باسمه تعالی

دانشگاه ولی‌عصر رفسنجان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

g–قاب‌ها در فضای هیلبرت و هیلبرت C^*–مدول

استاد راهنما:

دکتر محمد علی دهقان

پژوهش و نگارش:

مرجان نوبهاری

شهریور ۱۳۸۷

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی خانم مرجان نوبهاری

تحت عنوان:

g- قاب‌ها در فضای هیلبرت و هیلبرت C^* - مدول

در تاریخ ۸۷/۶/۲۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه آقای دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۲- داور خارج از گروه آقای دکتر عطاءا... عسکری‌همت با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۳- داور داخل گروه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

تقدیر و تشکر

خدا را شکر و سپاس می‌گویم به خاطر همه‌ی نعمت‌هایش، به ویژه نعمت تحصیل علم و در تمام لحظات زندگی همواره مدیون الطاف بی‌پایان پدر و مادر عزیزم هستم و بر دستان پر مهر آنها بوسه می‌زنم و همچنین از برادران مهربانم سپاسگزارم.

از استاد گرامی، جناب آقای دکتر محمدعلی دهقان که با قبول راهنمایی این پایان نامه، افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند، بی‌نهایت سپاسگزارم و همچنین از جناب آقای دکتر عسکری همت و آقای دکتر افشین که با قبول داوری این پایان نامه از سوی ایشان، توفیقی بزرگ نصیب اینجانب شد، کمال تشکر و قدردانی را دارم و از سرکار خانم خالویی، منشی دانشکده‌ی ریاضی، بخاطر زحمات بی‌دریغشان، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

در مدت تحصیل در دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان و همچنین تهیه‌ی این پایان‌نامه از مساعدت‌ها و محبت‌های بی‌دریغ خانم‌ها سعیده ایران‌نژاد، نجمه موسوی، مریم نوروزی و دانشجوی دکتری، خانم آزاده علیجانی بهره‌مند بوده‌ام. قلم وزبان از سپاسگزاری این عزیزان ناتوان است بهمین جهت از خداوند متعال برای آن‌ها طلب اجر معنوی و توفیق روز افزون دارم.

به نشانه‌ی سپاسی ژرف و خالصانه، تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم،

که شکیبایی و استواریشان را می‌ستایم.

بسمه تعالی

چکیده

$g-$ قاب‌ها تعمیمی از قاب‌ها هستند که قاب‌های معمولی را در بر دارند. بسیاری از تعمیم‌هایی که اخیرا برای قاب‌ها در نظر گرفته شده مثل عملگرهای خطی معکوس‌پذیر و کران‌دار، شبه تصاویر کران‌دار، شبه قاب‌ها، قاب‌های زیر فضایی، فضای شکافنده پایدار، عملگر موضعی فرکانس—زمان، قاب‌های مایل و قاب‌های بیرونی همگی حالت‌های خاصی از g—قاب‌ها می‌باشند. در این پایان نامه $g-$ قاب‌ها را تعریف و مشخص نموده و نشان می‌دهیم که در بسیاری از موارد مانند قاب‌ها عمل می‌کنند. در ادامه می‌بینیم که ضرایب مختلفی را می‌توان برای $g-$ قاب‌ها انتخاب کرد. $g-$ قاب‌ها به همراه قاب‌ها خاصیت‌های مفیدی را در آنالیز تابعی دارند که آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین تعمیمی از پایه‌های ریس و متعامد را بررسی کرده و خاصیت‌های جالبی از g—قاب‌های کیپ و پارسوال را مطالعه می‌کنیم. در پایان هم g—قاب‌ها را از فضای هیلبرت به فضای هیلبرت C^*—مدول تعمیم داده و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

