بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

گروه فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش ماده چگال

انتشار شایعه

سهیلا تاران

استاد راهنما:

دکتر امیرحسین درونه

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به مهربان فرشتگانی که در لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.
پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

سپاس‌گزاری

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نردبانی باشد برای فروتنی و دوری از تکبر و غرور و گامی برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران. سپاس از خانواده عزیزم برای تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است و قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و سپاس ازمحبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.
سپاس خود را نثار استاد بزرگوارم دکتر امیرحسین درونه می‌نمایم که با علم و صبر و حوصله فراوان راهنمایم شد و اندیشیدن را به من آموخت، که نمی‌توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر برای ایشان بر زبانم جاری سازم.
با تشکر از جناب آقای کاشی ساز و دوستان بسیار خوبم که همواره راهنمایی‌ها آنان دلگرمی برای من بود.
ادعا نمی‌کنم که همیشه به یاد آن‌هایی که دوستشان دارم هستم، اما ادعا می‌کنم حتی در لحظاتی که به یادشان نیستم دوسشان دارم.

چکیده

نظریه شبکه‌ها روشی برای بررسی سامانه‌های پیچیده است. یکی از نظریه‌های حوزه مکانیک آماری و فیزیک غیرخطی است که پیشرفت بسیار سریعی داشته است. اجزاء تشکیل‌دهنده آن گره و برهمکنش بین آن‌ها را با پیوندی نشان می‌دهند. از ویژگی عمومی شبکه‌ها این است که می‌توانند با گذشت زمان متحول شوند. به این معنی است که شبکه‌ها ثابت و ایستا نیستند. فرایندهای گوناگونی نیز بر روی شبکه‌ها می‌تواند روی دهند که نتیجه آنها کاملا وابسته به توپولوژی شبکه است. یکی از فرایندها بسیار جذاب انتشار شایعه است. وقایع جامعه و بیولوژی واپیدمولوژی را می‌توان با نظریه شبکه‌ها توصیف کرد که افراد گره‌های آن و ارتباط آن‌ها پیوندهای شبکه را نشان می‌دهند. در بررسی فرایند انتشار شایعه، افراد به سه گروه تقسیم‌بندی می‌شوند. افرادی که از شایعه ناآگاه هستند، افرادی که شایعه را شنیده‌اند وآن را گسترش می‌دهند و گروه سوم کسانی که شایعه را شنیده‌اند ولی آن را باور نکرده و آن را گسترش نمی‌دهند. گروه اول را ناآگاه و دوم را انتقال دهنده و بعدی را مقاوم نام‌گذاری می‌کنند. در این پایان‌نامه تغییرات حدآستانه اپیدمیک را بر روی شبکه پیچیده با توپولوژی دنیای‌کوچک بررسی کردیم.

واژگان کلیدی: شبکه‌های پیچیده، دنیای کوچک، انتشار شایعه، گسترش اپیدمیک، شیوه میدان میانگین، حد آستانه

فهرست

فهرست تصاویر ج

فهرست جداول ح

۱ سامانه های پیچیده و روش های بررسی آن ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ سامانه‌ها ۲

۳.۱ خصوصیت سامانه‌های پیچیده ۳

۴.۱ روش‌های مطالعه سامانه‌های پیچیده ۵

۵.۱ شبکه‌های پیچیده ۸

۶.۱ مفاهیم پایه‌ای و خصوصیت‌های آماری شبکه‌های پیچیده ۹

۱.۶.۱ ماتریس مجاورت ۱۰

۲.۶.۱ گراف جهت‌دار و وزن‌دار ۱۱

۳.۶.۱ درجه،طول مشخصه،قطر ۱۱

۴.۶.۱ ضریب‌خوشه‌ای، میانگی ۱۳

۷.۱ الگوهای شبکه‌ها ۱۶

۱.۷.۱ شبکه منظم ۱۶

۲.۷.۱ شبکه نامنظم ۱۷

۳.۷.۱ شبکه دنیای‌کوچک ۱۹

۴.۷.۱ شبکه بدون‌مقیاس ۲۲

۲ نظریه اپیدمولوژی ۲۷

۱.۲ مدل‌های کپه‌ای(قسمت قسمتی) ۲۷

۲.۲ مدل‌های اپیدمیک ۳۰

۱.۲.۲ مدل SI ۳۱

۲.۲.۲ مدل SIS ۳۲

۳.۲.۲ مدل SIR ۳۴

۳.۲ گسسته سازی معادلات میدان میانگین ۳۷
۴.۲ شایعه ۳۹
۵.۲ گسترش اپیدمیک در شبکه‌های پیچیده ۴۱
۶.۲ روش‌های گسترش و اپیدمیک در شبیه‌سازی ۴۵

