بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی به کمک موجکها

استاد راهنما:

دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور:

دکتر عطاالله عسکری همت

مؤلف:

هادی مین‌باشیان

خرداد ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: هادی مین باشیان

استاد راهنما: دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور: دکتر عطاالله عسکری همت

داور ۱: دکتر محمدعلی ولی

داور ۲: دکتر آزیتا تاج الدینی

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده: دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به

پدر و مادر دلسوزم

و نیز

بنیان‌گذاران دانشگاه شهید باهنر کرمان، مهندس افضلی‌پور و فاخره صبا

تقدیر و تشکر

بنده همان به که ز تقصیر خویش عذر به درگاه خدای آورد   ورنه سزاوار خداوندیش کس نتواند که به جای آورد

ایزد را شاکرم که به قول سهراب «خرده هوشی و سر سوزن ذوقی» عطا فرمود تا این قطره ناچیز را با خجلتی لذتبخش به دریای بیکران علم و معرفت بشری رها سازم. مَثَل حقیر بسان مردی بودایی مانَد که خاکستر عزیز از دست رفته‌اش را به رود گنگ می‌سپارد، شاید که روحش آزاد گردد چراکه از حُبّ‌ها تا بغض‌ها، از خنده‌ها تا گریه‌ها راهی بس طولانی طی شد تا این مقصود که اینک در دستان پر مهر شماست حاصل آید و اکنون وامی‌گذارمش به ترانه‌ها، به باران. لیک بر من فرض است از هرآنکه در رشتن این پنبه وجود مرا یاری کرد یادی کنم. نه به رسم ادب که برحسب وظیفه نخست از اساتید گرانقدرم تشکر می‌کنم که برخی چون پدر و برخی چون برادر، گاه بر من سخت و گاه آسان می‌گرفتند تا آن شوم که باید و در آن مسیر گام بردارم که شاید، لیکن گاه بر اسب چموش بی تازیانه نمی‌شود. در این میان تشکر می‌کنم از استاد راهنمای عزیزم جناب دکتر ریواز که تندخویی‌هایم را با نرم‌خویی و کودکانه‌گویی‌هایم را با تندخویی پاسخ می‌داد تا بدانم که هرآنکه تو را می‌گریاند دوستدار توست و نه آنکه بخنداند. و نیز از استاد مشاور عزیزم جناب دکتر عسکری همّت که نه در این دو سه خط، که در تمام این مدت، در آموختن علم و ادب مرا مشاور بود تقدیر می‌کنم. از اساتید گرانسنگ دانشکده ریاضی و رایانه در دانشگاه شهید باهنر کرمان نیز وامها گرفته‌ام که یارای ادای دینم نیست. از آنان عذر تقصیر می‌طلبم چراکه بار امانتی بر دوشم نهادند که آسمان نتواند کشید. و بر بالای همه جز باری تعالی، قدردان پدر و مادرم هستم که محبتشان تمام سرمایه زندگانیم است.

دوستدار دانش‌دوستان

هادی مین باشیان

minbashian@gmail.com

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا آنالیز موجک را مورد بررسی قرار داده و خواص موجکهای گوناگون، ضعفها و توانمندیهای آنها را مطالعه کرده‌ایم. در ضمنِ مطالعه موجکها، به مفاهیم مهمی چون تبدیل موجک پیوسته، تبدیل موجک گسسته و نیز آنالیز چندریزه‌ساز که ابزاری قوی در جهت طراحی و تحلیل موجکهاست پرداخته‌ایم.

سپس به ارائه نتایجی از نیم‌گروهها متمرکز گشته و معادلات دیفرانسیل جزئی (پاره‌ای) را از زاویه دید نیم‌گروهها بررسی کرده‌ایم.

در فصلی نسبتاً مفصل به ارائه روشهای کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل جزئی پرداخته شده که از آنجمله میتوان به روش کرانک-نیکلسون اشاره کرد که از روشهای معمول حل معادلات دیفرانسیل جزیی در بین مهندسین است.

