بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

پایداری معادلات تابعی حاصل از توابع جمعی و درجه دوم در فضاهای شبه باناخ

مریم باجلانی

مرکز آموزشهای نیمه‌حضوری
گروه ریاضی

پایان نامه‌جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر سعید استادباشی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدرم

که اسوه صبر است

و

مادرم

که مظهر مهر

و

همسرم

همدم و همقدم همیشگی ام

تقدیر و تشکر

پروردگارا:

سپاس گویمت به خاطر هر آنچه سر راهم گذاشتی برای کسب دانستنی هایی که بود و نمی دانستم .

جبر نبود که بیاموزم اما تو در دلم گذاشتی تا بیاموزم.هندسه را برای درک بهتر دنیایی که آفریدی ،حساب را برای نگه داشتن آن در قبال عبدت و کارایی آن در لحظه لحظه ی زندگیم.

سپاسگذار اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر سعید استاد باشی و دکتر علی عبادیان برای راهناماییهای بی دریغ شان می باشم.

سپاس پدر و مادرم را،عزیزترین عزیزانم که دعای خیرشان نثار راهم و وجود مهربانشان روشنایی حیاتم میباشد.

وتقدیر ازپشتیبان و تکیه گاهم ،همراه زندگیم ، همسرم ، برای صبوریش که صبر او دلگرمی و آرامشم شد تا تحمل سختی ها بر من آسان گردد .

قدردان خواهران و برادران مهربانم می باشم که بودنشان بهانه امیدبخش راهم بودند.

و در پایان بر خود لازم میدانم از دوست ارجمندم جناب آقای دکتر حمید خدایی که مرا در انجام این رساله یاری نمودند تشکر نمایم و برای ایشان از خداوند متعال توفیق و بهورزی را خواستارم .

Urmia University Part Time Education Center

دانشگاه ارومیه

مرکز آموزشهای نیمه حضوری

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه مریم باجلانی به تاریخ ۸۹/۲/۱۵ شماره ۳۲۵-۳ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ قرار گرفت.

هیجده

1 – استاد راهنما و رئیس هیئت داوران :

2 – استاد مشاور :

3 – داور خارجی :

4 – داور داخلی :

5 – نماینده تحصیلات تکمیلی :

فهرست مندرجات

۱.۰ چکیده ۱

۲.۰ پیشگفتار ۲

۱ تعاریف و قضایای بنیادی ۷

۱.۱ تعاریف ۷

۲.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی پایداری معادلات تابعی ۱۰

۲ حل عمومی یک معادله تابعی درجه دوم ۲۴

۱.۲ مقدمه ۲۴

۲.۲ حل عمومی معادله تابعی درجه دوم (۱.۳) ۲۵

۳ پایداری یک معادله تابعی درجه دوم ۳۷

۱.۳ مقدمه ۳۷

۲.۳ پایداری معادله تابعی درجه دوم (۱.۳) ۳۷

۴ پایداری یک معادله تابعی درجه چهارم ۷۳

۱.۴ مقدمه ۷۳

۲.۴ پایداری معادله تابعی درجه چهارم (۱.۴) ۷۳

مراجع ۸۶

واژه نامه ۹۱

چکیده‌ی انگلیسی ۹۵

۱.۰ چکیده

در این مقاله نخست حل عمومی برای معاد له تا بعی :

$$f(2x+y)+f(2x-y)=f(x+y)+f(x-y)+2f(2x)-2f(y)$$

ارائه مید هیم.همچنین به پایداری هایرز–اولام – راسیاس و اولام – گاوارتا – راسیاس این معادله در فضای شبه باناخ می پردازیم. سپس پایداری هایرز – اولام معادله درجه چهارم

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4f(x+y)+4f(x-y)+24f(x)-6f(y)$$

بررسی می شود. این پایان نامه بر اساس مقالات

[A.Najati,B.Moghimi,Stability of a functional equation deriving from quadratic and additive functions in quasi-Banach spaces]

و

[$A.NagatiOnthestabilityofaquarticfunctionalequation$]

تنظیم گردیده‌است.

