بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

**دانشگاه کردستان**

**دانشکده علوم**

**گروه ریاضی**

(پایان‌نامه کارشناسی ارشد)

عنوان:

# $\varphi$−میانگین‌پذیری و $(\varphi,\psi)$−میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ

دانشجو:

**ناصر قمری**

استاد راهنما:

**دکتر صابر ناصری**

استاد مشاور:

**دکتر هوگر قهرمانی**

۱۳۹۱

# تقدیم به...

پدر و مادر مهربانم،

خواهر و خواهرزاده عزیزم،

برادرهای خوبم یاسر و محمد

و

نامزد گلم.

# تشکر و قدردانی

مدح و ثنای خدای بزرگ را که خالق بی‌همتای هستی است. خدایی که افکار ژرف‌اندیش ذات او را درک نکرده و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. خدایی که عالم مطلق است و از او عالم‌تر هرگز نیست. خدایی که خالق انسان‌هاست و نعمت تحصیل علم را در وجود انسان نهاد تا از این نعمت به نحو احسن استفاده نماید. خدا را شاکرم که به این بنده حقیر لطف و عنایت تحصیل علم را فرمود. خدایی که همیشه در تمام لحظات زندگی، یار و یاور همیشگی من بوده است. خدایی که مرهم دردهایم، آرام‌بخش قلبم، همدم بی‌کسی‌هایم، التیام‌بخش زخم‌هایی که از روزگار دیده‌ام و اجابت کننده دعاهای من است.

در پایان لازم می‌دانم در ابتدا از پدر و مادرم که همیشه یار و غمخوار من در طول این سالهای سپری شده از عمرم بودند و به خاطر زحمات بی‌شائبه‌ی که در حق این بنده‌ی حقیر در این سالهای تحصیل کشیده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم. از راهنمایی‌ها و مشاوره‌های مفید اساتید گرامی و ارجمند راهنما و مشاور، آقایان دکتر صابر ناصری و هوگر قهرمانی، و زحمات کارشناس محترم گروه خانم زندی نژاد، هم‌چنین همیاری و همدلی دوستان عزیز، آقایان ناصر الیاسی، عنایت باباخانی، حمید علیزاده، ادریس باپیری، رامین الیاسی، مسلم پرندین، داریوش میرزایی، کامران محمودی، آزاد امین‌پور، نعمت مرادی، اسماعیل مرادی، ناصح مردوخی، جمیل حیدری، سیدمحسن حسینی،علی محمدپناه، وحید قاسمی و سایر دوستان تشکر و سپاس‌گذاری می‌کنم و برای‌شان آرزوی موفقیت در تمام صحنه‌های زندگی می‌نمایم.

# چکیده

در این پایان نامه مفهوم $\varphi-$میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را معرفی کرده و شرایط معادل با این مفهوم، ویژگی‌های موروثی و بعضی خواص آن را بیان می‌کنیم. در ادامه مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف و $n-$میانگین‌پذیری ضعیف را بررسی کرده و در پایان با در نظر گرفتن این دو مفهوم، تعمیمی از میانگین‌پذیری ضعیف بنام $(\varphi, \psi)-$میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.



**کلمات کلیدی:** *میانگین‌پذیری، میانگین پذیری ضعیف، $\varphi-$ میانگین‌پذیری، $(\varphi, \psi)-$ میانگین‌پذیری ضعیف، جبرهای باناخ.*

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

مفهوم میانگین‌پذیری جایگاه مهمی در جبرهای باناخ دارد. این مفهوم برای اولین بار توسط جانسون در سال ۱۹۷۲ بیان شد. هدف جانسون یافتن خاصیتی روی $L^1(G)$ از یک گروه موضعا فشرده $G$ بود که با میانگین‌پذیری $G$ معادل باشد. پس از یافتن این خاصیت، آنرا میانگین‌پذیری نامید و آنرا به تمام جبرهای باناخ تعمیم داد. در فصل اول پس از بیان تعاریف و قضایای مقدماتی، برخی نتایج مهم میانگین‌پذیری را ارائه می‌دهیم. مفهوم میانگین‌پذیری که توسط جانسون ارائه شد، برای نیم گروهها همواره برقرار نبود. برای مثال نیم گروه جمعی $\mathbb{N}$ میانگین‌پذیر است اما $L^1(\mathbb{N})$ میانگین‌پذیر نمی‌باشد[۳۰].

