بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه

کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:

مباحثی در حلقه‌های منظم

استاد راهنما:

دکتر بیژن دوّاز

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا احمدی زند

پژوهش و نگارش:

ناصر عمیدی منفرد

شهریور ۱۳۸٦

تقدیم به :

پیشگاه حضرت ولی عصر (عج) که صاحب علم تمام و کمال است

و

به او که دوستش دارم

تقدیر و تشکر

اول سپاس بیکران خدایی را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست.

تشکر و قدردانی از استاد عالیقدر جناب آقای دکتر بیژن دواز که با علاقه‌مندی و گشاده‌رویی راهنمایم بودند ودر طول اجرای پایان‌نامه همواره علاوه بر بهره‌گیری از معرفت‌های علمی و اخلاقی ایشان، از پشتکار و دقت نظرشان درس‌ها آموختم.

سپاسگزار مساعدت‌های استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد رضااحمدی‌زند هستم که مشاورت این رساله را بر عهده داشتند.

از جناب آقای دکترمحمد رضا هوشمند اصل استاد محترم دانشکده ریاضی دانشگاه یزد وجناب آقای دکترعلی معدن شکاف ، عضو هیئت علمی دانشگاه سمنان که زحمت خواندن پایان‌نامه اینجانب و داوری آن را پذیرفتند، صمیمانه سپاسگزارم.

از دوست بسیار عزیزم آقای دکتر مهدی دهقانیان که در به انجام رساندن این پژوهش از ابتدا تا انتها پشتوانه من بودند نیز کمال تشکر دارم.

از دوستان بسیار عزیزم آقایان مهدی دهقانی ، غلام حسین کرمی، داریوش حیدری، که در طول دوران تحصیل و حیطه تایپ و تدوین این پایان‌نامه مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همچنین از خانم عابدینی منشی دفتر دانشکده و خانم عباسی زاده کارشناس دانشکده ریاضی به خاطر مساعدت‌های فراوان در زمینه‌های مختلف آموزشی تشکر می‌نمایم.

وظیفه خود می‌دانم که از تمامی اعضای خانواده‌ام، پدر صبور و مادر مهربانم، همسر عزیزم وخانواده محترمش ، برادران و خواهران گرامیم و دامادهای گرامیمان علی روانشاد وجمشید صیادی که همواره قوت قلبی برای ادامه راه بوده‌اند تشکر وقدردانی نمایم.

در پایان از دوستان ارجمندم آقایان علی ملک حسینی، غلام حسین آتش افرازه ومهدی شکوهی واسماعیل علیزاده و ورودی‌های ۸۳ و ۸۴ کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه یزد و همه دوستانی که به نحوی مرا در انجام این پایان‌نامه همراهی نمودند کمال تشکر و قدردانی دارم.

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامـه تحصیلی آقای ناصر عمیدی منفرد دانشجوی کارشناسی ارشد رشتـه/گرایش: ریاضی محض

تحت عنوان: مباحثی در حلقه های منظم

و تعداد واحد: ۶ واحد درتاریخ ۸۶/۷/۲۵ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۸/۲۵ به حروف هجده و بیست و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	بیژن دواز	
استاد/ استادان مشاور:	محمدرضا احمدی زند	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	محمدرضا هوشمند اصل	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	علی معدنشکاف	علی معدنشکاف

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمد کاظم توسلی

امضاء:

چکیده

فرض کنید R یک حلقه یکدار، X مجموعه همه‌ی عناصر ناصفر و یکال R و G گروه همه عناصر یکال R باشد. با بررسی دو عمل منظم و عمل تزویج روی X توسط G نتایج زیر به‌دست می آید:

