دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

سیستم‌های ریشه توسیع یافته بوسیله یک گروه آبلی و جبرهای لی مربوط به آنها

استاد راهنما :

دکتر محمّد شهریاری

استاد مشاور:

دکتر عظیم اهری

پژوهشگر:

ناصر یوسفی مراغه

شهریور ۱۳۸۷

بسْمِ اللّهِ الرّحْمنِ الرّحيم

تقدیم به:

مادر مهربان و پدر بزرگوارم

که فداکاری و محبت را در وجود آنها یافتم.

همسر عزیزم که وجودش آرامش است و امید به زندگی.

تقدیر و تشکر

سپاس یزدان پاک را که یاری نمود تا بتوانم از زحمات استاد بسیار عزیز و گرانقدرم **دکتر محمدشهریاری** که در راهنمایی و ارائه این پایان‌نامه همواره مرا مورد لطف و مساعدت بی‌دریغ خود قرار داده‌اند، تشکر نمایم.

وظیفه خود نیز می‌دانم از زحمات استاد عزیز، استاد عظیم اهری که مسئولیت استاد مشاور من را داشته‌اند کمال تشکر را داشته باشم.

از تمامی اساتید جبر دانشکده علوم‌ریاضی دانشگاه تبریز بویژه دکتر رضا نقی‌پور که در طول دوران تحصیل از راهنماییها و رهنمودهای آنها بهره‌مند گشته‌ام، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در تنظیم این پایان‌نامه زحمات و تلاشهای بسیاری از دوستان غیرقابل چشم‌پوشی است. بویژه از خواهرم زهره‌یوسفی و آقای اکبررجب زاده که با همراهیها و پشتیبانیهای بی‌دریغ خود همواره یار و یاورم بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

ناصر یوسفی

دانشگاه تبریز

شهریور ۱۳۸۷

نام خانوادگی دانشجو: یوسفی مراغه نام: ناصر
عنوان: سیستم‌های ریشه توسیع یافته بوسیله یک گروه آبلی و جبرهای لی مربوط به آنها
استاد راهنما : دکتر محمّد شهریاری استاد مشاور: دکتر عظیم اهری
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۸۶
کلید واژه‌ها: سیستمهای ریشه آفین تعمیم یافته، جبرهای لی (Δ, G)−مدرج

چکیده

سیستمهای ریشه توسیع یافته بوسیله گروه آبلی G و از نوع Δ نقش مهمی در جبرهای لی دارند. نشان می‌دهیم که جبرهای لی (Δ, G)−مدرج دارای سیستم ریشه توسیع یافته می‌باشند.

فصل اول به مطالعه جبرهای غیرشرکت‌پذیر و سیستمهای ریشه اختصاص دارد. در فصل دوم به مطالعه مفهوم نیم‌شبکه‌ها و سیستمهای ریشه توسیع یافته بوسیله گروه آبلی G و از نوع Δ می‌پردازیم و آنها را طبقه‌بندی می‌کنیم. و در فصل سوم جبر لی (Δ, G)−مدرج تقسیم را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که جبرهای لی (Δ, G)−مدرج تقسیم دارای سیستم ریشه توسیع یافته

می‌باشند و در آخر نیز جبرهای لی (B_l, G) مدرج را به ازای $l \geq 3$ طبقه‌بندی خواهیم کرد و نشان می‌دهیم که به ازای هر سیستم ریشه توسیع یافته بوسیله گروه آبلی و جمعی G و از نوع B_l، چنین جبرهای لی موجود است.

مقدمه

در این پایان‌نامه دو هدف را در پیش داریم. ابتدا باید مفهوم یک سیستم ریشه توسیع یافته بوسیله گروه آبلی G را توضیح دهیم. فرض کنیم G یک گروه آبلی و جمعی باشد و $R = \{S_\mu\}_{\mu\in\Delta}$، یک خانواده غیرتهی از زیرمجموعه‌های S_μ از G باشد که توسط مجموعه Δ اندیس‌گذاری شده است. حال زیرمجموعه $S_\mu.S_\nu$ از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_\mu.S_\nu \quad &:= S_\nu - <\nu,\mu> S_\mu \\ &= \{s - <\nu,\mu> s' | s \in S_\mu, s' \in S_\mu\} \end{aligned}$$