برای رفع این مشکل، لائو مفهوم میانگین‌پذیری چپ را معرفی کرد. برای مثال به کمک این مفهوم نیم گروه گسسته $S$ میانگین‌پذیر چپ است اگر وتنها اگر $l^1(S)$ میانگین‌پذیر چپ باشد. در حالت خاص $L^1(\mathbb{N})$ میانگین‌پذیر چپ است.

در ادامه لائو، پیم و کانیوس مفهوم میانگین‌پذیری چپ را به $\varphi-$میانگین‌پذیری جبرهای باناخ تعمیم دادند که در فصل دوم به آن می‌پردازیم.

در فصل سوم به بررسی مفهوم دیگری به نام میانگین‌پذیری ضعیف خواهیم پرداخت. مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ اولین بار توسط بید، کورتیس و دیلز در سال ۱۹۸۷ برای جبرهای باناخ جابجایی و سپس در همان سال توسط جانسون برای جبرهای باناخ دلخواه مطرح شد.در ادامه مساله میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ در سال ۱۹۹۶ توسط لائو و لوی ارائه شد و در سال ۱۹۹۸ مفهوم $n-$میانگین‌پذیری ضعیف برای اولین بار توسط دیلز، قهرمانی و گرونبگ بیان شد.

در فصل چهارم با در نظر گرفتن مفهوم $\varphi-$میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری ضعیف، مفهوم $(\varphi,\psi)-$میانگین‌پذیری ضعیف را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

# فصل ۱

# مقدمات و پیش‌نیازها

## ۱.۱ تعاریف مقدماتی

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ با عمل ضرب $A \times A \longrightarrow A$ : . باشد بطوریکه برای هر $a, b, c \in A$ و $t \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱. $(ab)c = a(bc)$

۲. $(a+b)c = ac + bc$

۳. $a(b+c) = ab + ac$

۴. $t(ab) = (ta)c$.

در اینصورت $A$ را یک جبر مختلط یا به طور ساده یک جبر نامند.

**تعریف ۲.۱.۱.** یک نرم روی $X$ تابعی چون $\|x\| \longrightarrow x$ از $X$ به $[0, \infty)$ است بطوریکه

۱. به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲. به ازای هر $x \in X$ و $t \in \mathbb{C}$، $\|tx\| = |t| \, \|x\|$.

نیم نرمی که در آن $\|x\| = 0$ فقط وقتی برقرار باشد که $x = 0$ یک نرم نامیده می‌شود و هر فضای برداری مجهز به نرم، یک فضای برداری نرم‌دار نامیده می‌شود.

جبر $A$ نرم دار است هرگاه بعنوان یک فضای برداری، نرم دار باشد و برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

**تعریف ۳.۱.۱.** جبر نرم دار $A$ را یک جبر باناخ[1] نامند هرگاه بعنوان یک فضای نرم دار کامل باشد، یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر روی $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه نگاشت

$$* : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto a^*$$

را یک برگشت گوییم اگر برای هر $a, b \in A$ و $t \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱. $(a+b)^* = a^* + b^*$

۲. $(ta)^* = \bar{t}a^*$

۳. $(a^*)^* = a$

۴. $(ab)^* = b^*a^*$.

