دانشگاه علامه طباطبائی
دانشکده‌ی اقتصاد
گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد **ریاضیات مالی**

عنوان

حرکت براونی کسری و کاربردهای آن در مالی

پژوهش‌گر

بابک جمشیدی زرگران

استاد راهنما

دکتر محمد جلوداری ممقانی

استاد مشاور

دکتر رضا پورطاهری

بهمن ماه ۱۳۸۹

تأیید پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشدتوسط دانشجو

عنوان پایان‌نامه: حرکت براونی کسری و کاربردهای آن در مالی

نام دانشجو: بابک جمشیدی زرگران

شماره‌ی دانشجویی: ۸۷۱۶۰۰۲۰۳

استاد راهنما: دکتر محمد جلوداری ممقانی

این‌جانب **بابک جمشیدی زرگران** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **ریاضیات مالی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارایه شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص این‌جانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید می‌باشد. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط این‌جانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارایه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به‌طور کامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده گردد خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

تاریخ: **امضا دانشجو:**

تقدیم به تو.
تو از رویای من پر نسترن تر.

پیش تر از همه از خانواده‌ی عزیزم که همواره بی دریغ یاور و پشتیبانم بوده اند، از پدرم، مادرم که فداکارانه خودشان را وقف آینده‌ی فرزندانشان نموده‌اند، از خواهران عزیز و مهربانم آرزو و زهرا و از برادرم شهریار که با تلاش خود امید بخش و قدردان عزیزانمان است، بی نهایت سپاسگزارم امید است که بتوانم از عهده‌ی جبران خوبی‌هایشان برآیم.

از دوستان محترمم آقایان ابراهیم تالانه و حسین ملکی زارکویی به پاس توصیه های دلسوزانه، کمک‌های بی دریغ و مهربانی همواره‌ی ایشان نسبت به اینجانب سپاسگزارم.

از جناب آقای ابراهیم موسوی که با یاری برادرانه در حل مشکلم به نوعی یاری‌گر آغاز کار پایان‌نامه بودند، از آقایان سجاد عباسی، فرهاد گراوند، محسن کاکاوندی و آزاد شیخی، که دلسوزانه پشتیبانم بوده‌اند، از هم اتاقیان محترم، آقایان علی جوانمرد، سلمان حسینی، محمد ابیض، محمد آرمیده و رضا بهرامسری که مزاحمت‌های این مدت را دوستانه تحمل نمودند، از آقای ایرج محجوب نیا جهت برطرف نمودن مشکلات آشنایی با نرم‌افزار، از دوستانی که در تهیه‌ی کتاب ها و مقالات مورد نیاز یاری رسانم بودند، خانم نغمه آزادفر، آقایان رضا کاکاوندی، سعید قاسم‌خانی، عادل قنبرپور، کامران سلمانی، محمدرضا بهمرد و محمد کریمی صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

از اساتید گرانقدر دست اندرکار پایان‌نامه که مهربانانه و صمیمانه دوشادوش، با صرف دقت، زمان و زحمات فراوان کار را آنچنان که باید سامان بخشیدند، اساتید محترم دانشگاه علامه طباطبایی، دکتر محمد جلوداری ممقانی راهنمای محترم پایان نامه، دکتر رضا پورطاهری مشاور ارجمند، دکتر عبدالرحیم بادامچی‌زاده نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی و دکتر محمدرضا صالحی راد داور جلسه‌ی دفاع نهایت تشکر را دارم.

بر خود می‌دانم از دیگر اساتید گرامم در طول دوره‌ی کاشناسی ارشد آقایان حسین بهزادی، عبدالساده نیسی و مسعود درخشان کمال تشکر را داشته باشم.

...و همسفر دیروز و امروز و فرداهایم،

همیشه یاور و همواره تنها   میان خواری‌ام مغرور و والا
به این روزان نشد پاست بدارم   به دلخواهم سپاست را گزارم
سپارم جان به راه شادمانیت   به خرسندی تو از زندگانیت
...
خداگونه سپاست می‌گزارم   هزاران بوسه بر دست بهارم.