در پایان با ارئه روش عددی جدیدی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از موجکها، توانمندی آنها را در کابردهای عددی نشان می‌دهیم. در این روش ابتدا PDE را با استفاده از نظریه نیم‌گروهها به یک معادله انتگرال تبدیل کرده و آنگاه معادله انتگرال حاصل را گسسته کرده و سپس با تصویر کردن عملگرهای دیفرانسیلی پدید آمده بر روی فضای موجکی به ارائه روشی تطبیقی برای حل معادله می‌پردازیم. در پایان با ارائه چند مثال عددی کارایی روش بررسی می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه ۱

فصل اول : پیشنیازها ٤

۱.۱ آنالیز حقیقی و تابعی ۵

۲.۱ آنالیز فوریه ۱۰

۳.۱ مفاهیم جبر خطی ۱۵

فصل دوم : آنالیز موجک ۲۲

۱.۲ مقدمه ۲۳

۲.۲ تبدیلات موجکی پیوسته ۲۵

۳.۲ تبدیلات موجکی گسسته ۳۰

۴.۲ آنالیز چندریزه ساز ۳٤

۵.۲ تجزیه و بازسازی ٤۰

۶.۲ تابع مقیاس ٤۵

۸.۲ موجکِ Coiflet ۵۳

۹.۲ موجکهای دو بعدی ۵٤

فصل سوم: تحلیل عددی موجکها ۵۹

۱.۳ تبدیل موجک سریع ٦۰

۲.۳ تقریب توابع با سریهای موجکی ٦۳

۳.۳ تحلیل خطای تقریبهای موجکی ٦۵

۴.۳ همواری ٦٦

فصل چهارم : نیم‌گروه‌ها و معادلات دیفرانسیل جزئی ٦۹

۱.۴ نیم‌گروه های پیوسته یکنواخت از عملگرهای خطی کراندار.. ۷۰

۲.۴ نیم‌گروه های قویاً پیوسته از عملگرهای خطی کراندار.. ۷۲

۳.۴ مسئله مقدار اولیه ناهمگن ۷٤

فصل پنجم: برخی روشهای عددی حل PDEs.. ۷۹

۱.۵ روش تفاضل متناهی.. ۸۰

۲.۵ روش کرانک- نیکلسون ۸۹

۳.۵ روشهای گالرکین و هم محلی... ۹۹

۴.۵ روش ریلی- ریتس.. ۱۰٦

۵.۵ روش عنصر متناهی.. ۱۰۸

۶.۵ روش لاکس- وِندروف ۱۰۹

فصل ششم: حل معادلات دیفرانسیل پاره ای با موجک... ۱۱۲

۱.۶ مدل معادله ۱۱۳

۲.۶ روش نیم‌گروه ها و کوادراتور.. ۱۱٦

۳.۶ نمایش توابع در پایه های موجکی.. ۱۱۹

۴.۶ نمایش عملگرها در پایه های موجکی... ۱۲۳

۵.۶ فرم غیراستاندارد عملگرهای دیفرانسیلی ۱۲۹

۶.۶ نمایش فرم غیر استاندارد «توابع عملگری» ۱۳۲

۷.۶ گشتاورهای صفر B–بلوک‌ها... ۱۳٦

۸.۶ محاسبات تطبیقی با فرم غیراستاندارد ۱۳۹

۹.۶ محاسبه توابع در پایه های موجکی... ۱٤۰

۱۰.۶ نتایج عددی ۱٤۸

منابع ۱٦۰
پیوستها : نمودارها و جداول مربوط به موجکهای گوناگون ۱٦٤
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۸۵
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۸۹

مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی یکی از زمینه‌های ریاضیات است که توأمان از سوی ریاضیدانان محضی و کاربردی مورد مطالعه جدی قرار گرفته است. رویکردهای ریاضیاتی به این مقوله را می‌توان ذیل دو عنوان کلی تقسیم‌بندی کرد. نخست مطالعه پیرامون شرایط وجود و منحصربفردی جواب و دوم جستجو به دنبال جواب (در صورت وجود) است. با این تقسیم‌بندی روشهای عددی جهت حل این گونه معادلات ذیل مطالعات نوع دوم جای میگیرد. این معادلات از این جهت که بسیاری از پدیده‌های عالم هستی را توصیف و از این رو راهی برای تعامل با محیط پیرامون را فراهم می‌سازند از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردارند. کاربرد اینگونه معادلات از فیزیک و شیمی گرفته تا زیست شناسی و علوم مهندسی گوناگون به حدی است که در بسیاری از شاخه‌های گوناگون از علوم یاد شده، دانشجویان می‌بایست یک دوره درسی در این زمینه را، مستقیم یا غیر مستقیم، بگذرانند.