منظور از یک $*-$ جبر باناخ، جبر باناخی است که مجهز به نگاشت بالا باشد بطوریکه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\|a^*\| = \|a\|.$$

$*-$ جبر باناخ را $C^*-$ جبر باناخ گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\|aa^*\| = \|a\|^۲.$$

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک $A-$مدول چپ، فضای خطی $E$ روی $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت دوخطی

$$A \times E \longrightarrow E$$

$$(a, x) \longmapsto a.x$$

می‌باشد بطوریکه

$$a.(b.x) = (ab).x \qquad (a, b \in A \ \ , x \in E).$$

همچنین $A-$مدول راست، فضای خطی $E$ روی $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت دوخطی

$$A \times E \longrightarrow E$$

$$(a, x) \longmapsto x.a$$

[1] Banach algebra

می‌باشد بطوریکه

$$(x.a).b = x.(ab) \qquad (a, b \in A \ \ , x \in E).$$

$E$، یک $A-$مدول است هرگاه هم $A-$مدول راست و هم $A-$مدول چپ باشد که

$$a.(x.b) = (a.x).b \qquad (a, b \in A \ \ , x \in E).$$

**مثال ۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر و $\varphi, \psi$ تابعک‌های خطی روی $A$ باشند. در اینصورت $\mathbb{C}$ یک $A-$مدول تحت اعمال زیر است

$$a.z = \varphi(a)z \quad , \quad z.a = \psi(a)z \qquad (a \in A \ \ , z \in \mathbb{C}).$$

**تعریف ۶.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ باشد در اینصورت:
$A-$مدول چپ $X$ را یک $A-$مدول چپ باناخ گوییم هرگاه $A$ یک فضای باناخ باشد و برای $K > 0$ داشته باشیم

$$\|ax\| \leq K\|a\|\|x\| \ \ (a \in A \ \ , x \in X).$$

$A-$مدول راست باناخ نیز بطور مشابه تعریف می‌شود. فضای باناخ $X$ را $A-$دومدول باناخ گوییم هرگاه $A-$مدول راست و چپ باناخ باشد.

**تعریف ۷.۱.۱.** اگر $X$ یک فضای برداری توپولوژیکی باشد، آنگاه فضای دوگان $X$ را با $X^*$ نشان می‌دهیم. اگر $X$ یک فضای نرم دار باشد، آنگاه برای هر $\phi \in X^*$ قرار می‌دهیم

$$\|\phi\| = \sup\{| \ \phi(x) \ |: \ \|x\| \leqslant ۱\} \ .$$

$X^*$ با نرم فوق یک فضای باناخ است.

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک $A-$مدول چپ باناخ باشد. در اینصورت $X^*$، یک $A-$مدول راست باناخ با عمل مدولی زیر است

$$\langle x, f.a\rangle = \langle a.x, f\rangle \qquad (a \in A \, , x \in X \ , f \in X^*).$$

بطور مشابه هرگاه $X$ یک $A-$مدول راست باناخ باشد، در اینصورت $X^*$ یک $A-$مدول چپ باناخ با عمل مدولی زیر است

$$\langle x, a.f\rangle = \langle x.a, f\rangle \qquad (a \in A \, , x \in X \ , f \in X^*).$$

هرگاه $X$ یک $A-$دومدول باناخ باشد، $X^*$ یک $A-$دومدول باناخ با اعمال مدولی فوق است. $X^*$ را مدول دوگان $X$ گویند.

در حالت خاص $A^*$ یک $A-$مدول باناخ با اعمال مدولی زیر برای هر $a, b \in A \ , f \in A^*$ است.

$$\langle b, f.a\rangle = \langle ab, f\rangle \ \ , \ \ \langle b, a.f\rangle = \langle ba, f\rangle.$$

آرنز[1] [۱] برای جبر باناخ $A$ دو نوع ضرب روی $A^{**}$، دوگان دوم جبر باناخ $A$ بصورت زیر تعریف کرده است

**تعریف ۹.۱.۱.** الف)ضرب آرنز اول که با نماد $\Box$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\Box : A^{**} \times A^{**} \longrightarrow A^{**}$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \Box \psi$$

برای $a, b \in A$، $f \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$ داریم

$$\langle m \Box n, f \rangle = \langle m, n.f \rangle$$

$$\langle n.f, b \rangle = \langle n, f.b \rangle$$

$$\langle f.a, b \rangle = \langle f, ab \rangle \ .$$

$A^{**}$ با این ضرب یک جبر باناخ است. در این پایان نامه در بیشتر جاها به جای $m \Box n$، $mn$ را قرار می‌دهیم.