بابک جمشیدی زرگران

بهمن‌ماه ۱۳۸۹

فهرست مطالب

نمادها و علامت‌های اختصاری

تعریف	نماد
$\hat{\beta}$ را تعریف می‌کنیم	$\hat{\beta} := \ldots$
تابع گاما	$\Gamma(.)$
تابع بتا	$\beta(.,.)$
nفاکتوریل	$n!$
یکه‌ی موهومی	i
تابع وایراشتراس	$\psi^*(.)$
مجموعه‌ی تهی	ϕ
فضای نمونه	Ω, Ψ
σ-میدان	$\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{M}, \mathscr{N}$
تابع احتمال	P, Q
اندازه	μ, ν
فضای احتمال	$(\Omega, \mathscr{F}, P)$
احتمال A به شرط B	$P(A\|B)$
مجموعه‌ی اعداد حقیقی، طبیعی و صحیح	$\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$
تابع نشانگر مجموعه‌ی A	۱_A
نقش وارون مجموعه‌ی A -برای تابع f	$f^{-۱}(A)$
امید ریاضی متغیر تصادفی A	$E[X], E(X)$
قسمت مثبت تابع X	X^+, X_+
قسمت منفی تابع X	X^-, X_-
تابع توزیع متغیر تصادفی $f(.)$	$F(.)$
توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$	$N(\mu, \sigma^۲)$
زمان توقف	τ, T

پیشامد	Λ, A
برامد -در مورد فرایندها نماد مسیر است.-	ω
امید ریاضی متغیر تصادفی X به شرط $\mathscr{G}$	$E[X\|\mathscr{G}]$
فرایند براونی	W_t
مجموعه‌ی توابع کادلاگ از E به M	$D(E,M)$
ضرب داخلی در فضای S	$< .,. >_S$
نرم	$\\|.\\|$
سبد مالی	φ
میزان سرمایه گذاری در بانک، تعداد سهام و ارزش سبد	β_t, γ_t, V_t
ارزش یک واحد پول در زمان t	s_t
ارزش یک واحد سهام در زمان t	S_t
مجموعه‌ی استراتژی‌های مجاز در بازار	$\mathscr{A}$
فرایند براونی کسری با پارامتر هرست H	B_t^H
کوواریانس متغیرهای تصادفی X_t و X_s	$\rho_{t-s}, R_{t-s}^X, R_{t,s}, R_{(t,s)}$
کوواریانس متغیرهای تصادفی	$Cov(.,.)$
کوواریانس متغیرهای تصادفی B_t^H و B_s^H	$R_{t,s}^H$
مقدار تابع f در نقطه‌ی t	$f_t, f(t)$
گشتاور n-ام توزیع نرمال استاندارد حول مبدا	μ_N^n
اندازه‌ی افراز π	$\|\pi\|$
p-تغییرات تابع f در طول افراز π	$v^p(f,\pi)$
p-تغییرات تابع f	$v_\bullet^p(f)$
بیشینه‌ی p-تغییرات تابع f	$v^p(f)$
اندیس تغییرات تابع f	$v(f)$
انتگرال ایتوی نسبت به حرکت براونی روی مجموعه‌ی A	$\int_A f dW_t$
هسته	$K_{t,s}^H$
همراه هسته	$^*K_{t,s}^H$
ثابت‌های معینی هستند.	$b_H, c_H, \ldots$
تقریبا به طور حتم	$a.s$
فرایند قدم زدن تصادفی همبسته با ماندگاری P	X^P