پیش‌گفتار

یکی از اساسی‌ترین ابزارها در آنالیز که دارای اهمیت می‌باشد، تبدیل فوریه است اما این تبدیل اطلاعات مربوط به لحظه پخش و شروع و پایان سیگنال را مخفی می‌کند. در سال ۱۹۴۶ میلادی گابور[۱] [۱۶] این خلا را پر کرد و شیوه‌ای را پایه گذاری نمود که به وسیله آن می‌توان سیگنال‌ها را به سیگنال‌های مقدماتی تجزیه کرد. با شیوه گابور بلافاصله یک دوره جدید برای آنالیز طیفی مربوط به روشهای زمان—فرکانس شروع شد. امروزه ایده‌های گابور در کاربردهای قاب وایل—هایزنبرگ[۲] مورد بررسی قرار می‌گیرد. گابور به خاطر موفقیت‌ها و ایده‌هایش در زمینه فیزیک موفق به دریافت جایزه نوبل در سال ۱۹۷۱ میلادی شد.

مشخصه اصلی یک پایه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H این است که هر $f \in H$ می‌تواند به عنوان یک ترکیب خطی از عناصر f_k با ضرایب یکتا نشان داده شود. یک قاب نیز دنباله‌ای چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعضای H است که اجازه می‌دهد هر $f \in H$ به صورت یک ترکیب خطی از اعضای f_k نوشته شود که به هر جهت ضرایب متناظر لزوما یکتا نیستند. بنابراین یک قاب ممکن است پایه نباشد که در نگاه اول بی‌استفاده می آید، اما در عمل این خاصیت تبدیل به یک مزیت شده است. یعنی ما در انتخاب ضرایبی که برای کاربردهای واقعی تناسب دارند، آزادی داریم.

تاریخ قاب‌ها مثال خوبی برای توسعه ریاضیات می‌باشد. قاب‌ها درفضای هیلبرت برای

---

[۱] Gabor

[۲] Weyl-heisenberg

اولین بار در سال ۱۹۵۲ در مقاله بنیادی توسط دافین[۳] و شیفر[۴] [۱۱] معرفی شدند، آن‌ها از قاب‌ها به عنوان ابزاری برای مطالعه سری‌های فوریه غیر هارمونیک استفاده کردند. از قرار معلوم در آن زمان اهمیت این مفهوم توسط جامعه ریاضی تشخیص داده نشده بود و تقریبا ۳۰ سال طول کشید تا نگرش‌های بعدی به وجود آمد. در سال ۱۹۸۰ یانگ [۵] [۲۴] کتابی نوشت که شامل حقایقی اساسی در زمینه سری‌های فوریه غیرهارمونیک بود و قاب‌ها در چکیده آن معرفی شده بودند و در متن سری‌های فوریه غیرهارمونیک مورد استفاده قرار گرفتند. در سال ۱۹۸۵ هم‌زمان با شروع دوره نظریه موجک، دوبشی [۶]، گراسمان [۷] و میر[۸] [۹] مشاهده کردند که می‌توان از قاب‌ها برای پیدا کردن سری توابع در $L^2(\mathbb{R})$ درست شبیه به همان بسطی که در پایه‌های متعامد یکه استفاده می‌شود، بهره گرفت. این نکته با توجه به مقاله اساسی دابیشیز[۹] و مقاله مشترکش با هیل–والنات [۱۰] [۱۹] روشن‌تر شد. بعد از آن مطالعه گسترده‌ای روی نظریه قاب‌ها شروع شد. ابتدا قاب‌ها در پردازش سیگنال، پردازش تصویر، فشرده کردن اطلاعات و نظریه نمونه‌گیری مورد استفاده قرار گرفت. اخیراً پیشرفت این نظریه به خاطر کاربردهای جدید آن خیلی سرعت گرفته است. برای مثال قاب‌ها اکنون در کم کردن از خسارات در دستگاههای ارتباطات $packet - based$ و برای بهتر شدن قدرت انتقال اطلاعات [۱۷و۵]، در طراحی صور فلکی با سرعت بالا و در طرح کد چند آنتنی