واژه های کلیدی : پایداری هایرز – اولام – راسیاس ، تابع درجه دوم ، تابع درجه چهارم ، تابع جمعی ، فضای شبه باناخ – فضای p– باناخ

۲.۰ پیشگفتار

مسئله پایداری تابعی اولین بار در سال ۱۹۴۰ توسط اس.ام.اولام[۲۵] با طرح سوالی به صورت زیر مطرح شد:

فرض کنیم $(G_1, *)$ یک گروه و $(G_2, \diamond, d)$ یک گروه متری با متر $d(.,.)$ باشد و ε داده شده باشد آیا $\delta(\varepsilon) > 0$ موجود است بطوری که اگر نگاشت $h : G_1 \longrightarrow G_2$ به ازای هر $x, y \in G_1$ در رابطه

$$d(h(x * y), h(x) \diamond h(y)) < \delta$$

صدق کند آنگاه همریختی $H : G_1 \longrightarrow G_2$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in G_1$،

$$d(h(x), H(y)) < \epsilon$$

اگر پاسخ مثبت باشد در این صورت می گوییم همریختی $H(x * y) = H(x) \diamond H(y)$ پایدار است. به عبارت دیگر در این مسئله شرایط لازم برای اینکه یک همریختی نزدیک به همریختی تقریبی وجود داشته باشد موجود است.

در سال ۱۹۴۰، اولام[۲۵] اولین بار مسئله‌ی پایداری معادلات تابعی را به صورت زیر مطرح کرد:

« تحت چه شرایطی می توان یک تابع تقریباً جمعی را به یک تابع جمعی نزدیک کرد »

یک سال بعد مسئله اولام توسط هایرز [۲۶] برای فضاهای باناخ بصورت زیر حل شد:

اگر X و Y فضاهای باناخ و $\epsilon, \delta > 0$ و تابع $f : X \to Y$ در نامعادله

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

به ازای هر $x,y \in X$ صدق کند، آنگاه حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ به‌ازای هر $x \in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر بفرد است بطوریکه به ازای هر $x \in X$

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \epsilon$$

در سال ۱۹۵۰، آکوی [۲۷] قضیه هایرز را برای توابع تقریباً جمعی تعمیم داد و در سال ۱۹۷۸، تمیکلیس. راسیاس [۱۶] قضیه هایرز را بصورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع از فضای نرمدار X به فضای باناخ Y باشد بطوریکه در

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

به ازای هر $x,y \in X$ صدق کند. همچنین ϵ و p ثابت هایی هستند که $\epsilon > 0$ و $0 \leq p < 1$، آنگاه حد $A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ به ازای هر $x \in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصر بفرد می باشد که در

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\epsilon\|x\|^p$$

به ازای هر $x \in X$ صدق می کند و در آن $k = \frac{2}{2-2^p}$. این مفهوم جدید به پایداری هایرز– اولام– راسیاس معروف است.

بعلاوه، جان. راسیاس به جای تابع کنترل در پایداری ها یرز– اولام– راسیاس یعنی $\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$، تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p\|y\|^p)$ را جایگزین نمود که به پایداری اولام– گاورتا– راسیاس معروف شد.

گاورتا[۱] [۲۸] این نتا یج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل در قضیه کلی ها یرز– اولام– راسیاس تابع

[۱] Gavruta

کنترل $\phi(x,y)$ را جایگزین کرد.

معادله تابعی

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \tag{1.1}$$

به یک تابع دو–جمعی متقارن ارتباط داده‌می شود[۱, ۱۲]. هر معادله به این شکل را معادله تابعی درجه دوم می نامیم. بویژه به هر حل از معادله درجه دوم (۱.۱)، یک تابع درجه دوم گفته می شود. تابع f بین فضاهای برداری حقیقی، درجه دوم است اگر وفقط اگر یک تابع دو–جمعی متقارن و منحصر بفرد B وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(x)=B(x,x)$ (برای جزئیات بیشتر [۱, ۱۲] راببینید) .

تابع دو–جمعی B با ضابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$B(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+y)-f(x-y)] \tag{1.2}$$

مسئله‌ی پایداری هایرز– اولام برای معادله تابعی درجه‌دوم (۱.۱) توسط اسکوف[۲] [۲۰] برای توابع $f: X \longrightarrow Y$، که X فضای نرمدار و Y فضای باناخ می باشد به اثبات رسید .