قدم n-ام تصادفی همبسته با ماندگاری P .... ε_n^P

فرایند قدم زدن تصادفی همبسته‌ی جایگزین با ماندگاری P .... $\tilde{X}^P$

قدم n-ام تصادفی همبسته‌ی جایگزین با ماندگاری P .... $\tilde{\varepsilon}_n^P$

تصحیح فرایند قدم زدن تصادفی همبسته‌ی جایگزین با ماندگاری P .... Y^P

قدم n-ام تصادفی همبسته‌ی جایگزین با ماندگاری P تصحیح شده .... δ_n^P

فضای تعریف شده در زیربخش تعاریف احتمال .... $L^p(a,b)$

انتگرال کسری-چپ/راست- مرتبه‌ی α تابع f بر یک بازه .... $I_{a\pm}^{\alpha}f(x)$

مشتق کسری-چپ/راست- مرتبه‌ی α تابع f بر یک بازه .... $D_{a\pm}^{\alpha}f(x)$

انتگرال نوع وینر نسبت به حرکت براونی کسری تابع f روی مجموعه‌ی A .... $\int_A f dB_t^H$

مجموعه‌ی توابع پله‌ای .... $\mathscr{E}$

بستار مجموعه‌ی A .... $\overline{A}$

بستار گستره‌ی متناظر با فرایند .... $\mathscr{H}_1(.)$

فضای هیلبرت هسته‌ی باز تولیدکننده‌ی فرایند .... $\mathscr{H}(.)$

مجموعه‌ی توابع پیوسته‌ی γ-هولدر .... C^{γ}

انتگرال اسکوروخود f نسبت به B_s^H .... $\int_0^T f_s \delta B_s^H$

انتگرال متقارن مسیری نسبت به B_s^H .... $\int_0^T u(s)d^{\circ}B_s^H$

انتگرال مسیری پیشرو نسبت به B_s^H .... $\int_0^T u(s)d^{-}B_s^H$

انتگرال مسیری پسرو نسبت به B_s^H .... $\int_0^T u(s)d^{+}B_s^H$

هم‌تغییرات دو فرایند X و Y .... $[X,Y]_t$

نمایی ویک فرایند .... $\varepsilon(.)$

انتگرال ویک نسبت به B_s^H .... $\int_0^T u(s)d^{\diamond}B_s^H$

مجموعه ی تمام سبدهای نا شکننده ی مجاز .... $\mathscr{A}^{nds}$

مجموعه ی تمام سبدهای ساده و خودبرآور .... $\mathscr{A}^{si}$

چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی‌یک فرایند تصادفی با نام فرایند براونی کسری می‌پردازیم. این فرایند نموهای مانا، وابستگی دور برد دارد و خودسان است، که با واقعیت‌های بازار سازگارند. این همخوانی باعث شد که این فرآیند به‌منظور ارایه‌ی مدلی برای توصیف حرکت قیمت سهام در بازار مورد توجه قرار گیرد. کاری که نخستین بار در بورس پاریس، بشیلیه با استفاده از فرایند براونی –که این فرایند تعمیمی از آن است– انجام داده بود.

برای تحلیل عملکرد هر مدل در بازار، تعریف حساب دیفرانسیل و انتگرال با توجه به آن فرایند لازم است. با توجه به اینکه این فرایند، –جز در حالت براونی– نیمه مارتینگل نمی‌باشد لذا حساب دیفرانسیل و انتگرال ایتو برای این فرایند مناسب نیست و باید به معرفی انتگرال و مشتق‌تصادفی پرداخت. حساب دیفرانسیل و انتگرال مسیری، در بازاری که تغییرات لگاریتم قیمت سهام تابع این فرایند است، منجر به وجود آربیتراژ می‌شود. بنابرنیمه‌مارتینگل نبودن این حرکت، در بازاری که قیمت‌های آن تابع مدل بلک–شولز کسری است، آربیتراژ وجود دارد مثال‌هایی از آربیتراژ ارائه می‌شود. وجود آربیتراژ در مدل معمولا باعث کناررفتن مدل می‌شود. اما سادگی و در عین حال توانایی‌هایی نظیر خودسان بودن و وابستگی دوربرد، مالی دانان و متخصصین آنالیز تصادفی را بر آن داشت که به فکر چاره‌ای برای حفظ این حرکت در بازارهای مالی باشند.