---

[۳] Duffin

[۴] Schaeffer

[۵] Young

[۶] Daubechies

[۷] Grossmann

[۸] Meyer

[۹] Daubechies

[۱۰] Heil and walnat

(موج‌گیر) [۱۸] استفاده می‌شوند. در سال ۲۰۰۳ کریستین‌سن[۱۱] [۵] اکثریت خواص قاب‌ها را در یک کتاب با عنوان مقدمه‌ای بر قاب‌ها و پایه‌های ریس جمع‌آوری کرد. در سال ۲۰۰۴ کریستین‌سن و الدر[۱۲] [۱۲] و [۷] قاب‌های مایل را در فضای تحت انتقال پایا معرفی کردند که در فضای B–اسپلاین کاربرد دارد و همچنین لی[۱۳] و اوگاوا[۱۴] [۲۱] شبه‌قاب‌ها، کاستازا[۱۵] و کوتنیک[۱۶] [۴] قاب‌ها و پایه‌های زیر فضایی رامعرفی کردند. در سال ۲۰۰۵ عسکری[۱۷] و خسروی[۱۸] [۲] قاب‌های زیر فضایی را به طور کاملتر مورد بررسی قرار دادند که از این قاب‌ها در تعمیم قاب‌های هارمونیک استفاده می‌شود. در سال ۲۰۰۶ تعمیمی از قاب‌ها به نام g– قاب‌ها توسط سان[۱۹] معرفی شد و در سال ۲۰۰۷ فرانک[۲۰] و لارسن[۲۱] [۱۵] قاب‌ها را از فضای هیلبرت به فضای هیلبرت C^*–مدول تعمیم دادند و g– قاب‌ها را نیز می‌توان مانند قاب‌ها در فضای هیلبرت C^*–مدول تعمیم داد که در فصل چهارم این پایان نامه آنها را بررسی می‌کنیم.

این پایان نامه در چهار فصل به قرار زیر تدوین شده است:

فصل اول: در این فصل تمام مفاهیم و قضایای مربوط به نظریه عملگرها روی فضای

---

[۱۱] Christensen

[۱۲] Eldar

[۱۳] Li

[۱۴] Ogawa

[۱۵] Casazza

[۱۶] Kutyniok

[۱۷] Asgari

[۱۸] Khosravi

[۱۹] Sun

[۲۰] Frank

[۲۱] Larson

هیلبرت و هیلبرت C^*–مدول که در این پایان نامه به کار رفته، آورده شده است و همچنین در این فصل به نظریه قاب‌ها در فضای هیلبرت و خواص آنها می‌پردازیم. **فصل دوم**:[۲۳] این فصل مربوط به قاب‌های تعمیم یافته است که در بخش اول آن تعریفی از قاب‌های تعمیم یافته و مثال‌هایی از این نوع قاب‌ها را مشاهده می‌کنیم. در بخش دوم عملگرهای g–قاب و دوگان g–قاب‌ها را می‌شناسیم. در بخش سوم تعریفی از دنباله بسل، پایه ریس و پایه متعامد تعمیم یافته را می‌بینیم و در بخش چهارم کاربردی از g– قاب‌ها را در تحلیل اتمی عملگرهای خطی و کران‌دار مشاهده می‌کنیم. **فصل سوم**:[۳] این فصل به g–قاب‌های کیپ و پارسوال اختصاص دارد که در این فصل خاصیت‌هایی را به g–قاب‌های کیپ وپارسوال نسبت می‌دهیم وآن خاصیت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. **فصل چهارم**: در این فصل ما قاب‌های تعمیم یافته را از فضای هیلبرت به فضای هیلبرت C^*–مدول تعمیم و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

در این فصل تعاریف، مقدمات و مفاهیم اولیه که در طول این پایان نامه مورد نیاز می‌باشند، آورده شده است. این مطالب برگرفته از مقالات و کتاب‌های مختلف است.

۱.۱ پیش‌نیازها

در این بخش منظور از C مجموعه‌ی اعداد مختلط، $I\!R$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی، Z مجموعه‌ی اعداد صحیح و $I\!N$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد. فضاهای هیلبرت و باناخ و خواص و قضایای مربوط به آنها در [۸] به طور کامل آورده شده است. در این بخش تعاریف و قضایایی را که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ اگر X یک فضای برداری روی میدان F باشد، یک نیم‌ضرب داخلی روی X یک تابع مانند $U : X \times X \to F$ است به طوری که برای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $x, y, z \in X$ شرایط زیر صدق کند.