۳ تاثیر توپولوژی شبکه بر روی انتشار شایعه **۴۶**
۱.۳ فرایند انتشار شایعه ۴۶
۲.۳ روش ساختن شبکه ۴۷
۳.۳ مدل گسترش اپیدمیک ۵۲

مراجع **۶۴**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۶۷**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۷۰**

فهرست تصاویر

۱.۱ گراف بدون جهت با ۷ راس و ۱۴ پیوند[۱۱] ۹
۲.۱ ضریب خوشه‌ای برای راس مرکزی برابر ۱/۳ است[۸]. ۱۴
۳.۱ راس خاکستری در این گراف بیشترین میانگی را در شبکه دارد[۸] ۱۵
۴.۱ شبکه منظم و دنیای کوچک و تصادفی به ازای $N = ۲۰, \langle k \rangle = ۴$[۱۸] . ۱۷
۵.۱ $C(p)$ و $L(p)$ به ترتیب ضریب‌خوشه‌ای و طول مشخصه به ازای p های متفاوت و $C(۰)$ و $L(۰)$ نیز ضریب خوشه‌ای و طول مشخصه برای شبکه منظم است . نسبت این ها را به ازای p های متفاوت در این شکل می‌بینید[۱۸]. ۲۱
۶.۱ تابع توزیع درجه شبکه بازیگران سینما با $\langle k \rangle = ۲۸ , N = ۲۱۲۲۵۰$ و شیب خطچین $\gamma_{actor} = ۲/۳$ [۲۴]. ۲۳
۷.۱ تابع توزیع درجه شبکه تارجهان‌گستر با $\langle k \rangle = ۵/۴۶ , N = ۳۲۵۷۲۹$ وشیب خطچین $\gamma_{www} = ۲/۱$ [۲۴]. ۲۴
۸.۱ تابع توزیع درجه داده‌های پایگاه برق آمریکای جنوبی با $\langle k \rangle = ۲/۶۷$ ، $N = ۴۹۴۱$ و شیب خطچین $\gamma_{power} = ۴$[۲۴]. ۲۵

۱.۲ محور افقی نرخ مولد و محور عمودی مقادیر نهایی i برای مدل SIS و مقدار نهایی r برای مدل SIR را نمایش می‌دهد. شبکه همگن با خط پر و ناهمگن با خطچین به تصویر کشیده شده است[۳۶]. ۴۲
۲.۲ تعداد افراد بهبودیافته برحسب حدآستانه‌های متفاوت در شبکه تصادفی. به ازای نرخ بهبودی‌های α متفاوت.نتایج مربوط به $(N = ۱۰^۶)$ [۳۴]. . . ۴۳
۳.۲ تعداد افراد بهبودیافته برحسب حدآستانه‌های متفاوت در شبکه بدون مقیاس. به ازای نرخ بهبودی‌های α متفاوت.نتایج مربوط به $(N = ۱۰^۶)$ [۳۴]. ۴۴
۴.۲ نمودار مربوط به مدل SIR که نمودارهای S, I و R را برحسب گام زمانی نشان می‌دهد[۳۸]. ۴۴

۱.۳ نمودار ضریب‌خوشه‌ای و طول‌مشخصه مربوط به $z = ۲$. ۴۹
۲.۳ نمودار ضریب‌خوشه‌ای و طول‌مشخصه مربوط به $z = ۴$. ۵۰