در ادامه راهکارهای ارائه شده در این راستا، که بر سه دسته اند(تغییر در مدل، تعریف انتگرال تصادفی جایگزین، محدود کردن استراتژی های در دسترس در بازار) تشریح می‌شوند.

در پایان اختیارات خرید و اختیارات فروش اروپایی را در بازاری که تغییرات قیمت‌های آن تابع مدل بلک–شولز کسری است قیمت گذاری می‌کنیم. کاری که نخستین بار در سال ۱۹۷۳ به وسیله‌ی بلک–شولز و مرتون در فضای براونی ارایه شده است.

واژگان کلیدی. *حرکت براونی کسری، انتگرال های تصادفی، آربیتراژ، خودسان بودن، وابستگی دور برد، نیمه مارتینگل، پارامتر هرست*

فصل ۱
کلیات

آری، گاهی اندیشه ای که هرزه گرد تر از آن نباشد، انگیزه ای که سخت شدنی می انگارد...تازه از این هم بیشتر: در جایی که چنین اندیشه ای با آرزویی قوی و پر شور جفت می شود، آدم چه بسا آن را محتوم و ناگزیر و حکم ازلی بپندارد و وقوع آن را حتمی و مقدور بداند! شاید از این هم باز بیشتر، نوعی الهام، نوعی کوشش فوق العاده ی اراده، که تخیل آگین شده باشد، یا باز هم چیز دیگری...

قمارباز، فئودور داستایفسکی [۱]

۱-۱ مقدمه

در کنار میز قمار که زادگاه احتمال کلاسیک است همچون دنیای روحانی کارل گوستاو یونگ، [۲] احساسات قوی و ناشناخته -اما مسموم- خوابیده اند.
پیشامد های تصادفی و غیرقطعی هماره دغدغه ی ذهن و سرچشمه ی ترس بشر روزگاران نخستین و یکی از ریشه های پناه به نیروهای برتر و پرستش بوده است. بدین اسباب توانایی پیش بینی و کنترل پیشامد های تصادفی از دیرباز آرزوی بشر بوده تا اینکه در عصر روشنگری تاس و ورق پرسش ذهن ریاضیدانان شدند و احتمال کلاسیک پا به عرصه ی هستی نهاد.

