دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

نا مساوی های L^p برای چند جمله ای ها

نگارنده

ملیحه صادقی

استاد راهنما

دکتر محمود بید خام

استاد مشاور

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

مهر ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیر و سپاس :

خداوندا تو را سپاس که دگر بار مهربانی بی پایانت را بر من ارزانی داشتی تا از بیکرانه رحمتت جرعه بنوشم.

لذت بخش ترین لحظات زندگی ام را با خاطراتی به هم پیوند داده‌است که یاد آوریشان مرا همیشه قدردان عزیزانی می‌کند که این لحظات را برایم آفریده اند.

و اکنون در پایان این طرح بر خود فرض می‌دانم که از عزیزانی که مرا در به اتمام رساندن آن یاری رساندند تشکر کنم.

افتخار دارم که به ثمر رسیدن این پروژه را قدردان و سپاسگذار راهنمایی های ارزشمند استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمود بید خام و آقای دکتر فریدون حبیبیان وآقای دکتر سلیمان باشم که از چشمه دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشتم. از زحمات خانواده عزیزم که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آنها می‌دانم سپاسگذارم. از دوستان عزیزم سپاسگذارم که خاطره با هم بودن را برای همیشه در ذهنم باقی گذاشتند و سایر کسانی که مرا مرهون لطف و محبت خویش قرار دادند.

« ملیحه صادقی »

چکیده

بنابراصل ماکزیمم قدر مطلق اگر $P(z)$، تابع تحلیلی، غیر ثابت و در میدان کراندارD پیوسته و بر بستار آن نیز پیوسته باشد، $|P(z)|$ ماکزیممی در D ندارد مگر اینکه تابع ثابت باشد.

امابااصل ماکزیمم قدر مطلق، تعیین مقدار ماکزیمم قدر مطلق توابع تحلیلی امکان پذیر نبوده و ناگزیریم به تقریب این مقادیر اکتفا کنیم.

فرض کنیم $P(z)$، یک چند جمله ای از درجه n باشد و $\|P\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$. همچنین در این پایان نامه، ارتباط بین $\|P(Rz)-P(z)\|_p$ و $\|P(z)\|_p$، را با توجه به محل قرار گرفتن ریشه های $P(z)$ در صفحه و چند جمله ای های خود معکوس و تعمیم بعضی نامساوی های مشهور را بررسی می کنیم.

[1] A. Aziz and N. A. Rather, New integral mean estimates for polynomials, Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **109**, (1999), 65-74.

[2] N. A. Rather and M. I. Mir, Integral inequalities for polynomials, International Journal of, Pure and Applied Mathematics, **34**, (2007), 53-60.

[3] A. Aziz and W. M. Shah, Some integral mean estimates for polynomials, Analysis in Theory and Applications, **23**, (2007), 101-111.

[4] N. A. Rather, Some integral inequalities for polynomials, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **33**, (2009), 341-348.

[5] W. M. shah, Integral mean estimates for polynomials with restricted zeros, Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences, **27(2)**, (2011), 165-181.

[6] A. Aziz and N. A. Rather, L^p Inequalities for polynomials, Applied Mathematics, **2**, (2011), 321-328.

مقدمه

مطالب این پایان نامه درسه فصل گرد آوری شده است. در فصل اول پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی که شامل نماد ها، تعاریف، قضایای پایه، نامساوی های کلاسیک و لم هاست را بررسی می کنیم. در فصل دوم با استفاده از نامساوی های L^p وابستگی $\|P(Rz) - P(z)\|_p$ و $\|P(z)\|_p$ را مورد بررسی قرار می دهیم که در آن $P(z)$ یک چند جمله ای ازدرجه n در نظر گرفته شده است. سپس با اعمال شرط بر روی ریشه های $P(z)$ و چند جمله‌ای های خود معکوس، موضوع فوق را مورد بررسی قرارمی دهیم. همچنین نشان خواهیم داد که این نتایج تعمیمی از نامساوی های فصل اول از جمله نامساوی زیگموند می باشند. در فصل سوم با نامساوی های L^p برای چند جمله‌ای هایی که در ناحیه $|z| < k$، ($k \geq ۱$) ریشه ندارند و تعمیم این نامساوی ها را بیان می کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیاز ها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

دراین فصل ابتدا نمادها، تعریف، قضایا و لم های مورد نیاز در فصل های بعدی را بیان نموده و از اثبات آن دسته از قضایایی که در کتب مربوط به آنالیز مختلط اثبات شده است، صرف نظر می کنیم.

