بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

BL- جبرهای آزاد

استاد راهنما :
دکتر اسفندیار اسلامی

مولف :
غضنفر جباری

تابستان ۸۷

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : غضنفر جباری

استاد راهنما : دکتر اسفندیار اسلامی

داور ۱ : دکتر عباس حسنخانی

داور ۲ : دکتر سینا هدایت

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به :

پدرم

مادرم

و همسرم

وتقدیم به :

استاد گرامی جناب آقای دکتر اسلامی

با سپاس از خداوند منان

با تشکر و قدردانی از خانواده ام که هیچگاه محبتشان را از من دریغ نکردند و...

با تشکر از همه اساتیدم بخصوص جناب آقای دکتر اسلامی که همواره مرا در این راه یاری نمودند .

و با تشکر از زحمات دوست عزیزم

جناب آقای احد اکبرپور

چکیده

ابتدا BL- جبر راتعریف کرده سپس خواص اساسی BL - جبرها رابیان می کنیم. BL_n - زنجیر را بصورت جمع ترتیبی یک MV- زنجیر متناهی L_n و BL-زنجیر تعمیم یافته B تعریف می کنیم. $MV(Free_v(X)/<U>)$ و $D(Free_v(X)/<U>)$ را مطالعه می کنیم. جبرهای آزاد با تعدادی دلخواه مولد در چند گونایی از BL- جبرها تولید شده توسط یک BL_n - زنجیررا بصورت ترم هایی از ضرب های بولی ضعیف از BL- جبرها که جمع های ترتیبی از زیر جبرهای L_n و جبرهای آزاد در چندگونایی از BL- جبرهای تعمیم یافته تولید شده توسط B هستند،را توصیف می کنیم.که ضرب های بولی روی فضاهای استون زیر جبرهای بولی از جبرهای آزاد در چندگونایی از MV- جبرها تولید شده توسط L_n واقع می شوند.

مقدمه

در این پایان نامه،چند گونای BL- جبرها و BL - جبرهای تعمیم یافته را به ترتیب با **$\mathcal{BL}$** و **$\mathcal{GBL}$**

نشان می دهیم. و چند گونای MV–جبرها رابا **$\mathcal{MV}_n$** نشان می- دهیم.همچنین جبر آزاد روی

BL–جبر **$\mathcal{V}$** تولید شده توسط مجموعه X رابا $Free_v(X)$ نشان می دهیم. درفصل اول به

بررسی خواص اساسی BL–جبرها پرداخته که طی پنج بخش به ترتیب زیر بررسی می کنیم.

دربخش اول که عمدتا بر گرفته از مرجع[۷] است به ارتباط بین تسمه ها و BL- جبرها پرداخته و

BL- جبر را بصورت یک تسمه اساسی کراندارمعرفی می کنیم.

عناصر متمم دار مشبکه L(A) ازBL- جبرA را عناصر بولی A می نامیم وبا B(A) نشان می

دهیم. در بخش دوم فیلتر استلزام یک BL- جبر را تعریف کرده وبه ارتباط فیلترهای استلزام و

رابطه های همنهشتی می- پردازیم. در بخش سوم که عمده قضایا بر گرفته ازمرجع [۱۸]است

MV_n- جبرها رابعنوان زیر چند –گونایی از**$\mathcal{BL}$** تولید شده توسط زنجیر L_n معرفی می کنیم.در

هر BL–جبر مانند A تعریف می -کنیم

$MV(A)=\{x\in A:\neg\neg x=x\}$ و $D(A)=\{x\in A:\neg x=\perp\}$.

جمع ترتیبی دو تسمه S,R را با $R\otimes S$ نشان می دهیم. در بخش چهارم ثابت می- کنیم

هرگاه $MV(A)=L_n$ باشد، آنگاه $A\equiv R\otimes S$ است.

BL_n-زنجیر را بصورت جمع ترتیبی زنجیر L_n و BL- زنجیر تعمیم یافته B تعریف می کنیم.در بخش پنجم که عمدتا برگرفته ازمرجع [۲۳]است. بصورت مقدماتی به بررسی جبرهای آزاد را در چند گونای BL– جبرها تولید شده توسط BL_n–زنجیر پرداخته ونتیجه می گیریم برای توصیف BL- جبر آزاد تولید شده توسط یک BL_n-زنجیر کافیست $B(Free_v(X))$ وجبر خارج قسمتی $Free_v(X)/<U>$ را بررسی کنیم.