در این صورت R را یک سیستم ریشه از نوع Δ و توسیع یافته بوسیله گروه آبلی و جمعی G گوییم هرگاه سه اصل موضوعه زیر برقرار باشند:

(الف) $\cup_{\mu\in\Delta} S_\mu$ گروه آبلی G را تولید کند،

(ب) به ازای هر $\mu \in \Delta$، داشته باشیم: $0 \in S_\mu$،

(ج) به ازای هر $\mu, \nu \in \Delta$، داشته باشیم: $S_\mu \cdot S_\nu \subset S_{\sigma_\mu(\nu)}$،

مفهوم سیستم ریشه توسیع یافته، سیستم‌های ریشه آفین توسیع یافته را در بخشهایی از [7] و [18] تعمیم می‌دهد. به طور دقیق‌تر، سیستم‌های ریشه توسیع یافته بوسیلهٔ $\mathbb{Z}^n$ با سیستمهای سایتو[1] در [18] و سیستم‌های ریشه کاهشی توسیع یافته بوسیلهٔ $\mathbb{Z}^n$، با سیستمهایی که در [7] ارائه شده‌اند،

[1] Saito

متناظر می‌باشند. طبقه‌بندی این چنین سیستمهایی در واقع همان است که در [7] ارائه شده است. اما شبکه‌ها در فضای برداری می‌تواند هر گروه آبلی در طبقه‌بندیشان باشد و به نظر می‌رسد که این نوع تعریف و طبقه‌بندی خیلی ساده بوده و به آسانی قابل فهم می‌باشد.
به علاوه، نتیجه می‌شود که هر مجموعه خاصی از زیرمجموعه‌های تکیه‌گاه (support) از جبرهای لی (Δ, G)—مدرج یک سیستم ریشه توسیع یافته بوسیله گروه آبلی G می‌باشد.
بنابراین در این پایان‌نامه هدف ما آشنا کردن افراد با یک کلاس از جبرهای لی طبیعی مناسب و سیستمهای ریشه وابسته به آنها می‌باشد.
دومین هدف ما طبقه‌بندی جبرهای لی (B_l, G)—مدرج به ازای سیستم ریشه B_l که $l \geq 3$، می‌باشد. جبرهای لی (Δ, G)—مدرج با هسته جبرهای لی آفین تعمیم یافته (EALAS [2]) وقتی $G = \mathbb{Z}^n$، [24]، و با جبرهای لی ساده متناهی‌البعد وقتی که G بدیهی است، متناظر می‌باشد. این جبرهای لی به صورت $\Delta = A_l (l \geq 3), D_l, E_l$ در [22] و $\Delta = A_2$ وقتی که $G = \mathbb{Z}^n$ در [23] طبقه‌بندی می‌شوند. بنابراین مواردی از نوع A_1، B_l، C_l، F_4 و G_2 باز بوده‌اند. با بکار بردن قضیه تشخیص جبرهای لی B_l—مدرج توسط Zelmanov و Benkart، [13] و رسیدن در [9] به طبقه‌بندی هسته‌های (EALAS) از نوع B_l، باعث می‌شود که ما جبرهای لی (B_l, G)—مدرج و از نوع B_l را که $l \geq 3$، طبقه‌بندی کنیم. برای نوع B_2 این طبقه‌بندی مشکل می‌باشد.
ساختار این پایان‌نامه شامل موارد زیر است:
در فصل اول جبرهای غیرشرکت‌پذیر و سیستم ریشه را تعریف می‌کنیم و در فصل دوم سیستم ریشه توسیع یافته بوسیله گروه آبلی را توضیح داده و آنها را طبقه‌بندی می‌کنیم. و در فصل سوم نیز مفهوم جبرهای لی (Δ, G)—مدرج را بیان کرده و نشان می‌دهیم که این جبرهای لی (Δ, G)—مدرج دارای سیستم‌های ریشه توسیع یافته بوسیلهٔ گروه آبلی G می‌باشند و سرانجام

[2] Extended affine Lie algebras

جبرهای لی (B_l, G)—مدرج تقسیم را به ازای $l \geq 3$ طبقه‌بندی خواهیم کرد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و تعاریف

در این فصل، مفاهیم ضروری و اولیه را که در این پایان‌نامه به آنها نیازمندیم، بیان خواهیم کرد. ابتدا تعریف خود را از جبرهای غیرشرکت‌پذیر آغاز می‌کنیم. در این فصل ما میدان F را یک میدان با مشخصه صفر در نظر می‌گیریم،همه فضاهای برداری روی F در نظر گرفته می‌شوند، مگر اینکه غیر آن گفته شود. در بخش اول این فصل مفهوم جبرهای غیرشرکت‌پذیر، در بخش دوم تعریف سیستم ریشه و مفاهیم مربوط به آنها را بیان خواهیم کرد.