۲.۱ نماد ها و تعاریف

همانند اکثر متون ریاضی، در اینجا از علائم زیر استفاده کرده ایم:

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی؛

$\mathbb{C}$: مجموعه اعدا مختلط؛

$\mathbb{R}^n$: مجموعه n تایی مرتب از اعداد حقیقی .

مجموعه P_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_n = \{\sum_{v=0}^{n} a_v z^v : \quad a_v \in \mathbb{C}, \qquad a_n \neq 0\}$$

مجموعه ی دیگری که از آن استفاده می‌کنیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{n,M} = \{a_۰ + \sum_{v=M}^{n} a_v z^v : \qquad ۱ \leq M \leq n-۱, \quad a_n \neq ۰\}$$

تعریف ۱.۲.۱ هر مجموعه همبند و باز را میدان گوییم و میدان را معمولاً با D نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱ یک ناحیه، میدانی همراه با بعضی، هیچ یک و یا همگی نقاط مرزی اش می باشد.

تعریف ۳.۲.۱ مجموعه X در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱, x_۲ \in X$ و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته باشیم:

$$tx_۱ + (۱-t)x_۲ \in X$$

تعریف ۴.۲.۱ تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدب گفته می‌شود اگر به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}^n$ و هر $t \in (۰, ۱)$ نا مساوی زیر برقرار باشد:

$$f(tx_۱ + (۱-t)x_۲) \leq tf(x_۱) + (۱-t)f(x_۲)$$

در واقع تابع f محدب است هرگاه نمودار تابع زیر خط واصل بین دونقطه $(x_۱, f(x_۱))$ و $(x_۲, f(x_۲))$ قرار بگیرد.

تعریف ۵.۲.۱ تابع f را در نقطه $z_۰$ تحلیلی گوییم هر گاه f در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۶.۲.۱ اگر $0 < q < \infty$ و $P \in P_n$، تعریف می کنیم:

$$\|P\|_q = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^q d\theta\Big)^{\frac{1}{q}}$$

بعلاوه

$$\|P\|_0 = \exp(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|d\theta)$$

و

$$\|P\|_\infty = \max_{|z|=1}|P(z)|$$

تعریف ۷.۲.۱ برای $\delta = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ و $P \in P_n$ تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_\delta P(z) = \sum_{j=0}^{n}\delta_j a_j z^j$$

هر گاه عملگر Λ_δ یکی از خواص زیر راحفظ کند، قابل قبول است.

الف) همه صفر های $P(z)$ در داخل مجموعه $\{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leq 1\}$ باشند.

ب) همه صفر های $P(z)$ در داخل مجموعه $\{z \in \mathbb{C}:\ |z| \geq 1\}$ باشند.

تعریف ۸.۲.۱ چند جمله ای $P \in P_n$ را خود معکوس گویند اگر $P(z) = Q(z)$ که $Q(z) = z^n\overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$.

۳.۱ فضا یای پایه و نامساوی های کلاسیک

قضیه ۱.۳.۱ قضیه (اساسی جبر): اگر $P \in P_n$ آنگاه $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ موجودند به طوریکه:

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \tag{1}$$

که در آن z_i ها لزوماً متمایز نیستند.

قضیه ۲.۳.۱ قضیه (اصل ماکزیمم قدر مطلق): اگر $f(z)$ در میدان D تحلیلی باشد آنگاه $|f(z)|$ در D نمی‌تواند ماکزیممی اختیار کند مگر اینکه تابع ثابت باشد.

قضیه ۳.۳.۱ قضیه (روشه[1]): فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشند و بر C، $|g(z)| < |f(z)|$ در این صورت $f(z) + g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفر های برابری دارند.

