بسم‌الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی—گرایش جبر

عنوان:

قضیه بیکر درباره‌ی فرم‌های خطی از لگاریتم‌ها و مسئله‌ی چولا

استاد راهنما:

دکتر تاتیانا حسامی پیله رود

استاد مشاور:

دکتر خدابخش حسامی پیله رود

توسط:

اعظم بیاتی

مهر ۸۹

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج

مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی

از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به

دانشگاه شهرکرد است.

تقدیم به

محبوب، معشوق، پرورگار، که هر چه داریم

همه بیکرانه‌ی لطف اوست.

پیشکش به وجود پر مهر مادرم

که اسطوره بی بدیل عاطفه و عشق و محبت است و تپش‌های قلبش

خون حیات را در رگ‌هایم به جریان می‌اندازد.

تقدیر

بر خود لازم می دانم که از اساتید علم و اخلاق سرکار خانم دکتر تاتیانا حسامی و جناب آقای دکترخدابخش حسامی که همواره از راهنمائی‌های ارزنده و مساعدت‌های دلسوزانه‌ی شان بهره‌مند شده‌ام، تشکر و قدردانی نمایم و از خداوند متعال توفیق روز افزون و شادکامی را برایشان آرزومندم.

از جناب آقای دکتر نقی‌پور و سرکار خانم دکتر افتخاری که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم، جناب آقای دکتر سمنانی کمال تشکر را دارم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر ریسمانچیان که افتخار شاگردیشان را داشتم نیز سپاسگزارم.

از خانواده‌ام، دوستان و تمام کسانی که مرا در به انجام رسانیدن این پایان‌نامه یاری نمودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا قضیه بیکر اثبات می‌شود. این قضیه بیان می‌کند که هر ترکیب خطی غیر صفر از لگاریتم‌های اعداد جبری با ضرایب جبری، متعالی است. به‌عنوان مثال از قضیه بیکر به‌دست می آید که عدد $\pi + \log \alpha$ متعالی است.

همچنین به مطالعه‌ی معادله

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$$

برای تابع متناوب f که دارای مقادیر جبری است، پرداخته می‌شود. به‌خصوص مسئله چولا پاسخ داده می شود. اثباتی از این به‌وسیله بیکر، بیرچ و ویرزینگ در سال ۱۹۷۳ داده شده که به کاربرد قضیه‌ی بیکر وابسته است.

در پایان حدسیه‌ی اوردیش، با استفاده از خواص تابع دی گاما مورد بحث قرار می‌گیرد.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
حلقه‌ی اعداد صحیح گویا	$\mathbb{Z}$
میدان اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
میدان اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
میدان اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
میدان تمام اعداد جبری به روی $\mathbb{Q}$	$\mathbb{A}$
بزرگترین مقسوم علیه n و q	$\gcd(n,q)$
تابع گاما	$\Gamma(x)$
تابع دی گاما	$\psi(x)$
تابع نمائی با توان $(-h^{۸n})$	$\exp(-h^{۸n})$
مانده تابع f در نقطه $z=k$	$Res_{z=k}f(z)$
مشتق مرتبه‌ی m —ام تابع f	$f^{(m)}$
مشتق تابع گاما	$\Gamma'(x)$
مشتق مرتبه‌ی m —ام تابع f نسبت به متغییر z در نقطه‌ی $z=r$	$\left(\frac{d}{dz}\right)^m f(z)\Big\|_{z=r}$
ثابت اویلر	γ
ثابت ارشمیدسی	π

درجه‌ی چندجمله ای $f(x)$	$\deg f(x)$
منظور لگاریتم در مبنای e است	$\log x$
حد	$\lim$
عدد نپر	e
بی نهایت	∞
متعلق بودن	$\in$
نامساوی	$\neq$
طول w	$\|w\|$
حلقه‌ی چندجمله ای ها از x با ضرایب از $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}[x]$
قسمت صحیح عدد x	$[x]$
ضریب دو جمله ای n بر k	$\binom{n}{k}$
حاصل ضرب متناهی از n عدد	$\prod_{i=۱}^{n}$
مجموع متناهی از n مقدار	$\sum_{i=۱}^{n}$

فصل ۱

مقدمه و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در کنگره بین المللی ریاضیدانان که در سال ۱۹۰۰ میلادی در پاریس برگزار گردید، هیلبرت[۱] در سخنرانی خود تحت عنوان «مسائل ریاضیات» مسائلی را فرمول بندی و طرح نمود، که به اعتقاد او حل آن‌ها تأثیر عمیقی به گسترش ریاضیات در قرن بیستم می‌گذاشت. این مسائل به «۲۳ مسئله هیلبرت» معروف گردید.