فرض کنید J رادیکال ژاکوبسن حلقه‌ی R باشد. اگر X اجتماع n مدار تحت عمل منظم باشد و $a \in J \setminus \{0\}$ وجود داشته باشد به طوری‌که $a^n \neq 0$، آنگاه $X = O(a) \cup O(a^2) \cup \ldots \cup O(a^n)$ و R حلقه‌ای موضعی است و $J^{n+1} = (0)$ و J^k/J^{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ یک فضای برداری چپ بابعد یک روی R/J است و نیز اگر R حلقه‌ای آرتینی چپ یکدار باشد نشان خواهیم داد که اگر G متناهی باشد، آنگاه R نیز متناهی است و اگر ۲ در R یکال باشد، آنگاه G آبلی است اگر و تنها اگر R جابجایی باشد. همچنین نشان خواهیم داد که اگر G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد آنگاه مدار $O(x)$ تحت عمل منظم روی X، به‌ازای همه پوچ توان‌های $x \in X$ متناهی است. به علاوه اگر F یک میدان باشد و $F \setminus \{0\}$ یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد آنگاه F متناهی است. در پایان نشان خواهیم داد که اگر G در حلقه یکال—منظم R گروهی تابدار باشد و ۲ در R یکال باشد آنگاه عمل تزویج روی X توسط G بدیهی است اگر و تنها اگر G آبلی باشد اگر و تنها اگر R جابجایی باشد.

فهرست

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیمی را معرفی می‌کنیم که در فصل‌های بعد از آنها استفاده شده است. ابتدا عمل گروه روی یک مجموعه را معرفی کرده و با دو عمل منظم و عمل تزویج آشنا می‌شویم. برای عناصر پوچ‌توان حلقه R، اندیس تعریف کرده و در ادامه قضیه اساسی برای حلقه‌های متناهی و جابجایی را که از تجزیه این‌گونه حلقه‌ها با جمع مستقیمی از حلقه‌های موضعی صحبت می‌کند بیان می‌کنیم. در بخش آخر این فصل حلقه‌های منظم وون—نیومن[1] ، به طور قوی منظم ، منظم آبلی و یکال منظم معرفی می‌شوند. مثال‌هایی از حلقه منظم وون—نیومن آورده شده تا با مفهوم آن بیشتر آشنا شویم. عناصر و ایده‌آلهای منظم و شبه منظم چپ و راست نیز تعریف می‌شود. در آخر فصل معادل بودن حلقه به‌طور قوی منظم و منظم آبلی را بیان و اثبات می‌کنیم. در پایان نیز دو نتیجه که در فصل‌های بعد زیاد از آن استفاده شده‌است تحت این عنوان که حلقه‌های منظم آبلی و منظم از اندیس کراندار ، یکال منظم هستند آورده می‌شود.

[1] Von-Neuman

۱.۱ عمل گروه روی یک مجموعه

تعریف ۱.۱.۱.

فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای غیرتهی است (عنصر همانی G را با علامت ۱ نمایش می‌دهیم). می‌گوییم G روی Ω عمل می‌کند هرگاه نگاشت $\mu : G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ وجود داشته باشد به قسمی که:

۱) برای هر $\omega \in \Omega$، $\mu(\text{۱}, \omega) = \omega$.

۲) برای هر $h, g \in G$ و برای هر $\omega \in \Omega$، $\mu(g, \mu(h, \omega)) = \mu(gh, \omega)$.

با نماد گذاری $\mu(g, \omega) = \omega^g$ می‌توان به طور خلاصه شرط (۱) و (۲) را به صورت زیر نوشت:

۱) برای هر $\omega \in \Omega$، $\omega^{\text{۱}} = \omega$.

۲) برای هر $h, g \in G$ و هر $\omega \in \Omega$، $(\omega^h)^g = \omega^{hg}$.

مثال ۲.۱.۱.

اگر G یک گروه باشد آنگاه G روی G با ضرب از راست عمل می‌کند. یعنی نگاشت $\mu : G \times G \longrightarrow G$ با ضابطه $\mu(g, h) = gh$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\mu(\text{۱}, g) = \text{۱}g = g, \qquad \forall g \in G$$

$$\left.\begin{array}{c} \mu(g, \mu(h, k)) = \mu(g, hk) = ghk \\ \mu(gh, k) = ghk \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(g, \mu(h, k)) = \mu(gh, k)$$

مثال ۱.۱.۳.