چولوا[۳] [۴] نشان داد که قضیه اسکوف، زمانی که X یک گروه آبلی باشد نیز برقرار است .

در مقاله [۵]، چرویک[۴] پایداری هایرز– اولام– راسیاس معادله تابعی درجه دوم (۱.۱) را اثبات کرد.

بعلاوه گرابیس [۵] [۷] نتایج ذکر شده در بالا را تعمیم داد .

جان[۶] و لی[۷] [۱۱] حل عمومی و پایداری هایرز– اولام– راسیاس معادله تابعی (۱.۱) را بیان کردند. در

[۲] Skof
[۳] Cholewa
[۴] Czerwik
[۵] Grabiec
[۶] Jun
[۷] Lee

این مقاله ما با معادله تابعی حاصل از توابع جمعی ودرجه دوم زیر سرو کار خواهیم داشت:

$$f(2x+y)+f(2x-y)=f(x+y)+f(x-y)+2f(2x)-2f(x) \qquad (1.3)$$

بوضوح تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در معادله تابعی (۱.۳) صدق میکند. هدف اصلی ما در این مقاله برقرار کردن راه حل کلی از معادله (۱.۳) ورسیدگی به پایداری هایرز – اولام – راسیاس برای معادله (۱.۳) می باشد.

تابع $f(x)=x^4$ در معادله تابعی

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4f(x+y)+4f(x-y)+24f(x)-6f(y) \qquad (4.1)$$

صدق می کند. معادله (۴.۱) معادله تابعی درجه چهارم نامیده می شود و به هر حل از معادله درجه چهارم (۴.۱)، یک تابع درجه چهارم گوییم. معادله تابعی درجه چهارم (۴.۱) توسط لی[8]، ایم[9] و هانگ[10] حل شد .

سازماندهی این پایان نامه بصورت زیر است:

فصل اول، نخست تعاریف لازم بیان می شود و سپس مفاهیم و قضایای اولیه پایداری معادلات تابعی که در فصول بعدی نقش بسزایی دارند، مورد بررسی قرار می گیرند.

فصل دوم، حل عمومی برای معادله‌های تابعی درجه دوم

$$f(2x+y)+f(2x-y)=f(x+y)+f(x-y)+2f(2x)-2f(y)$$

ارائه می شود.فصل سوم،پایداری های هایرز– اولام– راسیاس و اولام – گاورتا – راسیاس این معادله را بررسی می نماییم.

---

[8] Lee

[9] Im

[10] Hwang

فصل چهارم ،پایداری هایرز – اولام معادله درجه چهارم

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۴f(x+y)+۴f(x-y)+۲۴f(x)-۶f(y)$$

بررسی می شود.

فصل ۱

تعاریف و قضایای بنیادی

این فصل حاوی تعاریف و مفاهیم مقدماتی می باشد که در فصول بعد مورد نیاز است.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱ یک فضای متری[۱] مجموعه‌ای است مانند X که در آن یک تابع فاصله (یا متر) مانند ρ با خواص زیر تعریف شده است:

۱) به ازای هر x و y در X، $0 \leq \rho(x,y) < \infty$؛

۲) $\rho(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

۳) به ازای هر x و y در X، $\rho(x,y) = \rho(y,x)$؛

۴) به ازای هر x و y و z در X، $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

[۱] Metric space

تعریف ۲.۱.۱ دنبالهٔ $\{p_n\}$ در فضای متری (X,d) را یک دنبالهٔ کشی [۲] نامند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N باشد بطوریکه اگر $n \geq N$ و $m \geq N$، $d(p_n, p_m) < \varepsilon$.

تعریف ۳.۱.۱ یک فضای متری که در آن هر دنبالهٔ کشی همگرا باشد تام [۳] نام دارد

تعریف ۴.۱.۱ فضای برداری X روی میدان اسکالر F را فضای نرمدار گوییم، هرگاه تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\lambda \in F$، داشته باشیم:

۱) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۳) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

دراینصورت زوج $(X, \|.\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم. با قرار دادن $d(x,y) = \|x-y\|$ فضای نرمدار X به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ هر فضای نرمدار را که نسبت به متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد، فضای باناخ گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. یک شبه نرم [۴] یک تابع بصورت $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$؛

۳) عدد ثابت $M \geq 1$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq M(\|x\| + \|y\|)$.