هفتمین مسئله از این لیست مشهور عبارت است از این‌که، آیا مقدار لگاریتمی که عدد گنگ

[۱] Hilbert

می‌باشد، از یک عدد جبری با پایه جبری متعالی است؟

این سؤال را می‌توان به دو روش متفاوت بیان نمود:

روش اول: آیا مقدار یک خارج قسمت که عدد گنگ می‌باشد از لگاریتم طبیعی دو عدد جبری، متعالی است؟

روش دوم: آیا α^β به ازای هر عدد جبری α به غیر از صفر و یک و هر عدد جبری گنگ β، متعالی است؟

بنابر این برای مثال آیا اعدادی مانند $۲^{\sqrt{۲}}$ یا $e^\pi = i^{-۲i}$ متعالی می‌باشند؟

مسئله‌ی طرح شده توسط هیلبرت، تعمیمی از قضیه لیندمان [۲] است، وی در سال ۱۸۸۲ ثابت کرد که اگر α یک عدد جبری به غیر از صفر باشد در این صورت e^α متعالی است. از این قضیه می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر α یک عدد جبری به غیر از صفر و یک باشد، آنگاه $\log\alpha$ متعالی است.

هیلبرت معتقد بود که مسئله‌ی هفتم آن خیلی دشوار است و حل آن خیلی دیرتر از حل فرضیه ریمان و مسئله آخر فرما خواهد بود. اوّلین پیشرفت مهم توسط گلفند [۳] در سال ۱۹۲۹ انجام گرفت. گلفند با بکارگیری تکنیک های درون یابی ثابت کرد که α^β به ازای هر عدد جبری α به جزء صفر و یک و هر عدد β به شکل $i\sqrt{D}$ جائی که D یک عدد طبیعی می‌باشد، متعالی است.

در حالت خاص این امر حاکی ازآن است که $e^\pi = (-۱)^{-i}$ متعالی است.

---

[۲] Lindemann

[۳] Gelfond

در سال ۱۹۳۰ این نتیجه توسط کوزمین[۴] برای هر عدد حقیقی β به شکل $\sqrt{D}$ جائی که D یک عدد طبیعی می‌باشد، تعمیم یافت.

اما این واضح بود که استفاده مستقیم از سری های درونیابی $e^{\beta z}$ که گلفند و کوزمین بر روی آن کار می‌کردند برای تعمیم β مناسب نبود. سرانجام مسئله هفتم هیلبرت در سال ۱۹۳۴ توسط گلفند و اشنایدر[۵] مستقل از هم به طور کامل حل گردید. اثباتی که آن ها کشف کرده بودند برای هر عدد گنگ β قابل اجرا بود، اگر چه موضوع در هر دو حالت متفاوت به ساختار تابع کمکی که در نقاط معینی صفر می‌شد بستگی داشت.

قضیه اشنایدر—گلفند بیان می‌کند که برای هر عدد جبری غیر صفر α_1، α_2، β_1 و β_2 به طوری که $\log\alpha_1$ و $\log\alpha_2$ مستقل خطی روی اعداد گویا هستند، داریم

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 \neq 0 \qquad (1)$$

در واقع اگر

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 = 0$$

آنگاه خارج قسمت $\frac{\log\alpha_1}{\log\alpha_2}$ که برابر با $\frac{-\beta_2}{\beta_1}$ می‌باشد، یک عدد جبری است. امّا طبق قضیه اشنایدر—گلفند این خارج قسمت می‌تواند یا گویا باشد یا متعالی و چون جبری است، پس باید گویا باشد امّا این تناقض دارد با این که $\log\alpha_1$ و $\log\alpha_2$ روی اعداد گویا مستقل خطی هستند.