[۱] Fyodor Dostoevsky
[۲] Carl Gustav Jung

دنیای احتمال کلاسیک با فرایند تصادفی قمار آغاز می شود و با فرایند تصادفی قیمت سهام -تقریبا- پایان می یابد. کولموگوروف [۳] اصول موضوعه ی احتمال را ارایه داد و ایتو [۴] بر پایه کار گذشتگان ساختمان انتگرال های تصادفی را بنیان نهاد.
ساده ترین فرایند ها پیش تر از بقیه راهشان را به کاربردها باز کردند، قدم زدن تصادفی، سری های زمانی و فرایند براونی [۵].
فرایند براونی آشناترین نام در میان فرایندهای پیوسته زمان است که ساده و پرکاربرد است و برای پیش بینی قیمت ها تا دو دهه در بازارهای مالی حرف اول را می زد .اما به‌خاطر همین ویژگی های ساده برای بیان واقعیت توانایی هایش نیز محدود است. یکی از این ضعف ها بی حافظگی این فرایند است. در بازاری که حافظه داشتن قیمت ها بر هر خبره ای مشهود است. این ضعف باعث شد که برای مدل‌سازی قیمت ها چاره جویی کنند و چه گزینه ای بهتر از حرکت براونی کسری، نخستین گزینه ای که به ذهن هر ریاضیدان می رسد تعمیم و تحدید.
حرکت براونی کسری نخستین بار توسط کولموگوروف [۴۰] معرفی شد. وی به سال ۱۹۴۰ طی مدلی برای آشوب [۶] در چارچوب فضای هیلبرت [۷] از این مدل استفاده کرد. وی این حرکت را مارپیچ وینر [۸] نامید و با استفاده از ویژگی خودسانی این حرکت، تابع کوواریانس آن را به دست آورد.
پس از کولموگوروف کارهای فراوانی در این زمینه صورت گرفت که برجسته ترین آن‌ها به قرار زیر هستند: به سال ۱۹۵۱ ، هانت [۳۷] که بر روی همگرایی تقریبا همه جای سری های فوریه [۹] ی تصادفی و استانداردهای [۱۰] پیوستگی آن‌ها کار می کرد—به زبان امروزی- به یک نمایش طیفی از حرکت براونی کسری رسید. هانت نتایجی راجع به پیوستگی هولدر [۱۱] گونه ی (تعریف ۲۳-۱) حرکت براونی کسری اثبات نمود. پس از آن لوی [۴۳] به سال ۱۹۵۳ زیر عنوان توابع تصادفی، به معرفی حرکتی پرداخت که امروزه حرکت براونی کسری لوی نامیده می شود. این فرایند که از انتگرال کسری ریمان-لیوویل [۱۲] حرکت براونی کلاسیک حاصل می شود و به همین خاطر فرایند ریمان-لیوویل نیز نامیده می شود، شباهت های فراوانی با حرکت براونی کسری دارد اما از برخی جهات با آن متفاوت است، برای مثال نموهایش مانا نیست. به سال ۱۹۵۸ یاگلوم [۷۱] حین تحقیقاتش با محوریت تعمیم فرایندهای مانا، تعریف فرایندهای با نموهای n-ام مانا را معرفی کرد و از این حرکت به عنوان مثالی از فرایند با نموهای یکم مانا استفاده نمود. لامپرتی [۴۲] طی مقاله ای با عنوان

[۳] - Kolmogorov
[۴] - Ito
[۵] - Brownian
[۶] turbulance
[۷] - Hilbert
[۸] - Wiener spiral
[۹] -Fourier
[۱۰] - modulus
[۱۱] - Holder
[۱۲] - Riemann-Louville

فرایندهای تصادفی نیمه پایدار [۱۳] -امروزه این فرایندهای تصادفی را خودسان می گویند.- که سال ۱۹۶۲ چاپ شد، فرایند براونی کسری را نمونه ای از فرایندهای تصادفی نیمه پایدار گاوسی [۱۴] برشمرد. لامپرتی به این موضوع نیز اشاره داشت که این حرکت جز در حالت کلاسیک، مارکوفی [۱۵] نیست. مالکان و گولوسوف [۴۹] با استفاده از فرایند های تصادفی تعمیم یافته—بنا بر تعریف گل فاند [۱۶] -ایتو - بر روی مشتق حرکت براونی کسری مطالعاتی انجام دادند که امروزه نوفه [۱۷] ی گاوسی کسری یا نوفه ی سفید کسری نامیده می شوند. اما موثرترین کار در سال ۱۹۶۸ توسط فان نس و مندلبروت [۴۷] صورت گرفت. آنان طی مقاله ای با عنوان "حرکت براونی کسری، نوفه های کسری و کاربرد آن ها"، حرکت براونی کسری را به عنوان انتگرال کسری حرکت براونی استانده معرفی نمودند و به خاطر همین کار نیز این حرکت نام "حرکت براونی کسری" به خود گرفت. همچنین پارامتر هرست [۱۸] -به پاس خدمات متخصص انگلیسی آب شناسی که بر روی ارتفاع سطح آب رود نیل [۱۹] و بررسی حافظه ی سری آن تحقیقاتی را انجام داد.- نیز از طریق این کار معرفی گردید. درواقع پس از کارهای فان نس و مندلبروت این حرکت دیگر ناشناخته نبود. ناگفته نماند جدا از کاربردها، حرکت براونی کسری از ساده ترین فرایندهایی است که نه مارکوفی اند و نه گاوسی و این موضوع یکی از جاذبه های این فرایند است. در زمینه ی کاربرد در بازار های مالی، سال ۱۹۶۴ مندلبروت برای نخستین بار از این فرایند برای مدل بندی برخی داده های اقتصادی بهره برد. پس از سقوط بازار در سال ۱۹۸۷، توجه بسیاری به این نکته بیش از پیش معطوف شد که فرایند های مالی کاملا مارکوفی یا گاوسی نیستند و وابستگی به تاریخچه از جمله وابستگی به صورت دور برد مطرح شد. اینچنین کم کم پای حرکت براونی کسری به بازارهای مالی کشیده شد.