۳.۳ نمودار ضریب‌خوشه‌ای و طول‌مشخصه مربوط به $z = ۸$. ۵۰
۴.۳ نمودار ضریب‌خوشه‌ای و طول‌مشخصه مربوط به $z = ۱۶$. ۵۱
۵.۳ نمودار ضریب‌خوشه‌ای به ازای رئوس و p مختلف ، $z = ۲$. ۵۱
۶.۳ نمودار ضریب‌خوشه‌ای به ازای رئوس و pمختلف ، $z = ۱۶$. ۵۲
۷.۳ نمودار طول مشخصه به ازای رئوس و p مختلف ، $z = ۲$. ۵۳
۸.۳ نمودار طول مشخصه به ازای رئوس و p مختلف ، $z = ۱۶$. ۵۳
۹.۳ نمودار طول مشخصه به ازای رئوس و p مختلف. محور x لگاریتمی است. ۵۴
۱۰.۳ نمودار مربوط به $N = ۲۰۴۸, p = ۰/۰۰۳۹$ و z های مختلف ۵۵
۱۱.۳ نمودار مربوط به $N = ۴۰۹۶, p = ۰/۰۰۳۹$ و z های مختلف ۵۵
۱۲.۳ نمودار مربوط به $N = ۸۱۹۲, p = ۰/۰۰۳۹$ و z های مختلف ۵۶
۱۳.۳ نمودار مربوط به $N = ۱۶۳۸۴, p = ۰/۰۰۳۹$ و z های مختلف ۵۶
۱۴.۳ نمودار مربوط به $z = ۲, N = ۲۰۴۸$ و p های مختلف ۵۷
۱۵.۳ نمودار مربوط به $z = ۸, N = ۲۰۴۸$ و p های مختلف ۵۷
۱۶.۳ نمودار مربوط به $z = ۲, p = ۰/۰۰۳۹$ و N های مختلف ۵۸
۱۷.۳ نمودار مربوط به $z = ۴, p = ۰/۰۰۳۹$ و N های مختلف ۵۹
۱۸.۳ نمودار مربوط به $z = ۱۶, p = ۰/۰۰۳۹$ و N های مختلف ۵۹
۱۹.۳ نمودار با نرخ‌بهبودی‌های متفاوت بر حسب حدآستانه برای zهای متفاوت. ۶۰
۲۰.۳ نمودار مربوط به $N = ۲۰۴۸, z = ۲$ و مقدار بهبودی‌های متفاوت. . . . ۶۰
۲۱.۳ نمودار سیگما(نصف پهنای تابع گوسی) برحسب حدآستانه انتشار شایعه
برای توزیع گاوسی نرخ تاثیرپذیری در بین افراد جامعه ۶۱

فهرست جداول

۱.۱ این جدول نشان می‌دهد که این سه شبکه از الگوی دنیای کوچک پیروی می‌کنند[۱۸]. ۲۰

فصل ۱

سامانه های پیچیده و روش های بررسی آن

۱.۱ مقدمه

فیزیک به بررسی پدیده‌های طبیعی می‌پردازد. هر آنچه در محیط وجود دارد را می‌توان با علم فیزیک مورد بررسی قرار داد. فیزیک یک مدلی از پدیده‌های طبیعی ارائه می‌دهد، در حقیقت یک مدل‌سازی از پدیده‌های طبیعی است. مدل‌سازی به این معنی که ابتدا یک سری قوانین جهان شمول و یا آماری را از پدیده به دست آورد که این رخداد از چه قوانینی تبعیت می‌کند، اجزای تشکیل دهنده‌ی آن چیست و برهم‌کنش این اجزاء بایکدیگر و محیط اطراف چگونه است. حال می‌توان با استفاده از این اطلاعات پدیده را به زبان ریاضی و فرمول‌بندی نوشت و تحول زمانی این پدیده را با استفاده از مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیلی بیان کرد و آن را حل کرد اگر قابل حل کردن باشد.

گاهی اوقات تعداد معادلات به گونه‌ای زیاد و پیچیده است که حل دقیق آنها غیر ممکن است. برخی از این معادلات دیفرانسیل خطی و برخی دیگر غیرخطی‌اند. غیرخطی بودن معادلات عموماً ناشی از تعداد زیاد ذرات است که حل آنها به صورت تحلیلی غیرممکن است و باید به صورت عددی حل شوند. معادلات غیرخطی به صورت آماری و معادلات خطی به صورت