همانطور که گفته شد بسیاری از پدیده‌های موجود در جهان در قالب معادلات دیفرانسیل جزئی مدلسازی می‌شوند و لذا حل اینگونه معادلات برای پی بردن به ماهیت پدیده مورد نظر اجتناب ناپذیر است. از زمانی که جوزف فوریه معادله حرارت را با روش معروف خود توسط توابع مثلثاتی حل کرد و انقلابی عظیم در آنالیز خاصه در نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی پدید آورد تا به امروز، روشهای گوناگونی که گاه تفاوتی اندک در نظر اما اختلافی فاحش در عمل دارند جهت حل اینگونه معادلات ارائه شده است. روشهای حل معادلات دیفرانسیل جزئی به طور کلی به دو دسته روشهای تحلیلی و روشهای عددی تقسیم‌بندی می‌شوند. روشهای تحلیلی که عمدتاً به دنبال جواب دقیق معادله و در صورت امکان شکل بسته‌ای از آن هستند شامل روش جداسازی متغیرها، روش بسط به توابع متعامد، روش تبدیلات انتگرالی و ... می‌باشند. هر یک از این روشها دارای معایبی است و بطور کلی نمی‌توان همه این روشها را در مورد همه معادلات بکار برد و بدتر اینکه گاه هیچیک از روشهای تحلیلی شناخته شده قادر به حل معادله مورد نظر نیست و اینجاست که روشهای عددی برای یافتن تقریبی معقول از جواب که معمولاً نیز برای اهداف بعدی کفایت می‌کند بکار گرفته می‌شوند. گفتنی است که روشهای عددی امروزی، بقدری کارا هستند که در

صورت وجود جواب تحلیلی نیز بر اینگونه جوابها ارجحیت داده می‌شود اگرچه این نفی‌کننده ارزش ریاضیاتی روشهای تحلیلی نیست.

مقصود این پایان‌نامه بررسی روشی عددی جدیدی در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مبتنی بر نظریه موجک است. لذا طبیعتاً می‌بایست پیش از ورود به بحث اصلی، آنالیز موجک را به خوبی بررسی و از پتانسیل های موجود در آن آگاه شویم. این مهم در فصل دوم انجام شده است اما پیش از آن در فصل اول نتایجی از آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی و آنالیز فوریه که مورد نیاز مطالعه موجکهاست را مختصراً آورده‌ایم. در فصل آنالیز موجک به معرفی تبدیلات موجکی پیوسته، تبدیلات موجکی گسسته و ساختار آنالیز چندریزه‌ساز پرداخته‌ایم. در این فصل سعی شده تا خواص گوناگون موجکها مانند داشتن محمل فشرده، داشتن تابع مقیاس و تابع موجک پیوسته و همچنین طریقه استخراج یک موجک از آنالیز چندریزه‌ساز را مختصراً شرح دهیم. بدیهی است که ارائه‌ای هرچند مختصر از این موضوعات مستلزم بحث نسبتاً مفصلی است، که این خود دلیل طولانی بودن این فصل است.

در فصل سوم به ارئه «الگوریتم هرمی» که در جنبه‌های کاربردی نظریه موجک جایگاهی ویژه دارد می‌پردازیم و همچنین به تحلیل عددی موجکها و چگونگی فائق آمدن بر برخی مشکلات محاسباتی آنان، مثل نداشتن شکل بسته‌ای از تابع مقیاس و تابع موجک در برخی موجکهای متعامد، مانند موجک دوبشی و موجک کویفمن، همت گماشته‌ایم.