۱) $U(\alpha x+\beta y,z)=\alpha U(x,z)+\beta U(y,z)$،

۲) $U(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}U(x,y)+\overline{\beta}U(x,z)$،

۳) $U(x,x)\geq 0$،

۴) $U(x,y)=U(y,x)$.

حال اگر تعریف بالا در شرط $U(x,x)=0$ اگر و تنها اگر $x=0$ باشد صدق کند، آنگاه به تابع U ضرب داخلی گفته می‌شود.

قضیه ۲.۱.۱ اگر $<.,.>$ یک نیم ضرب داخلی روی X و برای هر $x\in X$، $\|x\|=\sqrt{<x,x>}$ باشد، آنگاه برای هر $x,y\in X$ روابط زیر برقرارند:

۱) (**نامساوی کوشی ـ شوارتز**[1]) $|<x,y>|\leq\|x\|\,\|y\|$،

۲) (نامساوی مثلثی) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

تعریف ۳.۱.۱ یک فضای برداری H روی F همراه با یک ضرب داخلی یک **فضای هیلبرت**[2] است هرگاه تحت متر تولید شده توسط ضرب داخلی، یعنی

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}\ ,$$

کامل باشد. کامل بودن به این معنی است که هر دنباله کوشی در آن فضا همگراست.

تعریف ۴.۱.۱ فضای نرم دار X را یک **فضای باناخ**[3] گوئیم، هرگاه نسبت به متر تولید شده توسط نرم یک فضای کامل باشد.

---

[1] Cauchy-Schwarz inequality

[2] Hilbert space

[3] Banach space

تعریف ۵.۱.۱ **محمل** تابع f که با $supp(f)$ نمایش می‌دهیم بستار مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ در $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱ X را **تفکیک پذیر** گوییم، هرگاه شامل زیر مجموعه شمارش پذیر چگال باشد.

قضیه ۷.۱.۱ فضای هیلبرت H دارای پایه متعامد یکه شمارا است اگر وتنها اگر H تفکیک‌پذیر باشد.

تعریف ۸.۱.۱ $span(x_n)$ در H، مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی متناهی x_n ها می‌باشد به‌این معنی که،

$$span(x_n) = \{\sum_{n=-N}^{N} c_n x_n; N > 0 \quad , c_n \in C\}.$$

تعریف ۹.۱.۱ **دلتای کرونکر** که با نماد $\delta_{i,j}$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

است.

تعریف ۱۰.۱.۱ دنباله $\{x_n\}$ در H **کامل** است، هرگاه $span(x_n)$ در H چگال باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $x, y \in H$، آنگاه بردارهای x, y را متعامد گوئیم، هرگاه $< x, y >= 0$ در این صورت می نویسیم $x \perp y$. اگر $A, B \subset H$ باشد، آنگاه $A \perp B$ اگر به ازای هر $x \in A$ و $y \in B$، $x \perp y$ باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱ (فیثاغورث) اگر $f_1, f_2, ..., f_n$ بردارهای دو به دو متعامد در فضای هیلبرت H باشند، آنگاه

$$||f_1 + f_2 + ... + f_n||^2 = ||f_1||^2 + ||f_2||^2 + ... + ||f_n||^2.$$

قضیه ۱۳.۱.۱ (قانون متوازی الاضلاع) اگر H یک فضای هیلبرت و $x, y \in H$ باشد، آنگاه

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

قضیه ۱۴.۱.۱ اگر M یک زیر فضای خطی از فضای هیلبرت H و $h \in H$ باشد و فرض کنیم Ph یک نقطه یکتا در M طوری در نظر گرفته شده باشد که $h - Ph \perp M$، آنگاه

۱) P یک تابعک خطی روی H است،

۲) به ازای هر $h \in H$، $\| Ph \| \leq \| h \|$،

۳) $P^2 = P$،

۴) $KerP = M^{\perp}$ و $ranP = M$.

تعریف ۱۵.۱.۱ اگر M یک زیر فضای خطی از H و P نگاشت خطی باشد به طوری که در شرایط قضیه بالا صدق کند، آنگاه به P یک تصویر متعامد از H به توی M گفته می‌شود.