ب)ضرب آرنز دوم که با نماد $\Diamond$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\Diamond : A^{**} \times A^{**} \longrightarrow A^{**}$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \Diamond \psi$$

برای $a, b \in A$، $f \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$ داریم

$$\langle m \Diamond n, f \rangle = \langle m, f.n \rangle$$

$$\langle f.n, b \rangle = \langle n, b.f \rangle$$

$$\langle a.f, b \rangle = \langle f, ba \rangle \ .$$

$A^{**}$ با این ضرب یک جبر باناخ است.

اگر حاصلضرب‌های اول ودوم آرنز با هم برابر باشند، یعنی برای هر $m, n \in A^{**}$ داشته باشیم

$$m \Box n = m \Diamond n$$

آنگاه می‌گوییم $A$ منظم آرنز است. برای مثال $C^*-$ جبرها همواره منظم آرنز هستند.

[1] Arens

**تعریف ۱۰.۱.۱.** فرض کنید اعمال مدولی $A^{(2m)}$ روی $X^{(2m)}$ برای $m \geq 0$ تعریف شده باشند. در اینصورت برای $k \geq 1$، $X^{(2m+k)}$ یک $A^{(2m)}-$ دومدول باناخ است. اگر $\Theta \in X^{(2m+k)}$ و $\Omega \in A^{(2m)}$ آنگاه برای $\xi \in X^{(2m+k-1)}$ اعمال مدولی بصورت زیر خواهند بود

$$\langle \xi, \Omega.\Theta \rangle = \langle \xi.\Omega, \Theta \rangle \ ,$$

$$\langle \xi, \Theta.\Omega \rangle = \langle \Omega.\xi, \Theta \rangle \ .$$

که در اینجا $\Omega.\Theta, \Theta.\Omega \in X^{(2m+k)}$.

اکنون برای $F \in X^{(2m+1)}$ و $\Phi \in X^{(2m+1)}$، $F\Phi, \Phi F \in A^{(2m+1)}$ برای $\xi \in A^{(2m)}$ بصورت زیر تعریف می شوند

$$\langle \xi, F\Phi \rangle = \langle F, \Phi.\xi \rangle \ ,$$

$$\langle \xi, \Phi F \rangle = \langle F.\xi, \Phi \rangle \ .$$

برای هر جبر باناخ $Y$ و هر $y \in Y$، $\widehat{y}$ نشان دهنده تصویر متعارف $y$ در $Y^{**}$ است.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ و $X$ یک $A-$مدول باناخ باشد. در اینصورت

الف) تابع خطی $D : A \longrightarrow X$ را یک مشتق گوییم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b)$$

خانواده همه مشتق‌های کراندار از $A$ به $X$ را با $Z^1(A, X)$ نمایش می‌دهیم.

ب) مشتق $D : A \longrightarrow X$ را داخلی گوییم هرگاه عنصر $x \in X$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$D(a) = a.x - x.a \ .$$

خانواده همه مشتق‌های داخلی از $A$ به $X$ را با $B^1(A, X)$ نمایش می‌دهیم که زیرفضای خطی از $Z^1(A, X)$ می‌باشد.