---

[۴] Kuzmin

[۵] Schneider

طبیعی است که تعمیم قضیه بالا برای تعداد دلخواهی از لگاریتم‌های اعداد جبری مورد بررسی قرار گیرد به عبارت دیگر،

به ازای هر عدد جبری غیر صفر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ و $\beta_1, \ldots, \beta_n$ به طوری که $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ روی اعداد گویامستقل خطی باشند، آنگاه

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0, \qquad n \geq 2$$

این مسئله در سال ۱۹۶۶ توسط بیکر[6] به اثبات رسید. قضیه بیکر اهمیت فراوانی در نظریه اعداد دارد، همچنین کاربردهای وسیعی در شاخه‌های مختلف نظریه اعداد و به خصوص در حل معادله‌های دیوفانتی دارا می‌باشد. به خاطر همین، اثبات این قضیه جایزه معروف فیلدز را برای بیکر به ارمغان آورد. در فصل دوم به اثبات این قضیه می‌پردازیم، که اثبات آن به ساختار تابع کمکی از چندین متغییر بستگی دارد. همچنین نتایجی از این قضیه را بیان و سپس چند عدد متعالی را معرفی می‌کنیم.

حدود ۷۰ سال بعد از طرح مسئله هفتم هیلبرت، چولا[7] در کنفرانس نظریه اعداد که در سال ۱۹۶۹ در شهر استونی بروک برگزار گردید، سوال زیر را طرح نمود:

آیا تابع متناوب f با مقادیر گویا و دوره تناوب p که عدد اوّل می‌باشد وجود دارد به طوری که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$$

---

[6] Baker

[7] Chowla

صفر باشد؟ این سوال در سال ۱۹۷۳ توسط بیکر، بیرچ[۸] و ویرزینگ [۹]در حالت کلی‌تر از توابع f که می‌توانست مقادیر جبری را به خود بگیرد و دوره‌ی تناوب آن به اعداد اوّل محدود نمی گشت پاسخ داده شد. در فصل سوم به اثبات این قضیه به کمک نتیجه دیریکله و قضیه بیکر می‌پردازیم.

در دهه ی ۶۰ میلادی اوردیش[۱۰] حدسیه‌ای به صورت زیر بیان نمود که تاکنون نه اثبات و نه رد گردیده است.

حدسیه‌ی اوردیش : آیا برای هر عدد صحیح مثبت q و تابع متناوب f با دوره‌ی تناوب q که بر روی اعداد صحیح تعریف می‌گردد و تنها مقادیر ± 1 به ازای $n = 1, 2, \cdots, q-1$ و مقدار صفر به ازای $n = q$ را به خود می گیرد، مجموع سری همگرای

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$$

مخالف صفر می باشد؟

در سال ۱۹۸۲ اوکادا[۱۱] [۹] با استفاده از قضیه بیکر، بیرچ و ویرزینگ قضیه‌ای را اثبات نمود، که با استفاده از این قضیه اوکادا توانست جواب موضعی مثبتی به حدسیه‌ی اوردیش بدهد که شامل این است که مجموع $S \neq 0$ اگر $q \geq 2\varphi(q)$، جائی که φ تابع اویلر می‌باشد. با کمک نتایج اوکادا، تایدمان[۱۲] [۱۱] مثبت بودن حدسیه‌ی اوردیش را برای توابع کاملاً

---

[۸] Birch

[۹] Wirsing

[۱۰] Erdos

[۱۱] Okada

[۱۲] Tijdeman

ضربی ثابت نمود. نتیجه اوکادا توسط سارادا[۱۳] [۱۰] بهتر گردید.

در سال ۲۰۰۹ سارادا و مورتی [۱۴]برقراری حدسیه‌ی اوردیش را برای تمام q هایی که $q \equiv ۳ \pmod{۴}$ ثابت نمودند.