در فصل دوم طی سه بخش به بررسی $B(Free_v(X))$ می پردازیم.

در بخش یک که عمدتا برگرفته از مرجع[۱۷]است.به بررسی عناصربولی جبرهای آزاد می پردازیم دربخش دوم جبرهای مویسیل n-ارزشی راتعریف می کنیم.وارتباط بین جبر های مویسیل n-ارزشی و MV_n- جبرها رابررسی می کنیم. دربخش سوم عناصر بولی $Free_{MVn}(X)$ را مطالعه می کنیم.

در فصل سوم که برگرفته از مرجع [۲۵]است جبر خارج قسمتی $Free_v(X)/<U>$را طی سه بخش به ترتیب زیر بررسی می کنیم و آنرا بصورت جمع ترتیبی

$MV(Free_v(X)/<U>)$ و $D(Free_v(X)/<U>)$ نشان می دهیم. در بخش اول $MV(Free_v(X)/<U>)$ را مطالعه می کنیم.

در بخش دوم مشخصه ای را برای چند گونای BL- جبرهای تعمیم یافته تولید شده توسط B بدست می آوریم. در بخش سوم $D(Free_v(X)/<U>)$ را بررسی می کنیم. در نهایت با استفاده از نتایج بدست آمده از فصل دوم وسوم BL- جبرهای آزاد تولید شده توسط یک خانواده ضعیف بولی ضرب بصورت را زنجیر BL_n- $(Free_v(x)/<Us>: U_S \in SpecB(Free_v(X))$ توصیف می کنیم.

فهرست مطالب

فصل اول :BL- جبرها

فصل دوم : $B(Free_v(X))$

فصل سوم: $D(Free_v(X)/<U>)$

فصل اول

BL- جبرها

دراین بخش ابتدا تسمه را تعریف می کنیم و $BL-$ جبر را بصورت یک تسمه اساسی کراندار معرفی می کنیم. سپس با بیان تعریف دیگری از $BL-$ جبر نشان می دهیم دو تعریف معادلند.

۱. ۱ -تسمه ها و BL-جبرها

تعریف ۱.۱. ۱ یک تسمه جبری است مانند $(A,*,\to,T)$ از نوع $(2,2,0)$ بقسمی که $(A,*,T)$ تکواره جابجایی باشد. و برای هر $x,y,z\in A$ موارد زیر برقرار باشد:

۱) $x\to x=T$ ،

۲) $x*(x\to y)=y*(y\to x)$ ،

۳) $x\to(y\to z)=(x*y)\to z$.

تعریف ۱.۱. ۲ تسمه اساسی یا BL- جبر تعمیم یافته، تسمه ای است که در تساوی زیر صدق کند:

$$(((x\to y)\to z)*((y\to x)\to z))\to z=T. \qquad (PL)$$

مثال ۱.۱. ۳ فرض کنید $C\infty=\{1=a^0,a^1,a^2,...\}$ باشد ،که با ترتیب جزئی زیر مرتب شده است . $1=a^0>a^1>a^2>....$. برای هر $m,n<\infty$ عملگرهای " $*,\to$ " را بصورت زیر روی $C\infty$ تعریف می کنیم:

$a^n\to a^m=a^{\max(m-n,0)}$ و $a^n*a^m=a^{m+n}$.

نشان می دهیم $(C\infty,*,\to,1)$ یک تسمه است .

$a^m*a^n=a^{m+n}=a^{n+m}=a^n*a^m$ ، پس " * " جابجایی است.

$(a^m * a^n) * a^k = (a^{m+n}) * a^k = a^{m+n+k} = a^m * (a^{n+k}) = a^m * (a^n * a^k)$،پـــــس " * "

شرکتپذیراست.همچنین $a^m * ۱ = a^m * a^0 = a^{m+0} = a^m$، پس $(C\infty, *, 1)$یک تکواره جابجایی

است.

بقیه خواص تسمه را بررسی می کنیم. ۱) $a^m * a^m = a^{\max(m-m),0)} = a^0 = 1$.