ج) فضای خارج قسمتی $H^1(A, X) = \dfrac{Z^1(A, X)}{B^1(A, X)}$ را اولین گروه کوهمولوژی[1] $A$ با ضرایب در $X$ گویند.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای نرم دار باشند. فضای همه توابع خطی و کراندار از $X$ به $Y$ را با $L(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. $L(X, Y)$ یک فضای برداری است و نگاشت $\|T\| \longrightarrow T$ یک نرم موسوم به نرم عملگر روی $L(X, Y)$ است که در آن $\|T\|$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| = 1\} \ .$$

[1] Cohomology

فرض کنید $f \in L(X,Y)$. در اینصورت اگر $g \in Y^*$ آنگاه به ساده‌گی دیده می‌شود که $gof : X \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی و کراندار روی $X$ است. نگاشت $f^* : Y^* \longrightarrow X^*$ با ضابطه $f^*(g) : gof$ را نگاشت الحاقی $f$ می‌گویند.

**قضیه ۱.۱.۱.** فرض کنید $f \in L(X,Y)$. در اینصورت داریم:

۱. برای هر $g \in L(X,Y)$ و $t \in \mathbb{C}$ داریم $(tf+g)^* = tf^* + g^*$

۲. $f^{**}|_X = f$

۳. $\|f^*\| = \|f\|$

۴. برای هر فضای باناخ $Z$ و هر $h \in L(Y,Z)$ داریم $(hof)^* = f^*oh^*$

*اثبات.* به قضیه ۴.۱.۴ از [۶] رجوع شود. □

**تعریف ۱۳.۱.۱.** فرض کنید $T \in L(X,Y)$ در اینصورت:

۱. $T$ ایزومورفیسم نامیده می‌شود هرگاه $T$ دوسویی و $T^{-۱}$ کراندار باشد. بعبارتی دیگر به ازای ثابتی چون $C > 0$ داشته باشیم

$$\| Tx \| \geq C \| x \| .$$

۲. $T$ ایزومتری است هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\| Tx \| = \| x \| .$$

**تعریف ۱۴.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای خطی نرم دار باشد. در اینصورت

۱. منظور از توپولوژی ضعیف روی $X$، کوچکترین توپولوژی روی $X$ است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی را با $w$ نشان می‌دهیم.

۲. نگاشت $\Phi : X \longrightarrow X^{**}$ را برای $x \in X$ با ضابطه $\Phi(x) = \widehat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن برای هر $f \in X^*$ داریم $\widehat{x}(f) = f(x)$ ; $\widehat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$. توپولوژی ضعیف * روی $X^*$ کوچکترین توپولوژی روی $X^*$ است که خانواده $\Phi(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $w^*$ نمایش می‌دهیم.

۳. برای $x, y \in X$، تابع $\rho(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی $X$ تعریف می‌کند، زیرا

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| ,$$

$$\|x-y\| = \|(-۱)y-x\| = \|y-x\|.$$

توپولوژی تعریف شده توسط این متر، توپولوژی نرمی روی $X$ نامیده می‌شود.

۴. فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای باناخ باشند. آن توپولوژی روی $L(X,Y)$ که به وسیله نگاشتهای ($x \in X$) $T \longrightarrow Tx$ تولید می‌شود، توپولوژی عملگری قوی روی $L(X,Y)$ نامیده می‌شود.

**قضیه ۲.۱.۱.** (**هان-باناخ**[۱]) فرض کنید $X$ یک فضای برداری نرم دار و $Y$ یک زیر فضای خطی بسته $X$ باشد و $g \in X^*$ در اینصورت $f \in X^*$ وجود دارد که $g = f|_Y$ و $\|g\| = \|f\|$.

*اثبات.* به قضیه ۱۶.۵ از [۴۰] رجوع شود. □

**نتیجه ۱.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای برداری نرم دار باشد. در اینصورت:

۱. برای $x_0 \in X \setminus \{0\}$، تابعک $f \in X^*$ موجود است که $f(x_0) = \|x_0\|$ و $\|f\| = ۱$.