زوج $(X, \|.\|)$ را فضای شبه نرمدار می‌نامیم، اگر $\|.\|$ یک شبه نرم روی X باشد.

[۲] Cauchy sequence
[۳] Complete
[۴] Quasi-norm

تذکر ۷.۱.۱ فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای شبه نرمدار باشد. کوچکترین مقدار M که به ازای هر $n \geq ۱$ و همه مقادیر $x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}, x_{۲n+۱}$ داشته باشیم:

$$\|\sum_{i=۱}^{۲n} x_i\| \leq M^n \sum_{i=۱}^{۲n} \|x_i\|$$

و

$$\|\sum_{i=۱}^{۲n+۱} x_i\| \leq M^{n+۱} \sum_{i=۱}^{۲n+۱} \|x_i\|$$

را ضریب تقعر $\|.\|$ می‌نامیم.

تذکر ۸.۱.۱ فضای شبه نرم تام را فضای شبه باناخ گوییم.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم $p \in (۰, ۱]$، در اینصورت شبه نرم $\|.\|$ را یک $p-$ نرم گوییم هرگاه‌به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

تعریف ۱۰.۱.۱ یک فضای $p-$ باناخ، یک فضای شبه باناخ است، اگر شبه نرم روی آن یک $p-$ نرم نیز باشد.

تذکر ۱۱.۱.۱ هر شبه نرم با یک $p-$ نرم معادل است. از آنجا که کار کردن با $p-$ نرم ها آسان‌تر است، لذا بیشتر از $p-$ نرم‌ها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فضاهای برداری حقیقی X, Y را در نظر می گیریم در این صورت نگاشت $B : X \times X \longrightarrow Y$ را متقارن می گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $B(x, y) = B(y, x)$

همچنین گوییم B دو جمعی است هرگاه نسبت به هر دو مولفه جمعی باشد یعنی به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

$$B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z)$$

و

$$B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z)$$

۲.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی پایداری معادلات تابعی

با ذکر این سوال که « آیا یک معادله تابعی را می توان با یک نامعادله جایگزین کرد یا نه؟» مفهوم پایداری یک معادله تابعی معنا پیدا می کند و سوالی که مطرح می شود در مورد منحصربفردی این نامعادله است. معروفترین معادله تابعی، معادله کشی بصورت

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

می‌باشد و هر حل از آن بصورت $f(x) = ax$ است که درآن a عددی ثابت می‌باشد.

اولین بار روی پایداری معادله تابعی کشی کار شد و بعد از آن مسئله پایداری برای دیگر معادلات تابعی مطرح شد از جمله معادلات تابعی درجه دوم، درجه سوم و درجه چهارم که در این بخش به ذکر چند قضیه و تعریف در مورد پایداری معادلات تابعی‌درجه دوم می پردازیم.

تذکر ۱.۲.۱ دراین بخش X را فضای برداری نرمدار حقیقی و Y را فضای باناخ در نظر می گیریم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم $\epsilon > 0$ و تابع $f : X \to Y$ داده شده باشند در اینصورت:

۱) f، $\epsilon-$ جمعی است به ازای هر $x, y \in X$ ، هرگاه

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

۲) f، $\epsilon-$ درجه دوم است به ازای هر $x, y \in X$ ، هرگاه

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \epsilon$$

۳) f، $\epsilon-$ درجه چهارم است به ازای هر $x, y \in X$ ، هرگاه

$$\|f(2x+y) + f(2x-y) - 4f(x+y) - 4f(x-y) - 24f(x) + 6f(y)\| \leq \epsilon.$$

قضیه ۳.۲.۱ تابع $f : X_1 \to X_2$ بین فضاهای برداری نرمدار حقیقی:

۱) درجه دوم است یعنی در معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

صدق می کند اگر و فقط اگر یک تابع دو-جمعی متقارن و منحصر بفرد $B : X \times X \to Y$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(x) = B(x,x)$؛

۲) درجه‌چهارم است یعنی در معادله تابعی

$$f(2x+y) + f(2x-y) = 4f(x+y) + 4f(x-y) + 24f(x) - 6f(y)$$

صدق می کند اگر و فقط اگر یک تابع دو-درجه دوم متقارن و منحصر بفرد $D : X \times X \to Y$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(x) = D(x,x)$.