از آنجا که در روش جدیدِ بررسی شده در این پایان‌نامه، از نظریه نیم‌گروهها استفاده شده است لذا برخی از نتایج مهم و مورد استفاده‌ی این حوزه را آوردهایم. در ابتدا قصد داشتیم تا این نتایج را ذیل عنوان بخشی به همین نام در فصل پیشنیازها گردآوریم اما از آنجا که بیم عدم انعکاس کامل نقش آنها در روش مورد مطالعه می‌رفت، بهتر آن دیدیم که فصلی جدا به آن اختصاص دهیم.

فصل پنجم به مطالعه روشهای کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل جزئی پرداخته است و از این رهگذر فضایی جهت مقایسه روشهای گوناگون حل معادلات از یک سو و مقایسه تفکرحاکم بر این روشها و شیوه جدید مبتنی بر موجک از سوی دیگر پدید آورده‌ایم.

در فصل پایانی به ارائه روشی جدید در حل معادلات به کمک موجکها بر پایه نظریه نیم‌گروهها می‌پردازیم. در این روش ابتدا معادله دیفرانسیل را به کمک نیم‌گروهها و به ویژه «اصل دوهامل» به یک معادله انتگرال تبدیل کرده و سپس با تقریب عملگرها و توابع در پایه موجکی و ارائه فرم ماتریسی از آنها یک جواب تقریبی بدست می‌آوریم. در خلال این فصل از خواص موجکها به ویژه گشتاورهای صفر آنها به خوبی بهره برده و هوشمندی موجکها را در ارائه روشی تطبیقی نمایان می‌کنیم. این فصل را با ارائه چند مثال عددی پایان می‌دهیم.

فصل اول

پیشنیازها

در این فصل به ارائه نتایجی از آنالیز حقیقی و آنالیز فوریه و نیز مفاهیمی از جبر خطی که در فصول بعدی مورد نیاز می باشند می پردازیم. سعی ما بر این است که در حد ممکن نیاز خواننده را به مفاهیم پایه‌ای رفع کنیم اما بدیهی است که داشتن آشنایی مقدماتی با این زمینه‌ها برای هر دانشجوی علاقه‌مند به این بحث ضروری است. در ادامه‌ی این فصل ابتدا به ذکر تعاریف و قضایای آنالیز حقیقی و تابعی پرداخته و سپس به قضایای آنالیز فوریه که مکرراً در فصول۲ ، ۳ و ۶ مورد استفاده قرار می گیرند می پردازیم. از آنجا که اکثر روشهای عددی برای حل PDEs به دستگاه معادلات خطی منجر می شوند لازم دیدیم تا مفاهیم پایه ای جبرخطی مورد نیاز در فصول ۵ و۶ را زیر عنوان بخشی به همین نام در این فصل مهیا کنیم.

۱.۱ آنالیز حقیقی و تابعی

تعریف۱.۱.۱ (فضای باناخ). یک فضای برداری همراه با یک نُرم را فضای خطی نرم دار گوییم. یک فضای نرم دار خطی را که نسبت به نرمش کامل است «فضای باناخ» می نامیم. در حقیقت یک فضای باناخ، فضایی نرم دار خطی است که در آن هر دنباله کُشی همگراست [۳۰].

مثال۲.۱.۱. فضای خطی $C([a,b])$ متشکل از همه توابع پیوسته روی [a,b] همراه با نرم $\|f\| = \max|f(x)|$ یک فضای باناخ است [۳۰].

تعریف۳.۱.۱ (فضای ضرب داخلی). هر فضای برداری با اسکالرهای مختلط <V,C> را یک «فضای ضرب داخلی» (یا به اصطلاح فضای «پیش‌هیلبرت[۱]») گوییم اگر تابعی مانند $<\cdot,\cdot>: V \times V \to C$ وجود داشته باشد به طوریکه برای همه $u,v,w \in V$ و $a \in C$ داشته باشیم:

۱) $<v,v> \in R$ و $<v,v> \geq 0$ با این شرط که $<v,v>=0$ اگر و فقط اگر $v=0$.