۲. اگر $Y$ یک زیر فضای بسته سره از $X$ باشد و $x_0 \in X \setminus Y$، آنگاه $f \in X^*$ موجود است که $f(x_0) \neq 0$ و $f|_Y = 0$.

۳. اگر $x \in X$، $\widehat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ را با $\widehat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم . در اینصورت $x \longrightarrow \widehat{x}$ یک ایزومتری خطی از $X$ به $X^{**}$ است.

۴. اگر $F \in X^{**}$ و $f \in X^*$، آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عضوی چون $x \in X$ وجود دارد بطوریکه

$$F(f) = f(x) \quad , \quad \|x\| \leq (۱ + \epsilon)\|F\|$$

*اثبات.* مرجع [۳۹]. □

گوی یکه بسته فضای نرم دار $X$ را با $B_X$ نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۳.۱.۱.** (**باناخ-آلاغلو**[۲]) فرض کنید $X$ یک فضای برداری نرم دار باشد. در اینصورت گوی واحد بسته $B_{X^*} = \{f \in X^* \ : \ \|f\| \leq ۱\}$ در $X^*$ فشرده ضعیف $*$ است.

*اثبات.* به قضیه ۳.۱۵ از [۵] رجوع شود. □

**لم ۱.۱.۱.** (**گلدشتاین**[۳]) فرض کنید $X$ یک فضای برداری نرم دار باشد. در اینصورت $B_X$ در $B_{X^{**}}$ ضعیف $*$ چگال است.

*اثبات.* به قضیه ۱۶.۲ از [۵] رجوع شود. □

---

[۱] Hahn-Banach
[۲] Banach-Alaoglu
[۳] Goldstine

**تعریف ۱۵.۱.۱.** مجموعه $D$ را جهت دار گوییم هرگاه رابطه روی $\geqslant$ موجود باشد به طوری که $(D,\geqslant)$ دارای خاصیت‌های زیر باشد.

۱. برای هر $\alpha,\beta,\gamma\in D$، اگر $\alpha\geqslant\beta$ و $\beta\geqslant\gamma$، آنگاه $\alpha\geqslant\gamma$.

۲. برای هر $\alpha,\beta\in D$، $\gamma\in D$ موجود باشد که $\gamma\geqslant\alpha$، و $\gamma\geqslant\beta$.

**تعریف ۱۶.۱.۱.** یک تور در مجموعه $X$ تابعی مانند $f:D\longrightarrow X$ که در آن $D$ یک مجموعه جهت دار است. با فرض $x_\alpha=f(\alpha)$ برای هر $\alpha\in D$، تور $f:D\longrightarrow X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یا به طور ساده با $(x_\alpha)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $D$ و $E$ دو مجموعه جهت دار باشند. تور $(x_\beta)_{\beta\in E}$ یک زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ است اگر تابعی مانند $g:E\longrightarrow D$ موجود باشد بطوریکه

۱. برای هر $\alpha,\beta,\gamma\in D$، اگر $\alpha\geqslant\beta$ و $\beta\geqslant\gamma$، آنگاه $\alpha\geqslant\gamma$.

۲. برای هر $\beta\in E$، داشته باشیم $y_\beta=x_{g(\beta)}$. برای هر $\alpha\in D$، $\beta\in E$ موجود باشد که برای هر $\gamma\in E$، با شرط $\gamma\geqslant\beta$، داشته باشیم $g(\gamma)\geqslant\alpha$.

تور $(x_\alpha)$ در $X$ به $x_0$ همگراست هرگاه به ازای هر همسایگی $U$ از $x_0$ در $X$ عنصر $\alpha_0\in D$ موجود باشد که برای هر $\alpha\geqslant\alpha_0$، $x_\alpha\in U$. و می‌نویسیم $x_\alpha\longrightarrow x_0$.

فرض کنید $X$ یک فضای خطی و $A\subseteq X$ باشد در اینصورت:

۱. $x\in\overline{A}$ اگر و تنها اگر یک تور $x_\alpha$ در $A$ موجود باشد که $x_\alpha\longrightarrow x$.