سری های زمانی مالی، نوسانات در جامدات [۲۰] ، آب شناسی [۲۱] ، ارتباطات راه دور [۲۲] از مواردی هستند که حرکت براونی کسری در آن‌ها کاربرد دارد.

۱-۲ تعریف مفهوم‌ها و واژه های اساسی

در این بخش برخی از مفهوم‌های پایه ای به کار رفته در این پایان نامه را معرفی می کنیم. مرجع اصلی این تعریف‌ها، [۳]، [۶]، [۱۵]، [۱۶]، [۲۸] و [۶۶] می‌باشند.

[۱۳] -semi-stable
[۱۴] - Gaussian
[۱۵] - Markovian
[۱۶] - Gel fand
[۱۷] - Noise
[۱۸] - Hurst
[۱۹] - Nile
[۲۰] fluctuations in solid
[۲۱] Hydrology
[۲۲] Telecommunication

۱-۲-۱ تعریف‌های آنالیز ریاضی

تابع ساده

تابعی را که تصویر آن مجموعه ای متناهی باشد، تابع ساده گویند.

تابع نشانگر

تابع $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ که برای $\omega \in A$ مقدار یک، و برای $\omega \notin A$، مقدار صفر را می گیرد.

تابع گاما

برای هر $x \geq 0$ مقدار تابع گاما(Γ) از رابطه ی زیر محاسبه می شود

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{۱-۲-۱}$$

تابع بتا

برای $a > 0$ و $b > 0$ تابع بتا $\beta(a,b)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx. \tag{۲-۲-۱}$$

رابطه ی $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ بین توابع β و Γ برقرار است.

فرمول استرلینگ [۲۳]

برای مقادیر بزرگ و طبیعی n رابطه ی زیر موسوم به فرمول استرلینگ برقرار است.

$$\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \cong \Gamma(n+1) = n! \tag{۳-۲-۱}$$

به‌طور موضعی کراندار

یک تابع مختلط-مقدار در یک فضای توپولوژیک X به‌طور موضعی کراندار گفته می شود اگر برای هر $x_0 \in X$ یک همسایگی A از x_0 باشد که $f(A)$ یک مجموعه ی کراندار باشد.

تابع معین نامنفی

تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را معین نامنفی گویند اگر برای هر مجموعه ی متناهی از عناصر $u_1, u_2, \ldots, u_n$ و $v_1, v_2, \ldots, v_n$ و هر تابع مختلط h داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g(u_i - v_j) h(u_i) \overline{h(v_j)} \geq 0 \tag{۴-۲-۱}$$

[۲۳] Stirling

که در آن $\overline{h(.)}$ مزدوج تابع $h(.)$ است.

تابع محدب

تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ را محدب گویند اگر برای هر x و y و به ازای هر $0<\lambda<1$، در رابطه ی زیر صدق کند

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \tag{۱-۲-۵}$$

تابع وایراشتراس

تابع $\psi(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\frac{\alpha}{2}n}e^{i(2^n t)}$* را تابع وایراشتراس [۲۴] گویند.