قضیه ۴.۳.۱ قضیه (مینکوفسکی [2]): فرض کنیم $1 \le p \le \infty$ در این صورت اگر $f, g \in L_p(\mu)$،

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \tag{2}$$

برای برهان مرجع[۲۱] را ببینید.

قضیه ۵.۳.۱ قضیه (هاردی[3]): اگر g یک تابع تام باشد،

$$f(t) = \{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(te^{i\theta})|^r d\theta\}^{\frac{1}{r}}; \qquad r > 0$$

[1] Rouche
[2] Minkowski
[3] Hardy

یک تابع غیر نزولی از $(t > 0)$ می‌باشد. برای برهان مرجع [۱۸] را ببینید.

حال نا مساوی های کلاسیک را که برای $P \in P_n$ برقرارند می آوریم:

قضیه ۶.۳.۱ اگر $P \in P_n$ و $0 < r < R$،

$$r^n \|P(Rz)\|_p \leq R^n \|P(rz)\|_p; \quad p > 0, \quad |z| = 1 \tag{۳}$$

این بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $P(z) = az^n; \quad a \neq 0$ برقرار می‌باشد.

برهان: برای $r > 0$، فرض کنیم $f(z) = P(rz)$ آنگاه $f(z)$ یک چند جمله ای از درجه n است و بنابراین

$$g(z) = z^n \overline{f(\frac{1}{\overline{z}})} = z^n \overline{P(\frac{r}{\overline{z}})}$$

که تابعی تام است با استفاده از قضیه (۵.۳.۱)،

$$f(\rho) = \{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}}, \qquad \rho > 0$$

یک تابع غیر نزولی از $(\rho > 0)$. حال اگر $(\rho \leq 1)$،

$$\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}} \leq \{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}}$$

حال قرار می‌دهیم $\rho = \frac{r}{R} < 1$ و جایگزین کنیم $g(z)$ را با $z^n \overline{P(\frac{r}{\overline{z}})}$، نتیجه بدست خواهد آمد. □

نتیجه ۷.۳.۱ اگر $P \in P_n$ و $0 < r < 1$،

$$\|P(rz)\|_p \geq r^n \|P(z)\|_p; \qquad p > 0$$

قضیه ۸.۳.۱ اگر $P \in P_n$ باشد،

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)| \tag{۴}$$

و

$$\|P(Rz)\|_\infty \leq R^n \|P(z)\|_\infty \tag{۵}$$

که نامساوی (۴) نتیجه مشهور برنشتاین است و برهان نامساوی های (۴) و (۵) در مراجع [۲۸] و [۲۳] است.

نامساوی (۵) به تساوی تبدیل می‌شود برای $P(z) = z^n$ و این بهترین نتیجه ممکن است.

نامساوی های (۴) و (۵) هنگامی که $p \to \infty$ از نامساوی های زیر بدست می آیند.

قضیه ۹.۳.۱ اگر $P \in P_n$ باشد،

$$\|P'\|_p \leq n \|P\|_p; \qquad p \geq 1 \tag{۶}$$

و

$$\|P(Rz)\|_p \leq R^n \|P\|_p; \qquad R > 1, \quad p > 0 \tag{۷}$$

تذکر ۱۰.۳.۱ نامساوی (۶) هنگامی که $p \to \infty$ به نتیجه مشهور برنشتاین تبدیل می‌شود.

برای برهان نا مساوی های (۶) و(۷) مراجع [۳۰] و [۱۸] را ببینید.

قضیه ۱۱.۳.۱ اگر $P(z)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد و $q \geq 1$،

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P'(e^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}} \leq n \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{۸}$$

و

$$\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(Re^{i\theta})|^q d\theta\}^{\frac{1}{q}} \leq R^n\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^q d\theta\}^{\frac{1}{q}}; \quad R>1, \quad q>0 \qquad (9)$$

که رابطه (۸) به نامساوی زیگموند [1] [۳۰] منسوب می‌باشد.

برای برهان نامساوی (۹) مرجع [۱۸] را ببینید.