نگاشت $\mu: G \times X \longrightarrow X$ را با ضابطه $\mu(g,x) = gx$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$\mu(1,x) = x \in X, \qquad \forall x \in X$$
$$\mu(g,\mu(h,x)) = \mu(g,hx) = g(hx) = (gh)x = \mu(gh,x), \forall x \in X, \forall g,h \in G$$

پس G روی X عمل می‌کند که به آن عمل منظم می‌گوییم.

مثال ۱.۱.۴.

نگاشت $\mu: G \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $\mu(g,x) = gxg^{-1}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\mu(1,x) = x, \quad \forall x \in X$$
$$\mu(g,\mu(h,x)) = \mu(g,hxh^{-1})) = ghxh^{-1}g^{-1} = \mu(gh,x)$$

که به آن عمل تزویج می‌گوییم.

لم ۱.۱.۵.

فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه‌است، G روی Ω عمل می‌کند. در این صورت رابطه $\sim$ که در زیر تعریف می‌شود یک رابطه هم ارزی در Ω است.

$$\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \exists g \in G \quad \ni: \alpha^g = \beta, \quad \forall \alpha,\beta \in \Omega$$

اثبات.

سه شرط رابطه هم‌ارزی را برای $\sim$ بررسی می‌کنیم. طبق شرط اول عمل G روی Ω برای هر $\alpha \in \Omega$ داریم $\alpha^1 = \alpha$. پس $\alpha \sim \alpha$. حال اگر $\alpha \sim \beta$ طبق تعریف یک $g \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha^g = \beta$. طبق شرط اول عمل G روی Ω داریم

$$\beta^{g^{-1}} = (\alpha^g)^{g^{-1}} = \alpha^{gg^{-1}} = \alpha^1 = \alpha$$

بنابراین نتیجه می‌شود $\beta \sim \alpha$. بالاخره اگر $\alpha \sim \beta$ و $\beta \sim \gamma$ آنگاه طبق تعریف اعضای $g, h \in G$ وجود دارند به طوری‌که $\alpha^g = \beta$ و $\beta^h = \gamma$. طبق شرط دوم عمل G روی Ω داریم $\gamma = \beta^h = (\alpha^g)^h = \alpha^{gh}$. چون G یک گروه است پس $gh \in G$ و در نتیجه $\alpha \sim \gamma$.■

تعریف ۱.۱.۶.

فرض کنید G یک گروه، Ω مجموعه‌ای ناتهی و G روی Ω عمل کند. همچنین فرض کنید $\sim$ رابطه هم‌ارزی تعریف شده در لم فوق باشد. برای $\alpha \in \Omega$ مجموعه $O(\alpha) = \{\beta \in \Omega : \alpha \sim \beta\}$ را که رده هم‌ارزی α است یک مدار G می‌نامیم (گاهی به $O(\alpha)$ مدار شامل α نیز گفته می‌شود).

بنابر تعریف فوق و تعریف $\sim$ اعضای $O(\alpha)$ (مدار شامل α) عبارتند از $O(\alpha) = \{\alpha^g : g \in G\}$ که در حقیقت $O(\alpha) = \{\mu(g, \alpha) : g \in G\}$. چون مدارهای G یک افراز Ω می‌باشند اگر $\{O(\alpha_i)\}_{i \in I}$ خانواده تمام مدارهای مجزای G باشد آنگاه $\Omega = \bigcup_{i \in I} O(\alpha_i)$.

تعریف ۱.۱.۷.

فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای ناتهی باشد و G روی Ω عمل کند گوییم G روی Ω تعدی است (یا G روی Ω به‌طور تعدی عمل می‌کند) هرگاه $\alpha \in \Omega$ موجود باشد به‌طوری که $O(\alpha) = \Omega$ و عمل گروه G روی X بدیهی است هرگاه به‌ازای هر $\alpha \in \Omega$، $O(\alpha) = \{\alpha\}$.

تعریف ۱.۱.۸.

فرض کنید G روی Ω عمل می‌کند و $\omega \in \Omega$. مجموعه $G_\omega = \{g \in G : \omega^g = \omega\}$ را ثابت نگه‌دارنده (پایدارساز) ω در G می‌نامیم. گاهی اوقات G_ω را با $Stab(\omega)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۱.۱.

فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کند. در این صورت $G_\omega \leq G$.

اثبات.

برای $\omega \in \Omega$ داریم $\omega = \omega^1$. پس $1 \in G_\omega$ و در نتیجه $G_\omega \neq \emptyset$. حال برای هر $g, h \in G_\omega$ داریم $\omega = \omega^g$ و $\omega = \omega^h$. بنابراین $\omega = \omega^{g^{-1}}$ و درنتیجه $\omega = \omega^h = (\omega^{g^{-1}})^h = \omega^{g^{-1}h}$. لذا $g^{-1}h \in G_\omega$. پس G_ω زیرگروهی از G می‌باشد.■

۲.۱ اندیس عنصر پوچ‌توان

تعریف ۱.۲.۱.

عنصر ناصفر a در حلقه R را یک مقسوم‌علیه صفر چپ (راست) گوییم هرگاه عنصر ناصفری مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری که $ab = 0$ ($ba = 0$). مقسوم‌علیه صفر عنصری از R است که هم مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

تعریف ۲.۲.۱.

عنصر a در حلقه یکدار R را معکوس‌پذیر چپ (راست) گوییم اگر $c \in R$ ($b \in R$) وجود داشته باشد به قسمی که $ca = 1_R$ ($ab = 1_R$). عنصر c (b) معکوس چپ (راست) a نامیده می‌شود. عنصر $a \in R$ را که معکوس‌پذیر چپ و راست باشد معکوس‌پذیر یا یکه یا یکال می‌نامند.

تبصره ۳.۲.۱.

۱) معکوس‌های چپ و راست یک عنصر a لزوماً یکی هستند. زیرا $ab = 1_R = ca$ ایجاب

می‌کند که

$$.b = 1_R b = (ca)b = c(ab) = c1_R = c$$

۲) مجموعه عناصر یکال در حلقه یکدار R تحت ضرب تشکیل یک گروه می‌دهد که به آن گروه یکال‌های حلقه R گوییم و آن را با G نشان می‌دهیم. G واقعاً یک گروه است زیرا:

۱) اگر $x, y \in G$ آنگاه $x_1, y_1 \in G$ وجود دارند به‌طوری که $xx_1 = 1$ و $yy_1 = 1$. لذا

$$.(xy)(y_1x_1) = x1_Rx_1 = xx_1 = 1_R \Rightarrow xy \in G$$

بنابراین G بسته است.

۲) خاصیت شرکت‌پذیری به طور ارثی از حلقه R به گروه G می‌رسد.

۳) G دارای عنصر همانی می‌باشد.

۴) هر عنصر G مانند x دارای معکوس در G است.

$$x \in G \Rightarrow x.x^{-1} = 1, \;\; x^{-1} \in G$$

تعریف ۴.۲.۱.

حلقه تعویض‌پذیر و یکدار R با خاصیت $1_R \neq 0$ و فاقد مقسوم‌علیه‌های صفر یک دامنه صحیح نامیده می‌شود. حلقه یکدار D با خاصیت $1_D \neq 0$ که در آن هر عنصر ناصفر یکه باشد یک حلقه تقسیم (بخشی) نام دارد. هر میدان یک حلقه تقسیم تعویض‌پذیر است.

تبصره ۵.۲.۱.

۱) هر دامنه صحیح و هر حلقه بخشی دست‌کم دو عنصر دارد (یعنی ۰ و 1_R).

۲) حلقه یکدار R یک حلقه تقسیم است اگر و فقط اگر عناصر ناصفر R تحت ضرب

تشکیل گروه دهند.

۳) هر میدان F یک دامنه صحیح است زیرا $ab = 0$ و $a \neq 0$ ایجاب می‌کند که

$$b = 1_F b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$$

تعریف ۶.۲.۱.

عنصری چون $a \in R$ پوچ‌توان نامیده می‌شود هرگاه عددی صحیح و مثبت مانند n وجود داشته باشد به طوری‌که $a^n = 0$.

تعریف ۷.۲.۱.