۲) دو حالت زیر را در نظر می گیریم. الف)اگر $\max(n-m,0) = 0$باشد،آنگاه

$$a^m * (a^m \to a^n) = a^m * a^{\max(n-m,o)} = a^m * a^0 = a^m = a^{n+m-n} = a^n * a^{n-m} = a^n * (a^n \to a^m)$$

ب)اگر $\max(n-m,0) = 0$باشد،آنگاه

$$a^m * (a^m \to a^n) = a^m * a^{n-m} = a^{m+n-m} = a^n = a^n * a^{n-m} = a^n * (a^n \to a^m)$$

(۳) برای اثبات $a^m \to (a^n \to a^k) = a^m \to (a^{\max(k-n,0)})$ ، شش حالت زیـر را در نظر مـی

گیریم ، مانند آنچه در (۲) اثبات شده نتیجه بدست می آید .

$k \le n \le m, n \le k \le m, n \le m \le k,$

$k \le m \le n, m \le k \le n, m \le n \le k,$. □

روی هر تسمه رابطه ترتیبی را بصورت $x \le y$است اگرو تنهااگر $x \to y = T$ باشد، تعریف مـی

کنیم.

لم ۱.۱. ٤ فرض کنید H یک تسمه باشد، آنگاه

۱. $\le$ یک رابطه ترتیبی است.

۲.برای $x , y, z \in H$،مواردزیر برقرار است .

الف) $x * z \le y$است اگروتنهااگر $z \le x \to y$ باشد. (مانده ای)،

ب) $x * (x \to y) \le y$ و $x \le y \to (x * y)$است،

ج)اگر $x \le y$ باشد،آنگاه $x * z \le y * z$ و $z \to x \le z \to y$ و $y \to z \le x \to z$

است،

د) $T \to x = x$ است،

ح) $x \le T$ است.(یعنی T عضو ماکسیمال H است)،

و) $x * y \le x$ است.

برهان: ۱) $x \to x = T$ است. پس $x \le x$ است. (انعکاسی)

اگر $x \le y, y \le x$ باشد،آنگاه $x \to y = y \to x = T$ است. در نتیجه

$x = x * T = x * (x \to y) = y * (y \to x) = y * T = y$ است. (تقارنی)

فرض می کنیم $x \le y, y \le z$ باشد، پس $x \to y = y \to z = T$ است.از طرفی

$x = x * (x \to y) = y * (y \to x)$ است. پس

$$x \to z = (y * (y \to x)) \to z = ((y \to x) * y) \to z = (y \to x) \to (y \to z) = (y \to x) \to T$$

$$= (y \to x) \to (y \to y) = (y * (y \to x)) \to y = x \to y = T$$ (تعدی)

پس $\le$ یک رابطه ترتیبی است .

برهان:۲ الف) $z \le x \to y$ است. اگروتنهااگر $z \to (x \to y) = T$ باشد. اگروتنهااگر

$(x * z) \to y = T$ باشد. اگروتنهااگر $x * z \le y$ باشد .

ب) $x \to y \le x \to y$ است، پس طبق (الف)، $x * (x \to y) \le y$ است.

همچنین $x * y \le x * y$ است، پس $x \le y \to (x * y)$ است .

ج) اگر $x \le y$ باشد، بنا به(ب) $y \le (z \to y * z)$ است،پس

$x \le (z \to y * z)$ است. و لذا بنا به(الف) $x * z \le y * z$ است .اگر $x \le y$ باشد، آنگاه بنا به(ب)

$z*(z \to x) \le x \le y$ است. پس $(z \to x) \le (z \to y)$ است. همچنین $x*(y \to z) \le y*(y \to z) \le z$ است. بنابراین $(y \to z) \le (x \to z)$ است.

د) $x = T*x \le x$ است. پس $x \le T \to x$ است. برعکس، $T \to x = T*(T \to x) \le x$ است. پس $T \to x = x$.

ح) $x = T*x = T*(T \to x) = x*(x \to T) \le T$ است.

و) چون $y \le T$ است، پس $x*y \le x*T = x$ است. □

تعریف ۱.۱. ۵ ساختار $H = (H,\wedge,* \to,T)$ یک نیم تسمه است اگر $(H,\wedge,T)$ یک اینفیمم –نیم مشبکه با بزرگترین عنصر T باشد. و"$*$" یک عملگر جابجایی روی H با عنصریکه T باشد(یعنی برای هر $x,y \in H$، $x*y = y*x$ و $T*x = T$ باشد). بعلاوه "$\to$" یک عملگر دوتایی باشد، که در موارد زیر صدق کند.

الف) $x \le y$ است اگروتنهااگر $x \to y = T$ باشد.

ب) $(x*y) \to z = x \to (y \to z)$ باشد.