تابع جدایی پذیر

اگر D زیرمجموعه ی شمارای چگال از بازه ی حقیقی T باشد تابع حقیقی X روی بازه ی T، D جدایی پذیر است اگر برای هر $t\in T$ دنباله ی $t_1,t_2,\ldots$ از نقاط D وجود داشته باشند به‌طوریکه که

$$t_n\longrightarrow t. \tag{۱-۲-۶}$$

و

$$X(t_n)\longrightarrow X(t). \tag{۱-۲-۷}$$

۱-۲-۲ تعریف‌های احتمال

σ-میدان

مجموعه ی ناتهی $\mathscr{F}$ از زیر مجموعه های Ω را یک σ-میدان می گوییم اگر

الف: $\phi\in\mathscr{F}$.

ب: اگر $A\in\mathscr{F}$ آنگاه $A^c\in\mathscr{F}$.

پ: برای مجموعه ی اندیس گذار شمارای I ، اگر $A_i\in\mathscr{F}$ $i\in I$، آنگاه

$$\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathscr{F}. \tag{۱-۲-۸}$$

فضای اندازه

فرض کنید Ω یک مجموعه ی ناتهی و $\mathscr{F}$ یک σ-میدان از زیر مجموعه های آن باشد. جفت مرتب $(\Omega,\mathscr{F})$ را یک فضای اندازه پذیر گویند.

[۲۴] Weierstrass

احتمال

تابع مجموعه ای $P:\mathscr{F}\longrightarrow[۰,۱]$ با ویژگی های

$$P(\Omega)=۱. \quad (۱)$$

$$P(\bigcup_{i=۱}^{\infty}A_i)=\sum_{i=۱}^{\infty}P(A_i). \quad (۲)$$

که در آن $A_i\in\mathscr{F}$ و $A_i\cap A_j=\phi$ $i\neq j$ را یک اندازه احتمال یا یک احتمال بر Ω و سه تایی $(\Omega,\mathscr{F},P)$ را یک فضای احتمال می گویند.

در صورتی که تابع تعریف شده ویژگی $P(\Omega)=۱$ را نداشته باشد، آن را یک اندازه روی بر Ω و سه تایی $(\Omega,\mathscr{F},P)$ را یک فضای اندازه گویند اعضای Ω را برآمد و اعضای $\mathscr{F}$ را پیشامد گویند.

تکیه گاه

مجموعه ی $S\in\mathscr{F}$، که اندازه ی احتمال آن برابر یک است را تکیه گاه گویند. همچنین مجموعه ی $N\in\mathscr{F}$، که اندازه ی احتمال آن برابر صفر است را مجموعه ی پوچ گویند.

اتم

مجموعه ی $A\in\mathscr{F}$، که اندازه ی احتمال آن ناصفر است را اتم گویند، اگر هر زیرمجموعه‌ی حقیقی غیرپوچ آن دارای احتمال برابر $P(A)$ باشد.

اندازه ی معادل

اندازه های P و Q معادل اند اگر هر مجموعه ی پوچ نسبت به P ، نسبت به Q نیز پوچ باشد و بالعکس. که آن را با $P\sim Q$ نمایش می دهند.

تقریبا همه جا

اگر ویژگی ای در یک پشتیبان برقرار باشد، گویند آن ویژگی تقریبا همه جا، یا تقریبا به طور حتم($a.s$) برقرار است.

فضای احتمال کامل

فضای احتمال $(\Omega,\mathscr{F},P)$ را کامل گویند اگر برای زیر مجموعه های هر پیشامد پوچ A ، پیشامد و در نتیجه پوچ باشند.

احتمال شرطی

برای $A,B \in \mathscr{F}$، که $P(B) > 0$ احتمال A به شرط B به صورت زیر تعریف می شود

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{۱-۲-۹}$$

حد دنباله ای از مجموعه ها

اگر A_i به ازای $i = 1, 2, ...$ زیرمجموعه های یک مجموعه‌ی Ω باشند حد زبرین و حد زیرین این دنباله به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} \sup A_i := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} A_i \\ &\lim_{j\to\infty} \inf A_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} A_i \end{aligned} \tag{۱-۲-۱۰}$$

که اگر حد های زیرین و زبرین یک دنباله از مجموعه‌ها برابر باشند، برای مثال برابر A ، گوییم آن دنباله به A همگراست.