حتمی توصیف می‌شوند. با استفاده از این توصیفات می توان آینده پدیده را به صورت حتمی یا احتمالاتی پیش‌گویی کرد. یک مثال ساده معادلات حرکت نیوتن را در نظر بگیرید، با استفاده از این معادلات می‌توان مکان بعدی ذره را در زمان بعدی به صورت دقیق پیش‌بینی کرد. گرچه پدیده‌هایی وجود دارد که نمی‌توان آینده آنها را پیش‌گویی کرد مانند، سامانه‌های جنگل، کوه، دشت، دریا، زمین، آسمان، کیهان، مواد و هزاران موضوع دیگر از پدیده‌های طبیعی و یا پدیده‌های انسانی مثل بیوفیزیک، شبکه عصبی، ترافیک، بازار بورس، زبان و ... وجود دارد که می توان توسط علم فیزیک آن‌ها را مورد بررسی قرار داد. علم پیچیدگی نشان می‌دهد که زندگی در حالی که مطابق با قوانین فیزیکی است ولی فیزیک نمی‌تواند زندگی را پیش‌بینی کند[۱].

۲.۱ سامانه‌ها

سامانه[۱] یک قسمتی از جهان هستی است که به صورت واقعی یا ذهنی از محیط اطرافش مجزا شده است. یک سامانه دارای اجزای تشکیل‌دهنده است. سامانه‌ها را به روش‌های مختلفی تقسیم‌بندی می‌کنند. یکی از این تقسیم‌بندی‌ها به دو دسته بزرگ سامانه‌های باز و بسته است. در سامانه‌های باز اجزاء سامانه می‌توانند بامحیط اطرافشان برهم‌کنش داشته باشند ولی در سامانه‌های بسته، اجزاء فقط تحت تاثیر نیروهای داخلی هستند و با محیط اطراف هیچ برهم‌کنشی ندارند[۱].

سامانه‌های ساده[۲] به سامانه‌هایی اطلاق می شود که دارای اجزاء کمتری هستند و به همین دلیل به راحتی می توان همه اطلاعات که بسیار ناچیز است را به دست آورد و سامانه را مورد بررسی قرار داد. به عنوان نمونه آونگ ساده که از اجزاء کمی تشکیل شده و به سادگی می‌توان سامانه را شناخت و اطلاعات کاملی را به دست آورد. سامانه‌های مرکب[۳]، مثل رایانه‌ها، که از تعداد زیادی جزء تشکیل شده‌اند و تحت قواعدی که از قبل تعیین شده قرار دارند. اجزاء نیز در

[۱] System

[۲] Simple system

[۳] Compound system

سامانه‌های مرکب با یکدیگر برهم‌کنش دارند[۲]. دسته‌ی سوم این سامانه‌ها اشاره به سامانه‌های پیچیده دارد که در قسمت بعدی خصوصیات این نوع سامانه‌ها به طور مفصل شرح داده می‌شود. در بسیاری از مطالعات نظری در حوزه ماده چگال سامانه در حالت تعادلی می‌باشد. چنین فرض‌هایی سبب پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در این سامانه‌ها شده است. ولی سامانه‌های پیچیده[۴] در حالت عدم تعادلی قرار دارند.

۳.۱ خصوصیت سامانه‌های پیچیده

سامانه‌های پیچیده اخیرا در علوم طبیعی و علوم اجتماعی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. یکی از جنبه‌های پیچیدگی این سامانه‌ها اشاره به نوع ساختار آنها دارد. این نوع سامانه‌ها از اجزای بسیار زیادی تشکیل شده‌اند که این اجزاء لزوماً همسان نیستند(یعنی انواع مختلف دارند). پیچیدگی در خود اجزاء نیز وجود دارد به این معنی که اجزاء نیز دارای ساختار داخلی هستند . برهم‌کنش‌های متغیری بین اجزاء وجود دارد. علاوه‌براین، برهم‌کنش اجزاء با یکدیگر به صورت غیر خطی می باشد به همین دلیل است که برهم‌کنش‌های بین اجزاء سامانه رانمی‌توان به وسیله‌ی آنالیزهای ساده‌ی ریاضی مورد بررسی و شناخت قرار داد[۳].