برهان : ر.ک.[۱] برای اثبات (۱)، ر.ک.[۲۴] برای اثبات (۲) ■

قضیه ۴.۲.۱ (هایرز– اولام) اگر تابع $f : X \to Y$، ϵ – جمعی باشد. آنگاه تابع جمعی و منحصربفرد $A : X \to Y$ که بصورت

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x) \quad , \quad (x \in X)$$

تعریف می شود وجود دارد بطوریکه به ازای هر $x \in X$

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \epsilon$$

برهان : بنا بر فرض داریم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \quad , \quad (x, y \in X) \tag{۱.۱}$$

اگر در (۱.۱) بجای y مقدار x قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\|f(۲x) - ۲f(x)\| \leq \epsilon \quad , \quad (x \in X) \tag{۱.۲}$$

اگر (۱.۲) را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، داریم

$$\|\frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{۲} \quad , \quad (x \in X) \tag{۱.۳}$$

اکنون در (۱.۳) بجای x مقدار $۲x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم،درنتیجه

$$\|\frac{f(۲^۲ x)}{۲^۲} - \frac{f(۲x)}{۲}\| \leq \frac{\epsilon}{۲^۲} \quad , \quad (x \in X) \tag{۱.۴}$$

با استفاده از (۱.۳) و (۱.۴)، داریم

$$\|\frac{f(۲^۲ x)}{۲^۲} - f(x)\| \leq \epsilon(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}) = \epsilon(۱ - ۲^{-۲}) \quad , \quad (x \in X) \tag{۱.۵}$$

با ادامه روند فوق به استقرابه ازای هر $x \in X$ و $n = ۱, ۲, ...$ خواهیم داشت

$$\|۲^{-n} f(۲^n x) - f(x)\| \leq \epsilon(۱ - ۲^{-n}) \qquad (۱.۶)$$

قرار می‌دهیم $A_n(x) = ۲^{-n} f(۲^n x)$ و ثابت می‌کنیم $\{A_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ به شکل یک دنباله همگرا است. برای این منظوراز محک کشی استفاده می‌کنیم. در معادلهٔ (۱.۶) بجای x مقدار $۲^m x$ قرار می دهیم و نتیجه را بر ۲^m تقسیم می‌کنیم، دراینصورت

$$\|۲^{-(m+n)} f(۲^{m+n} x) - ۲^{-m} f(۲^m x)\| \leq \epsilon(۱ - ۲^{-n})۲^{-m} \quad , \quad (x \in X) \qquad (۱.۷)$$

از آنجا که Y فضای باناخ است، بنابه محک کشی $\lim_{n\to\infty} A_n(x)$ وجود دارد. بنابراین می‌توان تابع $A : X \to Y$ را با ضابطه‌ی $A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$ تعریف نمود.در نتیجه اگر در (۱.۶) $n \to \infty$ آن گاه خواهیم داشت:

$$\|A(x) - f(x)\| \leq \epsilon \quad , \quad (x \in X)$$

حال نشان می‌دهیم A، جمعی است.برای این منظور در (۱.۱) بجای x و y به ترتیب مقادیر $۲^n x$ و $۲^n y$ قرار می‌دهیم و حاصل را بر ۲^n تقسیم می‌کنیم،در نتیجه :

$$\|۲^{-n} f(۲^n (x + y)) - ۲^{-n} f(۲^n x) - ۲^{-n} f(۲^n y)\| \leq ۲^{-n}\epsilon$$

به ازای هر $x, y \in X$ و$n \in \mathbb{N}$ اگر در معادله اخیر، $n \to \infty$ دراینصورت

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad , \quad (x, y \in X)$$