۲. $A$ فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در $A$، دارای یک زیرتور همگرا باشد.

فرض کنید $X$ یک فضای نرم دار باشد. در اینصورت

۱. تور $x_\alpha$ در $X$ به $x\in X$ همگرای ضعیف است اگر وتنها اگر برای هر $f\in X^*$، $f(x_\alpha)\longrightarrow f(x)$.

۲. تور $(f_\alpha)$ در $X^*$ به $f\in X^*$ همگرای ضعیف $*$ است اگر وتنها اگر برای هر $x\in X$،

$$f_\alpha(x)\longrightarrow f(x).$$

فرض کنید $\Phi\in X^{**}$. در اینصورت طبق لم گلدشتاین تور کراندار $(x_\alpha)\subseteq X$ چنان موجود است که

$$\Phi=w^*-\lim_\alpha x_\alpha.$$

وبرای هر $a \in A$ داریم

$$a.\Phi = w^* - \lim_{\alpha} a.x_\alpha \ ,$$

$$\Phi.a = w^* - \lim_{\alpha} x_\alpha.a \ .$$

با استفاده از استقرا می‌توان $n-$ امین مدول دوگان $X$ را تعریف کرد و بصورت $X^{(n)}$ نمایش داد.

**تعریف ۱.۱.۱۷.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ و $X$ یک $A-$ مدول چپ باناخ باشد. در اینصورت تور $(e_i) \subseteq X$ را همانی تقریبی چپ $A$ گوییم اگر برای هر $a \in A$ داسته باشیم

$$ae_i \longrightarrow a.$$

و آنرا همانی تقریبی راست گوییم اگر برای هر $a \in A$ داسته باشیم

$$e_i a \longrightarrow a.$$

$(e_i)$ را همانی تقریبی گوییم هرگاه همانی تقریبی راست و چپ باشد.
اگر به ازای هر $i \in I$، $\|e_i\| \leq M$ ($M \in R^+$) آنگاه $(e_i)$ را همانی تقریبی کراندار می‌نامیم.

**تعریف ۱.۱.۱۸.** فرض کنید $G$ یک گروه همراه با توپولوژی $\mathcal{T}$ روی آن باشد و

۱. نگاشت $x^{-1} \longrightarrow x$ از $G \longrightarrow G$ پیوسته باشد.

۲. نگاشت $xy \longrightarrow (x, y)$ از $G \times G \longrightarrow G$ پیوسته باشد.

آنگاه $G$ را یک گروه توپولوژیکی می‌نامند.

**مثال ۱.۲.**

۱. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ که $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح و $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته روی آن باشد یک گروه توپولوژیک است.

۲. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ که $\mathbb{R}$ با عمل جمع به عنوان گروه و $\mathcal{T}$ توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ یک گروه توپولوژیک است.

۳. $T = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = ۱\}$ همراه با توپولوژی معمولی یک گروه توپولوژیک است.

**تعریف ۱.۱.۱۹.** یک فضای برداری توپولوژیک موضعا محدب نامیده می‌شود هرگاه برای توپولوژی آن پایه‌ای وجود داشته باشد که فقط از مجموعه‌های محدب تشکیل شده باشد.
رایج‌ترین روش برای تعریف فضای برداری توپولوژیک موضعا محدب، تعریف زیر بر حسب نیم نرم‌هاست. فرض کنید $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از نیم نرمها روی فضای برداری $X$ باشد. اگر $x \in X$، $a \in A$ و $\epsilon > 0$، قرار می‌دهیم

$$U_{x\alpha\epsilon} = \{y \in X \ : \ \mathcal{P}_\alpha(y - x) < \epsilon\}$$

و فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده به وسیله مجموعه های $U_{x\alpha\epsilon}$ باشد در اینصورت.

