هنوز این فرضیه اثبات نشده است. تاکنون ریاضیدانان مختلفی موفق به بیان شروط معادلی با فرضیه ریمان شده‌اند. همچنین با محاسبات گسترده‌ای تعداد بسیاری از صفرهای این تابع توسط گرام [۱]، بکلوند [۲]، لمر، هیزل‌گرو[۳]، روسر[۴]، یوهه[۵]، شونفلد[۶] و دیگران ارائه شده است. با وجود همه‌ی این شواهد در جهت فرضیه ریمان، محاسبات نیز چند پدیده را آشکار کرده‌اند که ممکن است مثال‌های نقضی برای فرضیه ریمان وجود داشته باشند.

برآنیم تا نگاهی اجمالی به برخی ویژگی‌های این تابع و شروط معادل فرضیه ریمان و معرفی تعداد محدودی از صفرهای این تابع داشته باشیم.

این پایان‌نامه مشتمل بر شش فصل می‌باشد.

در فصل اول، مقدماتی از نظریه اعداد را مطرح می‌کنیم سپس به معرفی حاصل‌ضرب‌های نامتناهی می‌پردازیم و در بخش آخر معرفی تابع گاما یکی از توابع پرکاربرد این پایان‌نامه را

---

[۱] Gram

[۲] Backlund

[۳] Haselgrove

[۴] Rosser

[۵] Yohe

[۶] Schoenfeld

خواهیم داشت.

لازم به ذکر است اثبات قضایای مباحث حاصل‌ضرب نامتناهی و تابع گاما ساده اما طولانی بودند لذا به صلاحدید استاد راهنمای پروژه از بیان آن‌ها اجتناب نمودم.

در فصل دوم، معرفی تابع زتای ریمان، حاصل‌ضرب اویلر وابسته به این تابع، وسعت دامنه تعریف تابع به تمام صفحه $\mathbb{C}$ با کمک نظریه امتداد تحلیلی، بیان معادلات تابعی شامل تابع زتا و معرفی ناحیه فارغ از صفر و ناحیه بحرانی برای تابع فوق از اهداف اصلی ما می‌باشد. در این فصل همچنین تابع ξ که تعریفی وابسته به تابع زتای ریمان و تابع گاما دارد را معرفی کرده و چند قضیه مهم در باب ویژگی‌های این تابع فقط مطرح می‌کنیم که به دلیل نیاز به مقدمات بیشتری از طرح اثبات اجتناب شده‌است.

خواننده‌ی علاقه‌مند برای مطالعه بیشتر در حیطه مطالب این فصل می‌تواند به مراجع [۱۱]، [۱۲]،[۲۱] و [۳۰] مراجعه نماید.

در فصل سوم، ابتدا تاریخچه‌ای از فرضیه ریمان مطرح می‌کنیم سپس به بیان تعدادی گزاره معادل با این فرضیه می‌پردازیم این گزاره‌های معادل را تحت عنوان هم‌ارزی مطرح می‌کنیم، به دلیل وسعت مطالب هر هم‌ارزی استناد به این شروط تنها از طریق منابع ذکر شده بعد از هر شرط می‌باشد.

در فصل چهارم، گزاره معادل با فرضیه ریمان که منسوب به $XianJin - Li$ و معروف به فرضیه Li می‌باشد را اثبات می‌کنیم.مطالب این فصل از مرجع [۱۹] می‌باشد که مرجع اصلی برای این پایان‌نامه است.

در فصل پنجم، ابتدا مقدماتی از نظریه جبری اعداد مطرح می‌کنیم تا زمینه مناسب برای بحث روی تابع زتای ددکیند فراهم شود، برای آشنایی با نظریه جبری اعداد می‌توان به مراجع [۱۳]، [۱۸] و [۲۹] مراجعه نمود. در بخش دوم معرفی تابع زتای ددکیند و ویژگی‌های تحلیلی این تابع و معادلات تابعی شامل تابع فوق و بیان رابطه پرکاربرد فرمول عدد کلاسی در نظریه جبری اعداد از سرفصل‌های اصلی می‌باشد. در بخش آخر، صفرهای تابع ددکیند را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم صفرهای تابع زتای ددکیند نیز در ناحیه مشابه ناحیه بحرانی تابع زتای ریمان قرار می‌گیرند و در نهایت فرضیه Li برای تابع زتای ددکیند را مطرح می‌کنیم به دلیل

محاسبات بسیار این بحث به بیان صورت کلی راهکار بسنده می‌کنیم، برای مطالعه بیشتر میتوان به مرجع [۱۹] رجوع نمود.