با گذشت زمان اجزاء تحول پیدا می‌یابند و معادله‌ی تحول آنها نیز یکسان نیست یعنی معادلات تحول مختلفی برای سامانه وجود دارد. البته گاهی اوقات می‌توان این معادلات تحول را به گونه‌ای نوشت که برای اجزاء یکسان باشد ولی به قدری پیچیده می‌شود که نمی‌تواند سامانه را مشخص کند و یا هرگز نمی‌توان این معادله‌ها راحل کرد. پس پیچیدگی در معادلات تحول هم وجود دارد. پدیده‌هایی که در این سامانه‌ها رخ می‌دهند پیش‌بینی ناپذیرند، بدین معنی که اگر رفتار تک‌تک اجزای آن را بدانیم، نمی‌توانیم رفتار جمعی آن‌ها را به‌دست آوریم[۴]. به طور مثال کارکرد یک نرون در مغز ساده است ولی مغز شبیه یک سامانه پیچیده رفتار می‌کند. رفتارهای مغز در زمینه‌های یادگیری، کلیت‌گرایی،هوشیاری، درک مستقیم و ... بسیار پیچیده است. یک مورچه به تنهایی یک سامانه ساده است ولی زندگی اجتماعی مورچه‌ها بسیار پیچیده

[۴] Complex system

است[۳].

سامانه‌های پیچیده با محیط اطراف خود در ارتباط هستند که این امر سبب می شود که یک حالت عدم تعادلی داشته باشند و محیط اطراف یک تاثیر ناپایا بر روی سامانه ایجاد می کند. چون رفتار سامانه پیچیده با محیط به صورت غیرخطی است این بر پیچیدگی شناخت ما از سامانه می‌افزاید[۴].

برخی دیگر از ویژگی‌های قابل توجه که به علت برهم‌کنش های غیرخطی بین اجزاء سامانه‌های پیچیده وجود دارد این است که حالت خودبه‌سامان[۵] در بعضی از این سامانه‌ها مشاهده می‌شود. به این معنی که در این حالت برهم‌کنش بین اجزاء به صورت ناخودآگاه و خودبه‌خودی صورت می‌گیرد. به طور مثال در مهاجرت پرندگان، پرنده‌ها به صورت خودبه‌خودی و ناخودآگاه در مکان‌هایی قرار می‌گیرند.

در حالت خودسازمان‌یافته نمی‌توان انتظار داشت که اجزاء فقط با خودشان تعامل داشته باشند، زیرا اگر تغییری در برهم‌کنش بین اجزاء و یا تغییری در خود جزء به وجود آید این تغییر بر کل سامانه تاثیر می‌گذارد. به این ترتیب حالت جمعی[۶]در سامانه دیده می شود. به طور مثال می توان به ارگان های بیولوژی مثل مغز، اینترنت، شبکه‌های انسانی، سامانه‌های خودسازمان‌ده بحرانی مثل زلزله، تپه‌شنی و... اشاره کرد[۳].

ممکن است یک تغییر بسیار کوچک در داخل سامانه منجر به یک تغییر بسیار بزرگی در کل سامانه شود. به این نوع از پدیده‌ها طوفان[۷] و یا فاجعه[۸] می‌گویند. به عنوان مثال می‌توان به بهمن[۹]، رکود بازار سهام و انقلاب اشاره کرد. گرچه سامانه‌های پیچیده به پدیده‌های مهم و ممتازی چون بهمن و برایند و فاجعه و... می پردازد ولی این پدیده ها جزء پدیده‌های نادر و کمیاب هستند و تعداد آنها محدود است به طوری که می‌توان آنها را نام برد، گرچه به صورت گسترده و وسیع هستند[۳]. چند خصوصیت دیگر از سامانه‌های پیچیده را می توان این گونه

---

[۵] Self-organized

[۶] Emergence

[۷] Cataclysm

[۸] Catastrophe

[۹] Avalanches

بیان کرد:

- پیچیدگی را می توان در سامانه‌های طبیعی یا مصنوعی (ساخت دست بشر) یافت.
- سامانه‌های پیچیده می‌توانند سامانه‌های بزرگ یا کوچک باشند.
- شکل ظاهری سامانه‌های پیچیده می تواند منظم یا نامنظم باشد.
- هر چه تعداد ذرات بیشتر باشد، احتمال پیچیده بودن آن سامانه فزونتر خواهد بود.
- سامانه‌های پیچیده نه کاملا قطعی و یقینی و نه کاملا تصادفی یا اتفاقی است بلکه در طیفی بین دو حد قرار دارد.
- سامانه‌های پیچیده سامانه‌های باز محسوب می شوند.
- سامانه‌های پیچیده برگشت‌ناپذیرند.
- سامانه‌ها، پیچیده و پویا هستند و هدف متغییر و متحرکی را دنبال می کنند[۵].