برای هر x,y,z، $\le$ ترتیب نیم مشبکه ای است که بصورت زیر تعریف می شود. $x \le y$ اگر و تنها اگر $x \wedge y = x$.

لم ۱.۱. ٦ تسمه H با ترتیب تعریف شده بصورت فوق یک اینفیمم نیم مشبکه است .

برهان: نشان می دهیم $x \wedge y$ اینفیمم x,y است.

$x \wedge y = x*(x \to y) = y*(y \to x) \le x,y$ است. حال فرض می کنیم $z \le y, z \le x$ باشد، آنگاه $z = z \wedge z \le x \wedge y$ است.

$$((x \vee y) \to y) \to ((x \to z) \wedge (y \to z) \to (x \vee y) \to z)) = T \qquad (**)$$ □

فرض کنید H یک تسمه باشد و $(H,\wedge,T)$ یک اینفیمم نیم- مشبکه باشد. در تسمه H شبه مفصل را به صورت زیر تعریف می کنیم: $(x \vee y) = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$.

لم ۱.۱. ۷ اگر H یک تسمه اساسی باشد، آنگاه شبه مفصل $\vee$ یک عملگر مفصل روی H است .

برهان: ابتدا نشان می دهیم $y, x \leq x \vee y$ است.

$x * (y \to x) \leq x$ است.پس $x \leq (y \to x) \to x$ است.همچنین $x * (x \to y) = x \wedge y \leq y$ پس $x \leq (x \to y) \to y$ است. بنابراین $x \leq ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$ است.بطور مشابه نتیجه می گیریم $y \leq ((y \to x) \to x) \wedge ((x \to y) \to y)$.

حال نشان می دهیم که اگر $x, y \leq z$ باشد،آنگاه $x \vee y \leq z$ است.

بنا به تعریف $x \vee y$، $x \vee y \leq ((x \to y) \to y)$ است. پس $(x \to y) \leq ((x \vee y) \to y)$ (*).بنا براین $(x \to y) \to ((x \vee y) \to y) = T$ است.از طرفی $x \to z = y \to z = T$ است. پس

$$((x \vee y) \to y) \to ((x \to z) \wedge (y \to z) \to (x \vee y) \to z)) = T \qquad (**)$$

بنابه $(*),(**)$ $((x \to y) \to ((x \to z) \wedge (y \to z)) \to (x \vee y \to z)) = T$

بنا به تساوی فوق و (PL)،

$$((x \to y) \to ((x \to z) \wedge (y \to z)) \to (x \vee y \to z)) * ((y \to x) \to (x \to z) \wedge (y \to z) \to$$

$$(x \vee y) \to z)) \to ((x \to z) \wedge (y \to z) \to (x \vee y) \to z)) = T \quad .$$

لذا $((x \to z) \wedge (y \to z)) \to ((x \vee y) \to z) = T$ است. پس $T \to ((x \vee y) \to z) = T$ است.بنابراین $x \vee y \to z = T$ است. و لذا $x \vee y \leq z$ است. $\square$

نتیجه ۱.۱.۸ بنا به آنچه درلم های ۱.۱.۷ و۱.۱.۶ گفته شد، $(H,\wedge,\vee,\perp,T)$ یک مشبکه است. $\square$

حکم ۱.۱.۹ در هر تسمه اساسی $(x \to y) \vee (y \to x) = T$ است.

برهان: $(x \to y) \leq (x \to y) \vee (y \to x)$ است.پس

$(x \to y) \to ((x \to y) \vee (y \to x)) = T$ است.

همچنین $(y \to x) \to ((x \to y) \vee (y \to x) = T$ است.حال بنابه (PL):

$$(((x \to y) \to ((x \to y) \vee (y \to x))) * ((y \to x) \to ((x \to y) \vee (y \to x)))) \to$$
$$((x \to y) \vee (y \to x)) = T.$$

پس $T \to ((x \to y) \vee (y \to x)) = T.$ است. بنابراین $(x \to y) \vee (y \to x) = T$ است. $\square$

قضیه ۱.۱.۱۰ هر BL-جبر تعمیم یافته بصورت جبری $A = (A,\wedge,\vee,*,\to,T)$ از نوع (2,2,2,2,0) است، بقسمی که

۱. $(A,*,T)$ یک تکواره جابجایی باشد.

۲. $L(A) = (A,\wedge,\vee,T)$، یک مشبکه با بزرگترین عنصر T باشد.