۲) $<u,v+w>=<u,v>+<u,w>$.

۳) $<au,v>=a<u,v>$.

---
[۱] Pre-Hilbert

۴) $< u,v >= \overline{< v,u >}$ که خط افقی بیانگر عمل مزدوج مختلط است.

تابع $<.,.>$ «*ضرب داخلی*» نامیده می شود [۳۰].

برخی منابع خاصیت (۳) را با $< u,av >= a < u,v >$ جایگزین می کنند.

توجه کنید که خواص(۲)، (۳)، (۴) از تعریف فوق ایجاب می کند که

$$< au + bv, w >= a < u,w > +b < u,w >$$

و

$$< u,av + bw >= \bar{a} < u,v > +\bar{b} < u,w >$$

که این یعنی $<.,.>$ نسبت به مختصهٔ اول خطی و نسبت به مختصهٔ دوم «مزدوج خطی» است.

مثال۴.۱.۱. فضای برداری C^n همراه با ضرب داخلی تعریف شده برای $u = (u_1, u_2,..u_n)$ و $v = (v_1, v_2,...v_n)$ به صورت زیر، یک فضای ضرب داخلی است.

$$< u,v >= \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j$$

قضیه۵.۱.۱ (نامساوی شوارتز). برای همه $u\ ,v$ در فضای ضرب داخلی $<V,C>$ داریم:

$$|< u,v >| \le \|u\| \, \|v\|$$

که در آن $\|v\| =< v,v >^{\frac{1}{2}}$ (رجوع کنید به[۳۰]).

قضیه۶.۱.۱ (نامساوی مثلثی). برای همه $u\ ,v$ در فضای ضرب داخلی $<V,C>$ داریم

$$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$$

([۳۰]).

تعریف۷.۱.۱ (نُرم). برای هر فضای برداری V تابع $\|.\|:V \to R$ را که برای تمام $u,v \in V$ و همه $a \in R$ در شرایط زیر صدق می کند «نرم» می نامیم.

۱) $\|v\| \geq 0$ و $\|v\| = 0$ اگر و تنها اگر $v = 0$.

۲) $\|av\| = |a|\,\|v\|$.

۳) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

تا اینجا واضح است که برای هر فضای با ضرب داخلی، یک نرم قابل تعریف است. اما عکس آن صادق نیست به عنوان مثال فضاهای کلاسیک باناخ، نرم دار هستند اما نرم آنها القا شده توسط یک ضرب داخلی نیست در واقع داریم

(فضاهای ضرب داخلی) $\subset$ (فضاهای برداری نرم دار) $\subset$ (فضاهای برداری)

قضیه۹.۱.۱ (نامساوی بِسِل). فرض کنید $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای ضرب داخلی $<V,C>$ باشد. آنگاه برای همه $u \in V$ داریم

$$\|u\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} \left|\left(u, v_j\right)\right|^2$$

اکنون به تعریف یک فضای بسیار مهم در آنالیز حقیقی می پردازیم که بسیاری از مفاهیم عمیق آنالیز حقیقی بر پایه آن استوار است [۳۰].

تعریف۱۰.۱.۱ (فضای هیلبرت). یک فضای ضرب داخلی کامل، یک فضای هیلبرت است [۳۰].

مثال۱۱.۱.۱. از آنجا که C ,R کامل هستند. لذا C^n, R^n مثالهایی از فضای هیلبرت هستند (همراه با ضرب داخلی آشنای «*نقطه‌ای*») [۳۰].

اکنون به مطالعه فضاهای هیلبرت نامتناهی‌العبد می پردازیم. ابتدا ضرب داخلی دو تابع مقدار مختلط را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

بدیهی است که در تعریف فوق اگر توابع g , f مقدار حقیقی باشند آنگاه علامت مزدوج بلااثر خواهد بود.

فضای $L^2(R)$ که به شکل زیر تعریف می شود یک فضای هیلبرت است.

$$L^2(R)=\left\{f \;|\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty\right\}$$

بررسی اینکه فضای فوق ویژگیهای فضای هیلبرت را برآورده می سازد را می توان در [۳۰] یافت.