پدیده‌هایی که خیلی عادی و معمولی هستند را نیز می توان در سامانه‌های پیچیده مورد بررسی قرار داد. مثال‌های معمولی که در زیر ذکر شده است[۳]:

- روستاها، شهرستان‌ها، شهرها، دولت‌ها یا استان‌ها، ملت، یا دنیا.

- شبکه‌ی غذایی که ارتباط بین گونه‌ها را توصیف می کند: موجودات زنده برای زنده ماندن باید موجودات زنده‌ی دیگر را بخورند.

- هر سازمانی که مسئول فعالیت‌های سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی و... .

- مدیریت، سامانه‌ی زیستی، مدیریت و کنترل از انتقال بیماری‌های عفونی و یا انتشار شایعه.

- شبکه‌ی جهانی وب، سامانه‌های فیزیکی و شیمیایی، ارتعاش مواد دانه‌ای، پیچیدگی در مواد خودمونتاژ، مواد گرانول.

۴.۱ روش‌های مطالعه سامانه‌های پیچیده

این سامانه‌ها را می‌توان از سه روش مورد مطالعه قرار داد:

الف)دینامیک غیر خطی و نظریه آشوب

ب)مکانیک آماری

ج)نظریه شبکه‌ها.

سامانه‌های دینامیکی اغلب توسط معادلات دیفرانسیلی فرمول‌بندی می‌شوند. برای این سامانه‌ها اغلب از فضای فاز N بعدی با محورهای $x_1، x_2، ..... ، x_n$ استفاده می شود. همان‌طور که سامانه تکامل می‌یابد، $x(t)$ در فضای حالت جریان می‌یابد و به‌وسیله $v(x)$ میدان سرعت هدایت می‌شود[۶].

فرض می‌شود که $x(t)$ در نهایت در نقطه‌ای مانند x^* می‌ایستد. بنابراین سرعت در آن نقطه صفر است. پس x^* یک نقطه‌ی ثابت است. این موضوع به یک حالت تعادلی در فیزیک اشاره دارد. حالت دیگری که می‌توان در نظر گرفت این است که حالت تناوبی داشته باشیم. که هر دو حالت از پایه‌های فیزیک نیوتنی کلاسیک هستند که بیان‌گر الگوی منظم و باثبات در حرکت پدیده‌ها و روابط آنها است. احتمال سوم مجموعه‌ای از حالت‌ها است که در آن همیشه حالت بی‌نظمی وجود دارد. $x(t)$ ها هرگز متوقف نمی‌شود و حالت تناوبی نیز دیده نمی‌شود. این جاذبه عجیب محصول غیرخطی بودن معادلات دیفرانسیلی است و آشوب نامیده می شود. برای اولین بار توسط ادوار لورنتز[۱۰] استاد هواشناسی، ملاحظه و منتشر شد. وی در ادامه تحقیقات خود با شگفتی به این نتیجه رسید که یک تغییر جزیی در شرایط اولیه می‌تواند تغییرات اساسی و شدیدی را در پیش‌بینی ونتایج ایجاد کند[۶، ۷]. تئوری آشوب، سامانه‌های دینامیکی بسیار پیچیده‌ای مانند اتمسفر زمین، جمعیت حیوانات، جریان مایعات، تپش قلب انسان، فرایندهای زمین‌شناسی و ... را مورد بررسی قرار می‌دهد.

سامانه‌های پیچیده تمایل به تشکیل یک ساختار مشخصه دارند بنابراین در این نوع سامانه‌ها حالت خودمتشابهی[۱۱] دیده می‌شود و رفتار فرکتالی[۱۲]از خود بروز می دهند. این حالت نیز از رفتارهای غیرخطی بین اجزاء ناشی می‌شود. برای سامانه‌های پیچیده این قوانین به صورت

---

[۱۰] Edvard Lorentz

[۱۱] Self similarty

[۱۲] Fractal

توزیع توانی نمایش داده می‌شوند و به قوانین توانی[۱۳] معروفند. در حقیقت در رفتار فرکتالی، خصوصیت‌های آماری یکسانی برای مقیاس زمان‌های[۱۴] مختلف می‌توان به دست آورد[۸].