نامساوی های (۸) و (۹) هنگامی که $q \to \infty$ به نامساوی های (۴) و (۵) تبدیل می‌شوند.

قضیه ۱۲.۳.۱ اگر $P \in P_n$ و همه صفر های $P(z)$ در $|z| \leq 1$ آنگاه برای هر δ با $|\delta| \leq 1$، $r<1$ و $p>0$،

$$\|P(rz)+\delta(\frac{1-r^n}{2})z^n m(P,1)\|_p \leq \frac{\|1+r^n z^n\|_p}{\|1+z^n\|_p}\|P(z)\|_p$$

رابطه فوق بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $P(z)=az^n+b\,;|a|=|b|$ برقرار می‌باشد

برای برهان مرجع [۲۵] راببینید.

قضیه ۱۳.۳.۱ اگر $P \in P_{n,1}$ و $P(z) \neq 0$ در $|z|>k$، $(k \leq)$ و s ریشه در مبداء آنگاه برای هر $q>0$،

$$\|P'\|_q \geq \frac{n+ks}{1+k}\|P\|_q \qquad (10)$$

برهان: چون $P(z)$ یک چند جمله ای از درجه n است که همه صفر های آن در $|z|<k$، $(k \leq 1)$ با s ریشه در مبداء،

$$P(z)=z^s h(z)$$

[1] A. Zygmund

که $h(z)$ چند جمله ای از درجه $(n-s)$ که همه صفر های آن در $1 \leq k \leq |z|$ قرار دارند، بنابراین:

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = s + \frac{zh'(z)}{h(z)} \tag{11}$$

اگر $z_1, \cdots, z_{n-s}$ ریشه های $h(z)$ باشند که $1 \leq k \leq |z_j|$ از رابطه (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} Re\Big(\frac{e^{i\theta}P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}\Big) &= s + Re\Big(\frac{e^{i\theta}h'(e^{i\theta})}{h(e^{i\theta})}\Big) \\ &= s + Re\sum_{j=1}^{n-s}\Big(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_j}\Big) \\ &= s + \sum_{j=1}^{n-s} Re\Big(\frac{1}{1-z_je^{-i\theta}}\Big) \qquad (12) \end{aligned}$$

برای نقطه $e^{i\theta}$ که از ریشه های $h(z)$ نیست.

حال اگر $1 \leq k \leq |w|$، آنگاه:

$$|1-w| > Re(1-w) \to Re\Big(\frac{1}{1-w}\Big) > \frac{1}{|1-w|} \geq \frac{1}{1+|w|} \geq \frac{1}{1+k}$$

بنابراین با به کار بردن نامساوی فوق در رابطه (۱۲)،

$$\begin{aligned} \Big|\frac{e^{i\theta}P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}\Big| &= \Big|\frac{P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}\Big| \\ &\geq Re\Big(\frac{e^{i\theta}P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}\Big) \\ &= s + \sum_{j=1}^{n-s} Re\Big(\frac{1}{1-z_je^{-i\theta}}\Big) \\ &\geq s + \frac{n-s}{1+k} \end{aligned}$$

برای نقطه $e^{i\theta}$ که از صفرهای $P(z)$ نیست.

پس :

$$|P'(e^{i\theta})| \geq \frac{n+sk}{1+k}|P(e^{i\theta})|$$

بنابراین:

$$|P'(z)| \geq \frac{n+sk}{1+k}|P(z)|; \qquad |z| = 1$$

درنتیجه:

$$\|P'\|_q \geq \frac{n+sk}{۱+k}\|P\|_q; \qquad q > ۰$$

و برهان قضیه کامل است.

□

در نامساوی (۱۰) اگر $q \to \infty$ نتیجه زیرراداریم:

نتیجه ۱۴.۳.۱ اگر $P \in P_{n,۱}$ و $P(z) \neq ۰$ برای $|z| > k$، $(k \leq ۱)$ و s ریشه در مبدا،

$$\|P'\|_\infty \geq \frac{n+ks}{۱+k}\|P\|_\infty$$

این نامساوی با $P(z) = z^s(z+k)^{n-s}$ به تساوی تبدیل می‌شود.