اندیس عنصر پوچ‌توان $x \in R$ عدد صحیح و مثبت n است که $x^n = 0$ و $x^{n-1} \neq 0$ و با $ind(x)$ نشان داده می‌شود. به ویژه صفر جمعی R، را پوچ‌توان از اندیس یک می گوییم. اندیس R را سوپریمم اندیس‌های همه پوچ‌توان‌های R تعریف می‌کنیم و با $ind(R)$ نشان می‌دهیم. اگر $ind(R)$ متناهی باشد، آنگاه گوییم R، اندیس کراندار است.

مثال ۸.۲.۱.

اندیس حلقه $\mathbb{Z}$ یک است زیرا تنها عضو پوچ‌توان $\mathbb{Z}$ صفر است پس $\mathbb{Z}$ اندیس کراندار است و در $\mathbb{Z}_8$ پوچ‌توان‌ها عبارتند از $0, 2, 4, 6$ و $ind(0) = 1$ ، $ind(2) = 3$ ، $ind(4) = 2$ ، $ind(6) = 3$. لذا $ind(\mathbb{Z}_8) = \max\{1, 2, 3\} = 3$. بنابراین $\mathbb{Z}_8$ اندیس کراندار است.

تعریف ۹.۲.۱.

عنصری چون e از حلقه R خودتوان نامیده می‌شود هرگاه $e = e^2$. حلقه‌ای مانند R که هر عضو آن خودتوان باشد حلقه بولی نام دارد.

یادآوری ۱۰.۲.۱.

توجه کنید که دو ایده‌آل از حلقه R عبارتند از خود R و ایده‌آل بدیهی (که با 0 نشان داده

می شود و فقط از عنصر صفر تشکیل شده است). نیز ایده‌آل (چپ) I از R که $I \neq R$ و $I \neq 0$ یک ایده‌آل (چپ) حقیقی نامیده می‌شود. پس ایده‌آل (چپ) ناصفر I از R حقیقی است اگر و فقط اگر شامل هیچ‌کدام از یکه‌های R نباشد.(زیرا هرگاه $u \in R$ یکه بوده، آنگاه $1_R = u^{-1}u \in I$ و این یعنی که $I = R$). به خصوص حلقه تقسیم D ایده‌آل چپ(راست) حقیقی ندارد زیرا هر عنصر ناصفر D یک یکه می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۱.

فرض کنید X زیر مجموعه‌ای از حلقه R است. همچنین $\{A_i : i \in I\}$ خانواده تمام ایده‌آل‌های (چپ) در R باشد که شامل X هستند. در این صورت $\bigcap_{i \in I} A_i$ ایده‌آل (چپ) تولید شده به‌وسیله X نام دارد که با (X) نشان داده می‌شود.

عناصر X مولدهای ایده‌آل (X) نامیده می‌شوند. هرگاه $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ آنگاه ایده‌آل (X) با $(x_1, \ldots, x_n)$ نشان داده می‌شود و گوییم با تولید متناهی است. ایده‌آل (x) تولید شده به‌وسیله یک عنصر یک ایده‌آل اصلی نام دارد و با Rx یا xR نیز نشان داده می شود. یک حلقه ایده‌آل اصلی حلقه‌ای است که در آن هر ایده‌آل اصلی است. یک حلقه ایده‌آل اصلی که دامنه صحیح باشد یک دامنه ایده‌آل اصلی نام دارد.

۱.۳ قضیه اساسی برای حلقه‌های متناهی و جابجایی

یادآوری می کنیم که ایده‌آل (چپ) M در حلقه R ماکزیمال است هرگاه $M \neq R$ و به‌ازای هر ایده‌آل (چپ) N از حلقه R که $M \subset N \subset R$، یا $N = M$ یا $N = R$.ایده‌آل P در حلقه R را اول گوییم هرگاه $P \neq R$ و به‌ازای ایده‌آل‌های A و B در R شرط زیر برقرار باشد.

$$AB \subseteq P \Longrightarrow A \subseteq P \text{ یا } B \subseteq P$$

و این شرط در حلقه‌های تعویض‌پذیر معادل است با این‌که، P اول است هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$ اگر داشته باشیم $ab \in P$، آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$. همچنین یادآور می‌شویم که هر ایده‌آل ماکزیمال در حلقه تعویض‌پذیر R ایده‌آلی اول است.