قضیه ۱۶.۱.۱ فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند:

۱) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای H است.

۲) برای هر $x \in H$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$.

۳) برای هر $x \in H$، $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (**اتحاد پارسوال** [۴]).

۴) $\overline{span}(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}) = H$.

۵) اگر برای هر $x \in H$ و برای هر i، $\langle x, e_i \rangle = 0$ باشد، آنگاه $x = 0$.

قضیه ۱۷.۱.۱ برای هر تبدیل خطی $T : X \longrightarrow Y$ شرایط زیر معادلند:

۱) T در صفر پیوسته است،

۲) T پیوسته است،

۳) T کراندار است.

تعریف ۱۸.۱.۱ اگر H, K دو فضای هیلبرت باشند و $T : H \longrightarrow K$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه نرم T را با $||T||$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم:

$$||T|| = \sup\{||Tx|| : x \in H \ , \ ||x|| \leq 1\}.$$

اگر $||T|| < \infty$، آنگاه گوئیم T کران‌دار است.

مجموعه همه تبدیلات خطی و کران‌دار از H به K را با نماد $B(H, K)$ نمایش می‌دهیم واگر فضای H و K با هم برابر باشند،

$$B(H, K) = B(H, H) = B(H).$$

---

[۴] Parsval's identity

قضیه ۱۹.۱.۱ (قضیه نمایش ریس[۵]) اگر f یک تابعک خطی و کران‌دار روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه $y \in H$ یکتا وجود دارد به طوری که برای هر $x \in H$،

$$f(x) =< x, y >$$

بعلاوه، $||f|| = ||y||$.

به عبارت دیگر قضیه فوق به هر تابعک خطی و کران‌دار روی H یک عضو منحصربه‌فرد H را نسبت می‌دهد.

تعریف ۲۰.۱.۱ اگر H و K دو فضای هیلبرت باشد یک یکریختی بین H و K یک تابع خطی و پوشا $U : H \to K$ است به طوری که به ازای هر $h, g \in H$،

$$< Uh, Ug >=< h, g > .$$

قضیه ۲۱.۱.۱ اگر $T \in B(X, Y)$ باشد، آنگاه عملگر الحاقی T را با T^* نمایش می‌دهیم، به طوری که $T^* \in B(Y, X)$ و برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ در رابطه $< Tx, y >=< x, T^*y >$ صدق می‌کند. حال اگر $T \in B(X)$، آنگاه

$$\| T \|=\| T^* \|=\| TT^* \|^{\frac{1}{2}} .$$

قضیه ۲۲.۱.۱ اگر $T_n \in B(X, Y)$ و $\{T_n\}_{n \in N}$ به سمت T میل کند، آنگاه $T \in B(X, Y)$.

[۵] Riesz representation theorem

قضیه ۲۳.۱.۱ اگر $S,T \in B(H)$ و $\alpha \in C$، آنگاه

۱) $(\alpha T + S)^* = \overline{\alpha} T^* + S^*$ ،

۲) $(TS)^* = S^* T^*$،

۳) $T^{**} = (T^*)^* = T$،

۴) اگر T معکوس‌پذیر و معکوسش T^{-1} باشد، آنگاه T^* نیز معکوس‌پذیر و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ است.

تعریف ۲۴.۱.۱ عملگر خطی و دوسویی $A : H \to K$، عملگر یکانی است، هرگاه به ازای هر $x, y \in H$،

$$< Ax, Ay >=< x, y > .$$

قضیه ۲۵.۱.۱ اگر H یک فضای هیلبرت و $f \in H$ باشد، آنگاه

$$||f|| = \sup\{|\langle f, g\rangle| : g \in H, \quad \| g \|= 1\}.$$

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد و S,T عملگرهایی خطی روی H باشند. دراین‌صورت،

۱) عملگر S **مثبت** است، هرگاه برای هر $x \in H$، $\langle Sx, x\rangle \geq 0$.

۲) گوییم $S \geq T$، اگر $S - T \geq 0$.