تذکر ۱۵.۳.۱ برای $s = ۰$ این نتیجه به قضیه مالک [۱] [۲۰] تبدیل می‌شود.

۴.۱ لم ها

لم ۱.۴.۱ فرض کنیم $\varphi(x) = \psi(logx)$ به طوریکه ψ یک تابع محدب غیر نزولی بر R باشد آنگاه برای هر $P \in P_n$ و هر عملگر قابل قبول Λ_δ خواهیم داشت:

$$\int_۰^{۲\pi} \varphi(|\Lambda_\delta P(e^{i\theta})|)d\theta \leq \int_۰^{۲\pi} \varphi(C(\delta,n))|P(e^{i\theta})|d\theta \qquad (۱۳)$$

$$C(\delta,n) = max\{|\delta_۰|, |\delta_n|\}$$

برای برهان مرجع [۳] راببینید.

لم ۲.۴.۱ فرض کنیم همه صفر های چند جمله ای $P \in P_n$ در ناحیه $|z| \leq ۱$ باشند در این صورت برای $R > ۱$،

$$|P(Rz)| > |P(z)|; \qquad |z| = ۱ \qquad (۱۴)$$

[۱] M. A. Malik

برای برهان مرجع [٦] راببینید.

لم ۳.۴.۱ اگر C و B و A اعداد غیر منفی حقیقی باشند به طوری که $B+C \leq A$ آنگاه برای هر عدد حقیقی α،

$$|(A-C)e^{i\alpha}+(B+C)| \leq |Ae^{i\alpha}+B|$$

برای برهان مرجع [۴] راببینید.

لم ۴.۴.۱ اگر $P \in P_n$ و $P(z)$ همه ریشه های آن بر روی دایره واحد باشند آنگاه برای $Q(z)=z^n\overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$،

$$Q(z)=uP(z); \qquad |u|=1$$

اگر خود را محدود کنیم به آندسته از چند جمله ای هایی که فقط در دایره $|z|<k$، $(k \leq 1)$ ریشه دارند آنگاه لم (۲.۴.۱) به صورت زیر قابل تعمیم می‌باشد.

لم ۵.۴.۱ اگر $P \in P_n$ و $P(z)$ همه صفر های آن در $|z| \leq k$، $(k \leq 1)$ آنگاه برای هر $R>1$ و $|z|=1$،

$$|P(Rz)| \geq \left(\frac{R+k}{1+k}\right)^n |P(z)|$$

برهان: چون همه صفر های $P(z)$ در $|z| \leq k \leq 1$ بنابر قضیه اساسی جبر

$$P(z)=C\prod_{j=1}^{n}(z-r_je^{i\theta_j})$$

که $j=1,2,\cdots,n$ و $r_j\le k$ پس برای $0\le\theta<2\pi$ و $R>1$،

$$\Big|\frac{P(Re^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}\Big|=\prod_{j=1}^{n}\Big|\frac{Re^{i\theta}-r_je^{i\theta_j}}{e^{i\theta}-r_je^{i\theta_j}}\Big|$$

و چون

$$\prod_{j=1}^{n}\Big|\frac{Re^{i\theta}-r_je^{i\theta j}}{e^{i\theta}-r_je^{i\theta j}}\Big|\ge\prod_{j=1}^{n}(\frac{R+r_j}{1+r_j}) \tag{15}$$

زیرا:

$$P(z)=C\prod_{j=1}^{n}(z-r_je^{i\theta_j});\qquad z_j=r_je^{i\theta_j}$$

$$\begin{aligned}\frac{|P(Re^{i\theta})|}{|P(e^{i\theta})|}&=\frac{|C\prod_{j=1}^{n}(Re^{i\theta}-r_je^{i\theta_j})|}{|C\prod_{j=1}^{n}(e^{i\theta}-r_je^{i\theta_j})|}\\&=\frac{|\prod_{j=1}^{n}(Rcos(\theta-\theta_j)-r_j)+iRsin(\theta-\theta_j)|}{|\prod_{j=1}^{n}(cos(\theta-\theta_j)-r_j)+isin(\theta-\theta_j)|}\\&=\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{R^2cos^2(\theta-\theta_j)+r_j^2-2Rr_jcos(\theta-\theta_j)+R^2sin^2(\theta-\theta j)}{cos^2(\theta-\theta j)+r_j^2-2r_jcos(\theta-\theta_j)+sin^2(\theta-\theta_j)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{R^2+r_j^2-2Rr_jcos(\theta-\theta_j)}{1+r_j^2-2r_jcos(\theta-\theta_j)}\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