با استفاده از مطالب گفته شده در فصل سوم، می‌توان گفت که حدسیه ی اوردیش هم ارز با این پرسش است که آیا هر ترکیب خطی به‌صورت

$$\sum_{r=۱}^{q-۱} (\pm ۱)\psi\left(\frac{r}{q}\right)$$

که در آن q یک عدد فرد است، مخالف با صفر است یا نه؟

پرسش مشابه به ازای q های زوج اخیراً توسط تنگلی[۱۵] به اثبات رسیده‌است. دقیقاً وی قضیه زیر را به اثبات رسانیده است.

قضیه : تابع متناوب $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{\pm ۱\}$ با دوره ی تناوب ۳٦ وجود دارد به‌طوری که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = ۰.$$

در سال ۲۰۰۸ ت. حسامی پیله رود[۱٦] و خ.حسامی پیله رود[۱۷] با استفاده از خواص تابع دی گاما، اثباتی مقدماتی برای این قضیه ارائه دادند. تشریح این اثبات در فصل چهارم هدف اصلی ما می‌باشد.

[۱۳] Saradha

[۱۴] Murty

[۱۵] Tengely

[۱٦] T. Hessami Pilehrood

[۱۷] Kh. Hessami Pilehrood

۲.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱ : عدد α را جبری می نامند، هرگاه ریشه‌ی چندجمله‌ای

$$\varphi(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad \varphi(x) \not\equiv 0$$

با ضرایب گویا باشد. مجموعه تمام اعداد جبری را با $\mathbb{A}$ نشان می‌دهیم.

عدد حقیقی یا مختلط α را که جبری نباشد، متعالی نامند.

تعریف ۲.۲.۱ : چندجمله‌ای از درجه‌ی مثبت $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ را تحویل پذیر می‌نامند هرگاه دو چندجمله‌ای از درجه‌ی مثبت مانند $f_1(x)$ و $f_2(x)$ موجود باشند، به‌طوری که

$$f(x) = f_1(x) f_2(x)$$

و در غیر این‌صورت چندجمله‌ای $f(x)$ را تحویل ناپذیر نامند.

تعریف ۳.۲.۱ : درجه‌ی عدد جبری α عبارت است از درجه‌ی چندجمله‌ای تحویل ناپذیری مانند $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ که α ریشه‌ی آن می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱ : چندجمله‌ای تکین تحویل ناپذیری از $\mathbb{Q}$ را که α ریشه‌ی آن می‌باشد، چندجمله‌ای مینیمم عدد جبری α می‌نامند. اگر α عدد جبری از درجه‌ی n باشد، آنگاه α_1، $\cdots$، α_1 ریشه‌های چندجمله‌ای مینیمم آن‌را مزدوج‌های α می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱ : عدد جبری α را عدد صحیح جبری گویند، هرگاه چندجمله‌ای مینیمم آن دارای ضرایب صحیح باشد. به عبارت دیگر عدد صحیح جبری ریشه‌ی چندجمله‌ای تکین تحویل ناپذیری از $\mathbb{Z}[x]$ می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱ : فرض کنیم f تابع غیر صفری باشد که روی اعداد طبیعی و با مقادیر مختلط تعریف شده باشد. در این‌صورت f را ضربی گوئیم اگر به ازای هر عدد طبیعی m و n به‌طوری که بزرگترین مقسوم علیه آن‌ها برابر ۱ باشد، داشته باشیم

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

و f را کاملاً ضربی می‌گوییم اگر به ازای هر عدد طبیعی m و n، داشته باشیم

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

فصل ۲

قضیه بیکر

در این فصل به اثبات قضیه بیکر می‌پردازیم؛ که وی آن را درسال ۱۹۶٦ به اثبات رسانید.

قضیه بیکر: اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اعداد جبری غیر صفری باشند به‌طوری که $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ روی اعداد گویا مستقل خطی باشند، آنگاه $1, \log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ نیز روی میدان اعداد جبری مستقل خطی هستند.

اثبات این قضیه به ساختار تابع کمکی از چندین متغیر بستگی دارد، که در انتهای فصل به بررسی آن می‌پردازیم. قبل از اثبات قضیه بیکر چند نتیجه را اثبات و سپس چند عدد متعالی را معرفی می‌کنیم.