۱.۱ جبرهای غیرشرکت‌پذیر

یک جبر خطی (غیرشرکت‌پذیر) یا به طور ساده یک جبر $(A,.)$ روی میدان F، یک فضای برداری A روی میدان F همراه با یک حاصلضرب F—دوخطی $. : A \times A \to A$ می‌باشد.
اگر $(A,.)$ و $(B,*)$ جبرهای خطی باشند آنگاه تبدیل خطی $\varphi : A \to B$ را یک همومورفیسم جبری گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

مفاهیم مونومورفیسم، اپی‌مورفیسم، ایزومورفیسم و اندومورفیسم نیز به صورت معمول تعریف می‌شوند. برای راحتی کار به ازای هر $a, b \in A$، به جای $a \cdot b$ از نماد ab استفاده می‌کنیم. به ازای زیرمجموعه‌های غیرخالی A_1, A_2 از A تعریف می‌کنیم:

$$A_1 \cdot A_2 := span_F\{a_1a_2|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

اگر $\{A_j\}_{j\in J}$ یک خانواده از جبرها باشد، در این صورت فضای برداری $\bigoplus_{j\in J} A_j$ نیز با ضرب زیر یک جبر روی میدان F می‌باشد.

$$(\sum_{j\in J} a_j)(\sum_{j\in J} b_j) := \sum_{j\in J} a_jb_j \qquad a_j, b_j \in A_j, j \in J \text{ ،}$$

این جبر را حاصل جمع مستقیم جبرهای A_j گوییم. جبر A را یکدار گوییم، هرگاه عضو منحصر به فردی مانند $1_A \in A$ موجود باشد بطوریکه

$$1_A \cdot x = x \cdot 1_A = x \quad , \quad x \in A \text{ .}$$

عنصر x از جبر یکدار A را معکوس پذیر گوییم، هر گاه عضو منحصر به فردی مانند $x^{-1} \in A$ موجود باشد بطوریکه $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_A$. برای جبر $(A, .)$، مفاهیم جابجاگر و شرکت‌پذیرنده (associtar) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x, y] := x \cdot y - y \cdot x \text{ ،} \tag{۱.۱}$$

$$(x, y, z) := (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) \quad , \quad x, y, z \in A \text{ .} \tag{۲.۱}$$

مجموعه

$$NUC(A) := \{a \in A|(a, A, A) = (A, a, A) = (A, A, a) = \{0\}\}$$

را هسته جبر A گوییم و به ازای هر زیرمجموعه غیرخالی B از A، مجموعه $C_A(B) = \{a \in A | [a, B] = \{0\}\}$ را مرکزساز B در A گوییم و مجموعه $Z(A) := C_A(A)$ را مرکز جبر A گوییم. جبر A را جابجایی گوییم، هرگاه $Z(A) = A$. و آن را شرکت‌پذیر گوییم، هرگاه $NUC(A) = A$.

به ازای هر $x \in A$، L_x و R_x را به ترتیب حاصل ضرب چپ و حاصل ضرب راست x روی A گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y \in A \quad \text{و} \quad R_x : A \to A \quad \text{و} \quad L_x : A \to A$$
$$R_x(y) = yx \qquad L_x(y) = xy$$

زیر فضای B از جبر A را یک زیرجبر A گوییم، هرگاه B تحت ضرب A بسته باشد. زیرفضای I از A را ایده‌آل راست (یا ایده‌آل چپ) A گوییم هرگاه:
به ازای $x \in I$ و $y \in A$، $x \cdot y \in I$, $(y \cdot x \in I)$.

جبر A را جبر آبلی گوییم، هر گاه به ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$[x, y] = 0$$

جبر غیرآبلی A را ساده گوییم، هرگاه ایده‌آلهای آن فقط صفر و A باشند.