از آنجا که تابع زیر صعودی است:

$$f(x)=\frac{a+bx}{c+dx}$$

پس برای $a=R^2+r_j^2$ و $b=-2Rr_j$ و $x=cos(\theta-\theta_j)$ و $c=1+r_j^2$ و $d=-2r_j$،

واینکه $-1\le cos(\theta-\theta_j)\le 1$، آنگاه با جایگذاری a و b و c و d و x نتیجه بدست می آید.

$$\frac{a+bx}{c+dx}\ge\frac{a-b}{c-d}$$

از طرف دیگر، $R>1$ بنابراین $1-R<0$ و از آنجایی که $r_j\le k$ بنابراین $r_j-k\le 0$ در نتیجه داریم:

$$(1-R)(r_j-k)\ge 0$$

پس:

$$Rk + r_j \geq k + Rr_j$$

یا

$$(1 + k)(R + r_j) \geq (R + k)(1 + r_j)$$

بنابراین:

$$(\frac{R + r_j}{1 + r_j}) \geq (\frac{R + k}{1 + k}) \qquad (16)$$

پس از روابط (۱۵) و (۱٦) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\frac{P(Re^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}| &\geq \prod_{j=1}^{n}(\frac{R + r_j}{1 + r_j}) \\ &\geq \prod_{j=1}^{n}(\frac{R + k}{1 + k}) = (\frac{R + k}{1 + k})^n \end{aligned}$$

و برهان کامل است. □

لم ٦.۴.۱ اگر $P \in P_n$ و $P(z) \neq 0$ در $|z| > k$، $(k \leq 1)$ آنگاه برای هر $1 \leq r \leq R$ و $|z| = 1$،

$$|P(Rz)| \geq \left(\frac{R + k}{r + k}\right)^n |P(rz)|$$

برهان: با استفاده از قضیه اساسی جبر

$$P(z) = C\prod_{j=1}^{n}(z - r_j e^{i\theta_j}); \qquad r_j \leq k$$

برای $0 \leq \theta < 2\pi$ و $1 \leq r \leq R$ مشابه برهان لم (۵.۴.۱)،

$$\begin{aligned} |\frac{P(Re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}| &= |\frac{Re^{i\theta} - r_j e^{i\theta_j}}{re^{i\theta} - r_j e^{i\theta_j}}| \\ &= \{\frac{R^2 + r_j^2 - 2Rr_j cos(\theta - \theta_j)}{r^2 + r_j^2 - 2rr_j cos(\theta - \theta_j)}\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \{\frac{R + r_j}{r + r_j}\} \geq \{\frac{R + k}{r + k}\} \end{aligned}$$

بنابراین برای $0 \leq \theta < 2\pi$،

$$\begin{aligned} |\frac{P(Re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}| &= \prod_{j=1}^{n} |\frac{Re^{i\theta} - r_j e^{i\theta_j}}{re^{i\theta} - r_j e^{i\theta_j}}| \\ &\geq \prod_{j=1}^{n} (\frac{R + k}{r + k}) = (\frac{R + k}{r + k})^n \end{aligned}$$

□

لم ۷.۴.۱ اگر $0 < p \leq \infty$،

$$\|1 + z^n\|_p = \|1 + z\|_p; \qquad z \in \mathbb{C}$$

برای برهان مرجع [۱۵] راببینید.

لم ۸.۴.۱ اگر $0 < p \leq \infty$،

$$\lim_{p \to \infty} \|P\|_p = \|P\|_\infty$$

برهان: فرض کنیم p_n دنباله ای حقیقی باشد که $p_n > 1$ و

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \infty$$