در فصل ششم، ابتدا معرفی کوتاهی از خم بیضوی داریم سپس تابع زتای خم‌بیضوی را معرفی کرده و حاصل‌ضربی مشابه با حاصل‌ضرب اویلر به این تابع وابسته می‌کنیم واز همه مهمتر اثبات فرضیه ریمان برای این تابع را خواهیم داشت.

در بخش آخر، انواع تحویل‌ها روی خم بیضوی را مطرح می‌کنیم تا مقدمات کار برای تعریف $L-$ سری فراهم شود و در نهایت حدس بسیار معروف بیرچ سوینرتون$-$ دایر را مطرح می‌کنیم و تشابه حدس فوق با فرمول عدد کلاسی را بررسی می‌کنیم.

برای آشنایی با مطالب این فصل سه مرجع [۱۵]، [۲۵] و [۳۳] را معرفی می‌نماییم.

نکته بسیار مهم در رابطه با دو فصل آخر، زیبایی تعمیم تعریف تابع زتای ریمان به دو حیطه خم بیضوی و نظریه جبری اعداد و تشابه نتایج اثبات شده برای هر سه نوع تابع زتا می‌باشد.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

این فصل از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول به بیان مقدماتی از نظریه اعداد می‌پردازیم، در بخش دوم به معرفی حاصل‌ضرب نامتناهی، همگرایی آن‌ها و ارتباطشان با سری‌های نامتناهی پرداخته و در بخش آخر تابع گاما را معرفی می‌نماییم و سپس به بیان قضایایی در باب این تابع می‌پردازیم که در فصول بعد مورد نیاز می‌باشند.

مطالب بیان شده در این فصل مفاهیمی هستند که مطالعه‌ی آن‌ها برای فهم مطالب بعدی ضروری است و خواننده‌ی علاقه‌مند برای بررسی بیشتر می‌تواند به مراجع [۲] و [۸] رجوع نماید.

۱—۱ مقدماتی از نظریه اعداد

این بخش به بیان مقدماتی از نظریه اعداد که در فصول بعد کاربرد بسیاری دارند اختصاص دارد. این مقدمات عبارتند از معرفی اجمالی توابع حسابی، تابع حسابی ضربی، آشنایی با چند تابع ضربی خاص، معرفی دو نماد اوی بزرگ و کوچک و در نهایت معرفی ثابت مهم و پرکاربرد اویلر می‌باشد.

تعریف ۱.۱ تابع $\mu : \mathbb{N} \to \{\circ, ۱, -۱\}$ با تعریف زیر را تابع موبیوس می‌نامیم:

$$\mu(n) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } n \text{ بر مربع یک عدد اول بخش‌پذیر باشد} \\ ۱ & \text{اگر } n = ۱ \\ (-۱)^k & \text{اگر } n \text{ حاصل‌ضربی از } k \text{ عامل اول متمایز باشد} \end{cases}$$

ویژگی ساده ولی اساسی تابع موبیوس این است که برای هر $n > ۱$ مجموع مقادیر تابع روی مقسوم‌علیه‌های n برابر صفر می‌شود.