تبدیل خطی $f : A \to A$ را یک توان یابی (involution) گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:
به ازای هر $a, b \in A$، $f(a \cdot b) = f(b) \cdot f(a)$ و $f^2 = id_A$.

۱.۱.۱– مثال :

(۱): فرض کنیم $(A,.)$ یک جبر باشد. فضای برداری A به همراه حاصلضرب $ab = b \cdot a$ به ازای هر $a,b \in A$، یک جبر است که آن را یک جبر متقابل A گوییم. جبر متقابل A را با علامت A^{op} نشان می‌دهیم.

(۲): (جبر اندومورفیسمها) فضای برداری $End_F(V)$ متشکل از تبدیلات F–خطی روی فضای برداری V یک جبر شرکت‌پذیر می‌باشد که ضرب آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

به ازای هر $f,g \in End_F(V)$، (ترکیب نگاشتها) $f.g = fog$

۲.۱.۱– تعریف : فرض کنید A یک جبر و V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، اگر نگاشتی مانند

$$A \times V \to V$$

$$(x,v) \to x \cdot v$$

موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x,y \in A$ و هر $v,v' \in V$ و هر $\lambda \in F$ داشته باشیم:

(I) $x.(v+v') = x.v + x.v'$،

(II) $(x+y).v = x.v + y.v$،

(III) $x.(\lambda v) = (\lambda x).v = \lambda(x.v)$،

در این صورت V را یک A—مدول گوییم.

۳.۱.۱– تعریف: اگر A یک جبر شرکت‌پذیریکدار و V یک فضای برداری باشد، هر هوموموفیسم $\phi : A \to End_F(V)$، را یک نمایش A روی V گوییم.

اگر $\phi : A \to End_F(V)$ یک نمایش باشد، در این صورت V باضرب زیر یک A—مدول می‌باشد:

$$a \cdot v = \phi(a)(v) \qquad a \in A \text{ و } v \in V$$

۴.۱.۱– تعریف: زیرفضای V' از فضای برداری V را یک زیرمدول V گوییم، هرگاه به ازای هر $a \in A$ و $v \in V'$، داشته باشیم:

$$a \cdot v \in V'$$

۵.۱.۱– تعریف: یک جبر لی روی میدان F (یا یک F—جبر لی)، یک F—فضای برداری مانند L به همراه یک ضرب براکت (براکت لی) مانند $[,] : L \times L \to L$ است، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(I) به ازای هر $x, y \in L$، $[x, y] = -[y, x]$،

(II) به ازای هر $x, y, z \in L$، اتحاد ژاکوبی برقرار باشد، یعنی

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$$

به ازای اعضای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در جبر لی L، قرار می‌دهیم:

$$[x_n, \ldots, x_1] := [x_n, \ldots, [x_3, [x_2, x_1], \ldots] \text{ ،}$$

که در این صورت، $[x_n, \ldots, x_1] \in L$. اگر به ازای هر $x, y \in L$، داشته باشیم $[x, y] = 0$، در این صورت L را جبر لی آبلی گوییم. جبر لی L را بدون مرکز گوییم هرگاه:

$$Z(L) = \{0\}$$

زیرفضای S از جبر لی L را یک زیرجبر لی از L گوییم و می‌نویسیم $S \leq_{Lie} L$، هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$[x, y] \in S.$$

۶.۱.۱–لم :اگر A یک جبر شرکت‌پذیر روی میدان F باشد، در این صورت $(A, [\cdot, \cdot])$ با تعریف زیر تبدیل به جبر لی می‌شود:

به ازای هر $x, y \in A$ $\quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$.

اثبات:

لم (۲.۱) از منبع [۳].

۷.۱.۱– مثال (۱) :

اگر A یک جبر شرکت‌پذیر باشد. آنگاه $(A, [\cdot, \cdot])$ یک جبر لی است که به صورت Lie(A) نمایش

داده می‌شود. بویژه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $Lie(M_n(A))$ یک جبر لی است که به صورت $gl_n(A)$ نشان می‌دهیم. و نیز اگر V فضای برداری باشد،آنگاه $gl(V) := Lie(End_F(V))$ یک جبر لی است که آن را جبر لی خطی عام گوییم.