تابع اندازه پذیر

تابع f از $(\Omega, \mathscr{F})$ به $(\Psi, \mathscr{G})$ را اندازه پذیر گویند اگر برای هر $B \in \mathscr{G}$،

$$f^{-1}(B) = \{\omega | f(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}. \tag{۱-۲-۱۱}$$

متغیر تصادفی

اگر $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد تابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متغیر تصادفی گویند. [۲۵]

σ-میدان تولید شده توسط متغیر تصادفی

σ- میدان تولید شده توسط متغیر تصادفی f را که با $\sigma(f)$ نمایش می دهند کوچکترین σ-میدانی است که f نسبت به آن اندازه پذیر باشد.

انتگرال

تابع ساده ی اندازه پذیر و حقیقی‌مقدار را متغیر تصادفی ساده گویند. به صورت کلی متغیر تصادفی ساده ی X به صورت $X = \sum_{i \in I} x_i 1_{A_i}$ می باشد که در آن مجموعه ی اندیس گذار I متناهی و مجموعه های $A_i \in \mathscr{F}$یک افراز برای Ω هستند و $x_i \in \mathbb{R}$.

[۲۵] در برخی کتاب ها فرض اندازه پذیری را نیز اضافه می کنند.

امید ریاضی متغیر تصادفی ساده.

امید ریاضی متغیر تصادفی $X = \sum_{i\in I} x_i 1_{A_i}$، به صورت زیر تعریف می شود

$$E[X] := \sum_{i\in I} x_i P(A_i) \tag{۱-۲-۱۲}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی نامنفی.

در صورتی که $P(X=\infty)=0$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی نامنفی X را برابر با $E[X] := \lim_{n\to\infty} E[X_n]$ تعریف می‌کنیم که در آن $X_n \uparrow X$.

توابع X^+ و X^- را که به ترتیب بیانگر قسمت های مثبت و منفی تابع X می باشند، به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} X^+(a) &= X(a)\vee 0 = \max(X(a),0) \\ X^-(a) &= -X(a)\vee 0 = \max(-X(a),0) \end{aligned} \tag{۱-۲-۱۳}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی دلخواه: برای متغیر تصادفی دلخواه X، اگر هر دو مقدار $E[X^+]$ و $E[X^-]$ نامتناهی نباشند، امید ریاضی X را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$E[X] := E[X^+] - E[X^-] \tag{۱-۲-۱۴}$$

در صورتی‌که هر دو مقدار $E[X^+]$ و $E[X^-]$ متناهی باشند، متغیر تصادفی X را انتگرال‌پذیر گویند. انتگرال X نسبت به P روی یک مجموعه ی $A\in\mathscr{F}$ برابر است با $E[X1_A]$. که اگر وجود داشته باشد و متناهی باشد، X را نسبت به P روی A انتگرال‌پذیر گویند.

فضای L^q

برای $q>1$ ، مجموعه ی متغیر های تصادفی حقیقی مقدار X روی فضای احتمال $(\Omega,\mathscr{F},P)$، با شرط $E[|X|^q]<\infty$ را با $L^q(\Omega,\mathscr{F},P)$ نمایش می دهند.

قضیه ی فوبینی [26]

فرض کنید $(X,\mathscr{M},\mu)$ و $(Y,\mathscr{N},\nu)$ دو فضای اندازه باشند فضای حاصلضرب آن‌ها را به صورت

$$(X\times Y, \mathscr{M}\times\mathscr{N}, \mu\times\nu) \tag{۱-۲-۱۵}$$

نمایش می دهیم، که در آن $X\times Y$ حاصل‌ضرب دکارتی X در Y است و

$$\mathscr{M}\times\mathscr{N} = \sigma(A\times B : A\in\mathscr{M}, B\in\mathscr{N}). \tag{۱-۲-۱۶}$$

[26] Fubini