قضیه ۲.۱ اگر $n \geq ۱$، داریم

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{۱}{n}\right] = \begin{cases} ۱ & n = ۱ \\ \circ & n \neq ۱ \end{cases}$$

اثبات. اگر $n = ۱$ حکم واضح است. فرض کنیم $n > ۱$ و $n = p_۱^{\alpha_۱} \dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه n به عوامل اول باشد. مجموع $\sum_{d|n} \mu(d)$، مقسوم علیه‌های n که حاصل‌ضرب اعداد اول متمایزی هستند وهمین‌طور $d = ۱$ را دربر می‌گیرد. بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(۱) + \mu(p_۱) + \dots + \mu(p_k) + \mu(p_۱ p_۲) + \dots + \mu(p_{k-۱} p_k) \\ &+ \dots + \mu(p_۱ \dots p_k) \\ &= ۱ + \binom{k}{۱}(-۱)^۱ + \binom{k}{۲}(-۱)^۲ + \dots + \binom{k}{k}(-۱)^k = (۱-۱)^k = \circ \end{aligned}$$

و اثبات به پایان می‌رسد. $\square$

تعریف ۳.۱ تابع حسابی f را ضربی نامیم اگر متحد صفر نبوده و برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $(m,n) = ۱$ داشته باشیم $f(mn) = f(m)f(n)$. تابع ضربی f را کاملاً ضربی نامیم اگر به‌ازای هر m, n داشته باشیم، $f(mn) = f(m)f(n)$.

مثال ۴.۱ تابع موبیوس ضربی است، ولی کاملاً ضربی نیست. به‌عنوان مثال داریم $\mu(۴) = \circ$ ولی $\mu(۲)\mu(۲) = ۱$.

تعریف ۵.۱ اگر $n \geq ۱$، تابع اویلر $\varphi(n)$ را مساوی با تعداد اعداد صحیح مثبت نابیشتر از n که نسبت به n اول هستند، تعریف می کنیم. به‌عبارت دیگر

$$\varphi(n) = \sum_{k=۱}^{n}{}' ۱$$

که در آن $\sum'$ نشان می‌دهد که مجموع روی kهایی گرفته می‌شود که نسبت به n اول هستند.

قضیه ۶.۱ اگر $n \geq ۱$، داریم $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

اثبات. برای هر مقسوم‌علیه d از n تعریف می‌کنیم

$$S_d = \{k : ۱ \leq k \leq n, (k,n) = d\}$$

هر عدد $n \geq k \geq ۱$ در یکی از S_dها قرار دارد لذا $\bigcup S_d = \{۱, ۲, \dots, n\}$ و $\sum_{d|n} |S_d| = n$. اما

$$k \in S_d, \quad ۱ \leq k \leq n \;\Leftrightarrow (k,n) = d \;\Leftrightarrow (\frac{k}{d}, \frac{n}{d}) = ۱, \;\; ۰ \leq \frac{k}{d} \leq \frac{n}{d}$$

و می دانیم تعداد اعداد نابیشتر از $\frac{n}{d}$ که نسبت به آن اول هستند برابر با $\varphi(\frac{n}{d})$ می‌باشد بنابراین $|S_d| = \varphi(\frac{n}{d})$. با توجه به این‌که $\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ حکم نتیجه می‌شود. □

تعریف ۷.۱ تابع $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ با تعریف زیر را تابع منگولد می‌نامیم:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{اگر به ازای عدد اولی چون } p \text{ و عدد صحیح } m \geq ۱ \text{ داشته باشیم } n = p^m \\ o & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

تعریف ۸.۱ تابع $\lambda : \mathbb{N} \to \{۱, -۱\}$ با تعریف زیر را تابع لیوویل می‌نامیم:

$$\lambda(n) = \begin{cases} ۱ & n = ۱ \\ (-۱)^{\alpha_۱ + \dots + \alpha_r} & n = p_۱^{\alpha_۱} \dots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

قضیه ۹.۱ به ازای هر $n \geq ۱$، داریم

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \text{ مربع باشد} \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

اثبات. فرض کنیم $g(n)=\sum_{d|n}\lambda(d)$. چون λ ضربی است پس g نیز ضربی است. در نتیجه، برای تعیین $g(n)$ فقط کافی است $g(p^a)$ را به ازای توان‌های اعداد اول حساب کنیم. داریم

$$\begin{aligned} g(p^a)=\sum_{d|p^a}\lambda(d) &= ۱+\lambda(p)+\lambda(p^۲)+\ldots+\lambda(p^a) \\ &= ۱-۱+۱-\ldots+(-۱)^a=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } a \text{ فرد باشد} \\ ۱ & \text{اگر } a \text{ زوج باشد} \end{cases} \end{aligned}$$