انواع تابع توزیع برای تعیین خاصیت‌های آماری برای سامانه‌های پیچیده وجود دارد. مثل تابع گاوسی[۱۵]، تابع تعمیم یافته گاما، تابع قانون توانی، توزیع $Log-normal$. مثال‌هایی برای این توابع توزیع از این دست است: توزیع درآمد افراد ثروتمند، قانون پرتو[۱۶]، رتبه‌بندی فرکانسی حروف یا رتبه‌بندی جمعیت شهرها که قانون زیف[۱۷]نامیده می شود، قانون گوتنبرگ-ریچر[۱۸] برای فرکانس های زلزله و ...[۳].

نظریه شبکه‌ها نیز روش دیگر برای بررسی سامانه‌های پیچیده است. شاید از آشکارترین شیوه برای مطالعه سامانه‌های پیچیده، مطالعه بر روی ساختار شبکه‌ای آنها باشد. در این روش اجزای سامانه به صورت گره[۱۹] و برهم‌کنش بین اجزاء را با پیوندی[۲۰]میان گره‌های مربوط به آن را نشان می دهیم. برخی از سامانه‌ها مثل شبکه‌های اجتماعی: ارتباط ورزشی، بازیگران در فیلم‌ها، ارتباط نژادی، استناد در مقالات، مکالمات تلفنی و ... . در شبکه‌های بیولوژی: شبکه‌ی عصبی، شبکه‌ی پروتئینی. شبکه‌های اطلاعات: تارجهان‌گستر[۲۱]، اینترنت و به طور کلی شبکه‌ها همه‌جا هستند[۳].

---

[۱۳] Power-law

[۱۴] timescales

[۱۵] Gaussian

[۱۶] Pareto

[۱۷] Zipf

[۱۸] Gutenberg-Richter

[۱۹] Node

[۲۰] Link

[۲۱] World-wide-web

۵.۱ شبکه‌های پیچیده

تئوری گراف در سال ۱۷۳۶ توسط لئونارد اویلر[۲۲] برای حل مسئله‌ی پل‌های گوینزبرگ[۲۳] ارائه شد. بیش از ۲۰۰ سال است که به عنوان یک شاخه‌ای از ریاضیات محسوب می شود. شبکه‌ها از گره‌ها و یال‌ها ساخته می‌شوند. البته ریاضی‌دانان به شبکه گراف می گویند و فرض می کنند که یال‌ها به صورت تصادفی بین گره‌ها توزیع شده است. به طور مثال اگر ۱۰ گره و ۵۰ یال داشته باشیم، هر گره به طور متوسط ۵ یال می‌تواند داشته باشد[۹].

اگر شش میلیون انسان را به عنوان گره در نظر بگیریم و به این دنیای اجتماعی مدل توزیع تصادفی را اعمال کنیم . آن‌گاه همه‌ی انسان‌ها باید به تعداد مساوی یال (دوست) داشته باشند ولی این در دنیای واقعی غیرممکن است. پس شبکه‌های واقعی گراف‌های تصادفی نیستند زیرا ناهمگنی‌های زیادی از خود نشان می دهند که نشان دهنده‌ی سطح بالایی از نظم و سازمان یافتگی آنها است[۹].

نخستین بار از مفهوم شبکه در تحقیقات جامعه‌شناسی استفاده شد. استنلی میلگرام[۲۴] در اواخر دهه ی ۶۰ میلادی، آزمایش معروف شش درجه جدایی[۲۵] را انجام داد ونتیجه ی آزمایش این بود که هرکس می‌تواند با فرد دیگری بر روی زمین تنها از طریق شش واسطه ارتباط داشته باشد. تئوری گراف‌های تصادفی توسط إردوش-رنی[۲۶] در سال ۱۹۵۰ چاپ شد. و در اواخر قرن بیستم ۱۹۹۸، مدل دنیای کوچک توسط واتس[۲۷] و اشتروگاس[۲۸] و مدل شبکه‌ی بدون مقیاس توسط باراباسی آلبرت[۲۹] در سال ۱۹۹۹ ارائه شد که یک انفجار بزرگی در تحقیقات ایجاد کرد[۱۰].