قضیه ۱.۳.۱.

در حلقه ناصفر و یکدار R، همواره ایده‌آل‌های ماکسیمال وجود دارند. در واقع هر ایده‌آل (چپ) در حلقه R (جز خود R) مشمول در ایده‌آلی (چپ) ماکسیمال است.

اثبات.

چون (0) یک ایده‌آل حلقه R است و $R \neq (0)$، لذا کافیست حکم دوم را اثبات کنیم. اثبات با استفاده از لم زورن است. فرض کنید A یک ایده‌آل چپ در حلقه R باشد به‌طوری که $A \neq R$. مجموعه S شامل تمام ایده‌آل‌های (چپ) مانند B در حلقه R به طوری که $A \subset B \neq R$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت S ناتهی است زیرا $A \in S$. رابطه شمول را بر مجموعه S در نظر می‌گیریم، (یعنی $B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_1 \subset B_2$). نشان می‌دهیم که هر زنجیر $C = \{C_i : i \in I\}$ از ایده‌آل‌های (چپ) در S کران بالایی در S دارد.

فرض کنید $\Omega = \bigcup_{i\in I} C_i$. ادعا می‌کنیم که Ω یک ایده‌آل چپ است. هرگاه $a, b \in \Omega$ آنگاه به‌ازای هر $i, j \in I$ ، $a \in C_i$ و $b \in C_j$. چون C یک زنجیر است پس $C_i \subset C_j$ یا $C_j \subset C_i$. فرض کنید $C_j \subset C_i$. در نتیجه $a, b \in C_i$. چون C_i یک ایده‌آل (چپ) است، پس $a - b \in \Omega$ و به‌ازای هر $r \in \Omega$ داریم $ra \in C_i$. بنابراین $a, b \in \Omega$ ایجاب می‌کند که $a - b \in C_i$ و $ra \in C_i$. چون $C_i \subset \Omega$ در نتیجه Ω یک ایده‌آل (چپ) است. چون به‌ازای هر i، $A \subset C_i$ در نتیجه $A \subset \bigcup_{i\in I} C_i = \Omega$ و چون به‌ازای هر $i \in I$، C_i در S است و $C_i \neq R$ در نتیجه به‌ازای هر $i \in I$، $1_R \notin C_i$ (در غیر این صورت $C_i = R$). بنابراین $1_R \notin \bigcup_{i\in I} C_i$ و در نتیجه $\Omega \neq R$. پس $\Omega \in S$. واضح است که Ω یک کران بالای زنجیر

C است. بنابراین باتوجه به لم زورن S دارای عضو ماکزیمال است. اما یک عنصر ماکزیمال S به وضوح یک ایده‌آل (چپ) ماکزیمال در R شامل A است.

تعریف ۲.۳.۱.

اشتراک تمام ایده‌آل‌های (چپ) ماکزیمال حلقه یکدار R را رادیکال ژاکوبسن R می‌نامیم و آن را با $J(R)$ یا J نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۱.

هرگاه $J = 0$ ، آنگاه حلقه R را حلقه نیم ساده (ژاکوبسن) می‌نامیم. هرگاه $J = R$، حلقه R را حلقه رادیکال می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱.

حلقه R را ساده گوییم هرگاه $R^2 \neq (0)$ و R ایده‌آل دو طرفه حقیقی نداشته باشد. حلقه موضعی R، یک حلقه جابجایی و یکدار R است که ایده‌آل ماکزیمال منحصر به فرد دارد.

تعریف ۵.۳.۱.

اگر I ایده‌آلی از حلقه R باشد تعریف می‌کنیم

$$rad(I) = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}$$

یا به طور معادل $rad(I)$ اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول از حلقه R است که I را شامل می‌شوند.

لم ۶.۳.۱.

اگر $1 - rt$ در حلقه R یکال باشد آنگاه $1 - tr$ نیز در حلقه R یکال است.