۳. $x \to x = T$.

۴. $x \to (y \to z) = (x * y) \to z$

۵. $x \wedge y = x * (x \to y)$.

۶. $(x \to y) \vee (y \to x) = T$.

و برعکس، یعنی هر جبر بصورت فوق یک BL-جبر تعمیم یافته است.

برهان: فرض کنیم تعریف ۲.۱.۱ برقرار باشد، بنا به تعریف ۱.۱.۱ شرط(۱) قضیه برقرار است ، بنا به لم های ۷.۱.۱ و ۶.۱.۱ شرط (۲) . همچنین بنا به تعریف ۱.۱.۱ شرط (۳) و (۴) نیز برقرار است ، بنا به تعریف۵.۱.۱ و لم۶.۱.۱ شرط (۵) برقرار است و بنا به تذکر۹.۱.۱ شرط (۶) برقرار است .

برعکس، بنا به شرط (۱) و (۳) در قضیه شرایط اولیه تعریف و شرط (۱) و (۳) در تعریف ۱.۱.۱ برقرار است بنا به (۲) چون $L(A)$ ، مشبکه است پس $\wedge$ خاصیت جابجایی دارد .

بنا به (۵) $x \wedge y = x * (x \to y) = y * (y \to x) = y \wedge x$. و لذا شرط (۲) تعریف برقرار است .

بنابراین کافی است شرط (pL) را ثابت کنیم .

$$((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z) = ((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z) * ((x \to y) \vee (y \to x))$$

$$= [((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z) * (x \to y)] \vee [((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z) * (y \to x)]$$

$$\leq [((x \to y) \to z) * (x \to y)] \vee [((y \to x) \to z) * (y \to x)]$$

پس $((x \to y) * ((y \to x) \to z)) \to z = T$. $\square$

تعریف ۱۱.۱.۱ BL- جبر یا تسمه اساسی کراندار، جبری است مانند $A=(A,\wedge,\vee,*,\to,\perp,T)$ از نوع $(2,2,2,2,0,0)$ بطوریکه $(A,\wedge,\vee,*,\to,T)$ یک BL– جبر تعمیم یافته است. و $\perp$ کران پایین مشبکه $L(A)$ است .

هر گاه یک BL–جبر دارای تنها یک عضو باشدآنرا بدیهی می گوییم. چند گونای BL- جبرها و BL– جبرهای تعمیم یافته را به ترتیب با ***BL*** و ***GBL*** نشان دهیم. در هر BL- جبر A عملگر

یکانی را بصورت $\neg x = x \to \bot$ تعریف می کنیم . برای هر $a,b \in A$ ، $a \le b$ است اگروتنهااگر $a = a \wedge b$ باشد،اگرو تنها اگر $b = a \vee b$ باشد. رابطه ترتیبی تعریف شده بصورت فوق راترتیب طبیعی می نامیم. هرگاه ترتیب طبیعی کامل باشد.(یعنی،برای هر $b \in A$, $a \le b$ یا $b \le a$ باشد.A را BL – زنجیر می نامیم. در هر BL – جبر A عملگر دوتایی $\oplus$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$.x \oplus y = \neg(\neg x * \neg y)$

برای هر عدد صحیح k عملگرهای x^k و $k.x$ را استقرایی و بصورت زیر تعریف می کنیم.

۱) $x^1 = x$ و $x^{k+1} = x^k * x$,

۲) $1.x = x$ و $(k+1).x = (k.x) \oplus x$.

در زیر تعریف چند BL–جبر را می آوریم.

تعریف ۱.۱. ۱۲ جبرهایی از منطق بی نهایت ارزشی لوکاسویچ ، که بصورت زیر چند گونایی از BL هستند ، را MV- جبر می نامیم. چند گونای MV- جبرها رابا ***MV*** نشان می دهیم.برای هر BL–جبرA، $MV(A) = \{x \in A : \neg\neg x = x\}$ یک MV–جبر است .

تعریف ۱.۱ ۱۳ PL–جبر، BL– جبری است که در دو تساوی زیر صدق کند.

۱) $(\neg\neg z * (x * z)) \to (y * z) \to (x \to y) = T$

۲) $.x \wedge \neg x = T$

PL– جبرهامتناظر با منطق ضربی فازی هستند.

در لم زیرخواصی که نتیجه مستقیم تعریف BL- جبرهای تعمیم یافته است،را می آوریم.