از این رو، اگر $n=\prod_{i=۱}^{k}p_i^{a_i}$، داریم $g(n)=\prod_{i=۱}^{k}g(p_i^{a_i})$. اگر نمای a_i فرد باشد، $g(p_i^{a_i})=۰$ و در نتیجه $g(n)=۰$. اگر همه‌ی a_i ها زوج باشند، به ازای هر i، $g(p_i^{a_i})=۱$ و $g(n)=۱$. این نشان می‌دهد که اگر n مربع باشد، $g(n)=۱$ و در غیراین‌صورت $g(n)=۰$. □

تعریف ۱۰.۱ به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α و هر عدد صحیح $n\geq ۱$، تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha$$

یعنی مجموع توان‌های αام مقسوم‌علیه‌های n و تابع σ را برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد n تعریف می‌کنیم: $\sigma(n)=\sum_{d|n}d$.

تابع σ_α با تعریف بالا را تابع مقسوم‌علیه می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم a عددی مثبت و f و g دو تابع باشند به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x\geq a$ داشته باشیم $g(x)>۰$. آن‌گاه گوییم

$$f(x)=O(g(x)), \qquad (f(x) \text{ ی بزرگ } O \text{ } g(x) \text{ است})$$

اگر به‌ازای هر $x\geq a$، $\frac{f(x)}{g(x)}$ کراندار باشد. یعنی ثابت $M>۰$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(x)|\leq Mg(x)\ , \qquad x\geq a.$$

یک معادله به شکل

$$f(x)=h(x)+O(g(x)), \qquad x\geq a$$

به معنای $f(x) - h(x) = O(g(x))$ است.

به‌جای $f(x) = O(g(x))$ گاهی از نماد $f \ll g$ نیز استفاده می‌شود.

مثال ۱۲.۱ فرض کنیم $f(x) = ۶x^۴ - ۲x^۳ + ۵$ آن‌گاه $f(x) = O(x^۴)$. زیرا برای هر $x > ۱$

$$|۶x^۴ - ۲x^۳ + ۵| \leq ۱۳x^۴.$$

تعریف ۱۳.۱ فرض کنیم $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ دو تابع باشند، گوییم $f(x) = o(g(x))$ ($f(x)$ اوی کوچک $g(x)$ است.) هرگاه $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰$.

برای مثال اگر $f(x) = ۲x$ آن‌گاه $f(x) = o(x^۲)$.

در ادامه ثابت اویلر را معرفی می‌نماییم که استفاده پرکاربردی در فصول بعد دارد. این ثابت حد یک دنباله از اعداد طبیعی می‌باشد که جهت معرفی آن یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۱ اگر $s_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n} - \log n$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ وجود دارد.

مقدار این حد را ثابت اویلر می‌نامیم و بانماد γ نشان می‌دهیم.

اثبات. قرار می‌دهیم $t_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n-۱} - \log n$. دنباله t_n یک دنباله‌ی صعودی است زیرا t_n عبارتست از ناحیه‌ی بین مجموع ریمان بالایی و مقدار دقیق $\int_۱^n \frac{۱}{x}\ dx$. می‌توانیم بنویسیم

$$t_n = \sum_{k=۱}^{n-۱} [\frac{۱}{k} - \log\left(\frac{k+۱}{k}\right)]$$

و $\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=۱}^{\infty} [\frac{۱}{k} - \log\left(\frac{k+۱}{k}\right)]$. چون

$$۰ < \frac{۱}{k} - \log\left(\frac{k+۱}{k}\right) = \frac{۱}{۲k^۲} - \frac{۱}{۳k^۳} + \frac{۱}{۴k^۴} - \ldots \leq \frac{۱}{۲k^۲}.$$

لذا طبق آزمون مقایسه $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k} - \log\left(\frac{k+۱}{k}\right)$ همگراست. و چون $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ حکم اثبات می‌شود. □