مثال (۲):

فرض کنیم A یک جبر شرکت‌پذیر و n یک عدد صحیح مثبت باشد، $sl_n(A) := \{X \in M_n(A) | tr(X) = 0\}$ یک زیرجبر از $gl_n(A)$ می‌باشد. در حالت خاص اگر $A = F$ باشد، $sl_n(A)$ را جبرلی خطی خاص گوییم و برای $n = 2$ داریم:

$$sl_2(F) = Fe \oplus Fh \oplus Ff$$

که در آن

$$,e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

براحتی می‌توان مشاهده کرد که

$$. \quad [h,e] = 2e \quad , \quad [e,f] = h \quad , \quad ,[h,f] = -2f \tag{۳.۱}$$

سه‌تایی (e,h,f) از اعضای جبرلی L را یک sl_2—سه‌تایی گوییم هرگاه شرایط (۳.۱) برقرار باشد.

۲.۱ سیستم ریشه

فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد.(یعنی E یک فضای برداری حقیقی (روی میدان $\mathbb{R}$) و با یک فرم دوخطی، متقارن و معین مثبت $(\cdot,\cdot)$ باشد.) فرض کنیم $0 \neq \alpha \in E$ باشد، زیرفضایی از E به صورت زیر موجود می‌باشد،

$$P_\alpha = \{\beta \in E | (\alpha, \beta) = 0\}.$$

در این‌صورت P_α یک ابرصفحه می‌باشد و $P_\alpha \leq E$. اگر $0 \neq \alpha \in E$ باشد نگاشت $\sigma_\alpha : E \to E$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_\alpha : E \to E$$

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \qquad \text{به ازای هر } \beta \in E$$

σ_α نگاشت انعکاس نسبت به صفحه P_α می‌باشد و داریم:

(i) به ازای هر $\alpha \in E$، $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

(ii) به ازای هر $\alpha \in E$ و هر $\beta \in P_\alpha$، $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$.

حال به ازای هر $\alpha, \beta \in E$، قرار می‌دهیم $< \beta, \alpha > := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$، پس خواهیم داشت:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - < \beta, \alpha > \alpha \quad .$$

۱.۲.۱ – تعریف: فرض کنیم Δ زیرمجموعه‌ای غیرتهی از فضای اقلیدسی E باشد، Δ را یک سیستم ریشه متناهی در E گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(I) Δ متناهی و $0 \notin \Delta$ باشد و Δ، فضای E را تولید کند.

(II) اگر $\alpha \in \Delta$ و $\lambda\alpha \in \Delta$،آنگاه $\lambda = \pm 1$.

(III) اگر $\alpha \in \Delta$، آنگاه $\sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$.

(IV) اگر $\beta \in \Delta$ و $\alpha \in \Delta$، آنگاه $< \beta, \alpha > \in \mathbb{Z}$.

هر عنصر Δ را یک ریشه گوییم. اگر $\Delta \subset E$ و $\Delta' \subset E'$ دو سیستم ریشه باشند، این دو سیستم ریشه را ایزومورف گوییم، هرگاه یک نگاشت ایزومورفیسم مانند $f : E \to E'$ موجود باشد بطوریکه $f(\Delta) = \Delta'$ و به ازای هر $\alpha, \beta \in \Delta$، $< \beta, \alpha > = < f(\beta), f(\alpha) >$. اگر $f : E \to E$ یک اتومورفیسم فضای برداری باشد بطوریکه $f(\Delta) = \Delta$ و به ازای هر $\alpha, \beta \in \Delta$، $< \beta, \alpha > = < f(\beta), f(\alpha) >$، در این صورت f را یک اتومورفیسم سیستم ریشه گوییم. بعد فضای اقلیدسی E را رتبه سیستم ریشه Δ گوییم. طول ریشه $\alpha \in \Delta$ را به‌صورت $(\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کنیم و با $|\alpha|$ نشان می‌دهیم.

۲.۲.۱– تعریف: فرض کنیم L یک جبر لی با بعد متناهی باشد، فرم دوخطی K را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K : L \times L \to F$$

$$K(x, y) = Tr(adx, ady) \quad x, y \in L$$

فرم K را فرم کیلنیگ جبر لی L می‌گوییم. فرم کیلنیگ داری خواص زیر است:

(i) فرمی دوخطی است.

(ii) فرم متقارن است.