در برخی از جاهای این پایان‌نامه با مثال دیگری از فضاهای هیلبرت که شامل همه دنباله های «مربع مجموع پذیر» از اعداد حقیقی است برخورد خواهیم کرد که آنرا با l^2 نشان می دهیم یعنی

$$l^2(R)=\left\{(x_1,x_2,\ldots)\,|\;x_i\in R, i\in N, \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty\right\}$$

در تعریف فوق می توان با گرفتن $i\in Z$ آن را تعمیم داد که معمولاً به شکل نمادین آنرا با $l^2(Z)$ نمایش می دهند.

قضیه۱۲.۱.۱. فرض کنید S یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت H باشد. آنگاه برای همه $h\in H$ تجزیه منحصر بفردی به شکل $h=s+s^{\perp}$ که $s\in S$ و $s^{\perp}\in S^{\perp}$ وجود داردکه $S^{\perp}$ متمم متعامد S است یعنی $S^{\perp}=\{h\in H\;|<h,s>=0\;\;\forall s\in S\}$، [۳۰].

قضیه۱۳.۱.۱. اگر $R=\{r_1,r_2,\cdots\}$ پایه متعامدِ یکّه‌ای برای فضای هیلبرت H باشد و $h\in H$ آنگاه

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}(h,r_k)r_k$$

[۳۰].

قضیه۱۴.۱.۱. فرض کنید $R=\{r_1,r_2,\ldots\}$ پایه متعامد یکّه‌ای برای فضای هیلبرت H باشد و همچنین $R_k=span\{r_1,r_2,\ldots r_{k-1}\}$ و نیز $h\in H$، آنگاه $\inf_{s\in R_k}\|h-s\|=\|h-t\|$ که $t=\sum_{i=1}^{k-1}<h,r_i>r_i$.

این بدان معنی است که بهترین تقریب برای h مجموع جزیی سری متعامدِ یکّه خودِ h است [۳۰].

قضیه زیر در فصل۳ برای اثبات درستی برخی قسمت های الگوریتم گفته شده مورد نیاز است.

تعریف۱.۱.۱۵. یک ایزومورفیسم، تابعی یک به یک و پوشا بین دو فضاست که ساختار آن دو را حفظ می کند. در اینصورت آن دو فضا را ایزومورف گویند.

قضیه۱.۱.۱۶ (قضیه اساسی فضاهای برداری نامتناهی‌البعد). فرض کنید H یک فضای هیلبرت با پایه ای متعامد یکه نامتناهی باشد. آنگاه H با L^2 ایزومورف است[۳۰].

تعریف۱.۱.۱۷. یک «تابعک خطی» T روی یک فضای نرم دار خطی $<V,F>$ (که F یک میدان است) نگاشتی به فرم $T:V \to F$ است به طوریکه برای همه اسکالرهای $f_1, f_2 \in F$ و همه $v_1, v_2 \in V$ داریم

$$T\left(f_1 v_1 + f_2 v_2\right) = f_1 T\left(v_1\right) + f_2 T\left(v_2\right)$$

تابعک خطی T کراندار است اگر $M \in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $|T(v)| \le M \|v\|$ برای همه $v \in V$.

در فصل ۴ با قضایایی پیرامون توابع لیپ‌شیتزی برخورد می‌کنیم لذا تعریف اینگونه توابع را در زیر آورده‌ایم.

تعریف ۱.۱.۱۸. تابع f در نقطه v به طور نقطه‌وار «*لیپ‌شیتزی*» از مرتبه $\alpha \ge 0$ است اگر ثابتی چون $K \ge 0$و چندجمله‌ای P_v از درجه $m = [\alpha]$ ([] نماد جزء صحیح است) وجود داشته باشد بطوریکه برای همه t

$$\left|f(t) - P_v(t)\right| \le K\left|t - v\right|^{\alpha}$$

و نیز گوییم f به طور یکنواخت لیپ‌شیتزی از مرتبه $\alpha \ge 0$ است اگر رابطه فوق برای همه $v = [a,b]$برقرار باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹ (تبدیل هیلبرت). اگر $f(t)$ بر روی خط حقیقی $-\infty < t < \infty$ تعریف شده باشد آنگاه «تبدیل هیلبرت» آن، با نماد $\mathcal{H}(f)$، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{H}(f) = \tfrac{1}{\pi}\oint_R \frac{f(t)}{t-x}dt$$