---

[۲۲] Leonard Euler

[۲۳] Konigsberg

[۲۴] Stanley Milgram

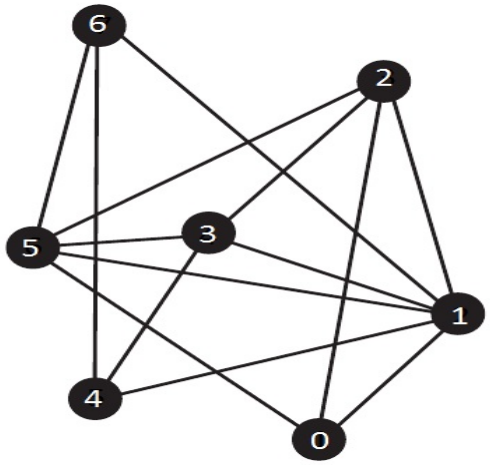
[۲۵] Six degrees of separation

[۲۶] Erdös-Rényi

[۲۷] Watts

[۲۸] Strogatz

[۲۹] Barbasi Albert



شکل ۱.۱: گراف بدون جهت با ۷ راس و ۱۴ پیوند[۱۱]

۶.۱ مفاهیم پایه‌ای و خصوصیت‌های آماری شبکه‌های پیچیده

معمولاً گراف‌ها با n تعداد رئوس و m تعداد یال‌ها مشخص می‌شود. گراف به صورت $G(n,m)$ نشان داده می‌شود. که n مرتبه گراف و m سایز گراف نیز نامیده می‌شود. هرگاه بین دو راس بیش از یک یال وجود داشته باشد آن یال را یال موازی[۳۰] می‌نامند. اگر راسی با خودش یال داشته باشد، آن یال را طوقه[۳۱] می‌نامند. راسی در شبکه که با هیچ راس دیگری ارتباط نداشته باشد را راس منفرد[۳۲] می‌نامند. مثالی از گرافی با ۷ راس و ۱۴ پیوند در تصویر ۱.۱ مشاهده می‌کنید. توجه کنید که در این گراف یال موازی ، طوقه و راس منفرد نداریم[۱۲، ۱۳، ۱۴].

پارامترهای گره و یال از یکدیگر مستقل نیستند. اگر فرض شود، در گرافی با n گره، با این شرط که در آن شبکه یال موازی و طوقه وجود نداشته باشد. در این صورت هر گره بیشترین پیوندهایی که می تواند با رئوس دیگر داشته باشد $(n-۱)$ است، پس ماکزیمم تعداد پیوندهایی که در این گراف می‌توان داشت برابر خواهد بود با $m_{max} = n(n-۱)/۲$. اگر برای یک یال شروع و پایان گره مهم باشد آنگاه $m_{max} = n(n-۱)$ پیوند خواهیم داشت [۸، ۱۲].

---

[۳۰] parallel

[۳۱] loop

[۳۲] Isolated vertex

۱.۶.۱ ماتریس مجاورت

ساختار گراف را می توان توسط یک ماتریس نشان داد که به ماتریس مجاورت[۳۳] مشهور است. ماتریس مجاورت را با $A(n,n)$ نشان می‌دهند که دارای n سطر و n ستون است. درایه‌های ماتریس را با a_{ij}، که مقادیر ۰ و ۱ را می‌تواند داشته باشد، نمایش می‌دهند. اگر رئوس i و j با یکدیگر پیوندی داشته باشند به عبارتی همسایه‌ی یکدیگر باشند آنگاه $a_{ij} = ۱$ و در غیر این صورت مساوی صفر خواهد بود. این ماتریس متقارن است[۸]. ماتریس مجاورت گراف شکل۱.۱به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

دو گراف مهم و البته ساده وجود دارد. گراف کامل، گرافی است که در آن تمام یال‌های ممکن بین رئوس موجود در گراف رسم شده باشد و با K_N نمایش می دهند. گراف دوم به گرافی اشاره دارد که در آن هیچ یالی رسم نشده باشد آن را گراف تهی می نامند و با E_N نمایش می دهند.

گراف همبند یا پیوسته[۳۴] به گرافی گفته می‌شود که بین هر دو راس مجزا در گراف حداقل یک مسیر موجود باشد[۸].

---

[۳۳] Adjacency Matrix

[۳۴] Connected graph