که در آن x حقیقی و انتگرال فوق به شکل یک «مقدار اصلی کُشی» رفتار می‌کند یعنی

$$\oint_R \frac{f(t)}{t-x}dt = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+\infty}\right]\frac{f(t)}{t-x}dt$$

«معکوس تبدیل هیلبرت» از رابطه زیر بدست می‌آید

$$f(t) = -\tfrac{1}{\pi}\oint_R \frac{(\mathcal{H}f)(x)}{x-t}dx.$$

۲.۱ آنالیز فوریه

از آنجا که در فصول ۳ و۶ به طور گسترده ای از مفاهیم و قضایای آنالیز فوریه استفاده می کنیم لذا لازم دیدیم تا برخی از تعاریف و نتایج مهم و پرکاربرد این حوزه از ریاضیات را مختصراً و بدون اثبات قضایا بیاوریم. امید است که نیاز خواننده را به رجوع به کتابهای مرتبط با آنالیز فوریه مرتفع کنیم اما هر جا لازم باشد خواننده را به منابع اصلی جهت بررسی بیشتر ارجاع خواهیم داد.

با قضیه زیر که بیانگر تبدیل فوریه و معکوس آن می باشد شروع می کنیم.

قضیه۱.۲.۱. اگر f یک تابع با مشتق اول پیوسته و متعلق به $L^1(R)$ یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$ باشد آنگاه

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \qquad (۱.۳)$$

که در آن $\hat{f}(\lambda)$، «تبدیل فوریه f»، به صورت زیر داده شده است.

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

صورت گسسته (۱.۳) را که معمولاً برای $f\in L^1([-l,l])$ در نظر می گیرند بصورت زیر می باشد.

$$f(x)=\sum_{n=\infty}^{\infty}\hat{f}_n\, e^{-\frac{in\pi}{l}x}.$$

که در آن $\hat{f}_n$ عبارت است از

$$\hat{f}_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-\frac{in\pi}{l}t}\,dt.$$

گفتنی است در برخی منابع تبدیل فوریه را با نماد $\mathcal{F}(f)$ یا سایر نمادها نشان می دهند که ما نیز گاهاً جهت سهولت از آن استفاده می‌کنیم.

بی آنکه وارد جزئیات اثبات شویم برخی از خواص اساسی تبدیل فوریه و معکوس آن را در قضیه زیر گردآورده‌ایم.

قضیه۲.۲.۱. فرض کنید g و f توابعی مشتق پذیر تعریف شده روی خط حقیقی با $f(t)=0$ (برای $|t|$ بزرگ) باشند. خواص زیر برقرارند [۱۳].

۱) تبدیل فوریه و معکوس آن، عملگرهای خطی می باشند. یعنی برای هر ثابت c

$$\mathcal{F}(f+g)=\mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g)\ ,\ \mathcal{F}(cf)=c\mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f+g)=\mathcal{F}^{-1}(f)+\mathcal{F}^{-1}(g)\ ,\ \mathcal{F}^{-1}(cf)=c\mathcal{F}^{-1}(f)$$

۲) تبدیل فوریه حاصلضرب f با t^n به صورت زیر داده شده می شود.

$$\mathcal{F}\left(t^n f(t)\right)(\lambda)=i^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\{\mathcal{F}(f)(\lambda)\}$$

۳) معکوس تبدیل فوریه حاصلضرب f با λ^n به صورت زیر داده شده است:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\lambda^n f(\lambda)\right)(t)=(-i)^n\frac{d^n}{dt^n}\left\{\mathcal{F}^{-1}(f)(t)\right\}$$

۴) تبدیل فوریه مشتق nاُم به صورت زیر داده می شود.

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}\right)(\lambda)=(i\lambda)^n\mathcal{F}(f)(\lambda)$$