$(X, \mathcal{T})$ را یک فضای برداری توپولوژیک موضعا محدب گوییم.
چنانچه $(x_i)_{i\in I}$ یک تور در $X$ باشد، آنگاه $x_i \longrightarrow x$ اگر وتنها اگر به ازای هر $\alpha \in A$،

$$\mathcal{P}_\alpha(x_i - x) \longrightarrow 0.$$

**تعریف ۲۰.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد. خانواده $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های $X$ را یک $\sigma-$ جبر در $X$ گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ دارای ویژگی‌های زیر باشد

۱. $X \in \mathcal{A}$.

۲. اگر $E \in \mathcal{A}$ آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$، که در آن $E^c$ متمم $E$ نسبت به $X$ است.

۳. برای هر دسته شمارش پذیر $\{E_n\}$ در $A$ داشته باشیم $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

منظور از فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ مجموعه $X$ مجهز به $\sigma-$ جبر $\mathcal{A}$ است. و اعضای $\mathcal{A}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در $X$ گوییم.

هرگاه $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد و تابع $f : X \to \mathbb{C}$ بگونه‌ای باشد که برای هر مجموعه باز $V$ در $\mathbb{C}$ داشته باشیم $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ در اینصورت $f$ را اندازه‌پذیر نامیم.

برای یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ یک اندازه مثبت، تابعی مانند $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ است به طوریکه

۱. $\mu(\emptyset) = 0$.

۲. برای عناصر دوبه‌دو مجزای $E_n$ از $\mathcal{A}$ داشته باشیم $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

در اینصورت $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یا به طور ساده $(X, \mu)$ را یک فضای اندازه می‌نامیم.
اندازه مثبت $\mu$ یک اندازه متناهی است هرگاه $\mu(X) < \infty$.

**تعریف ۲۱.۱.۱.** برای هر $1 \leqslant p < \infty$ خانواده همه توابع اندازه‌پذیر $f$ روی $X$ با شرط

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

را با $L^p(X, \mu)$ یا به طور ساده با $L^p(X)$ نمایش می‌دهیم.

$L^p(X)$ با عمل جمع و ضرب نقطه‌ای توابع و نرم فوق یک فضای باناخ است.

فضای همه توابع $f : X \to \mathbb{C}$ با نرم زیر

$$\|f\|_p = (\sum_{x\in X} |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

یک فضای باناخ است که با $l^p(X)$ نمایش می‌دهیم که در آن

$$\sum_{x\in X} |f(x)|^p = \sup\{\sum_{x\in F} |f(x)|^p \quad : \quad \text{متناهی است} F, F \subseteq X\}$$

.

**تعریف ۲۲.۱.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. کوچکترین $\sigma-$ جبر شامل تمام مجموعه‌های بسته $X$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم و آنرا $\sigma-$ جبر بورل[1] می‌نامیم.

اندازه مثبت $\mu$ روی $X$ را بورل می نامیم اگر روی $B(X)$ تعریف شده باشد.

اندازه مثبت بورل $\mu$ روی $X$ را منظم بیرونی روی $E \in B(X)$ گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \ : \ V \supseteq E \ , \quad \text{باز است} V\}$$

و $\mu$ را منظم درونی روی $E \in B(X)$ گوییم هرگاه داشته باشیم

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \subseteq E \ , \quad \text{فشرده است} K\}$$

$\mu$ را روی $E$ منظم گوییم هرگاه منظم درونی و منظم بیرونی باشد.

**تعریف ۲۳.۱.۱.** فرض کنید $M(X)$ مجموعه تمام اندازه‌های بورل منظم روی $X$ باشد. در اینصورت $M(X)$ با جمع برداری و ضرب اسکالر و نرم

$$\|\mu\| = |\mu|(X) \qquad (\ \mu \in M(X)\ ).$$

یک فضای باناخ است.

**تعریف ۲۴.۱.۱.** اندازه مثبت $\mu$ روی $X$ را رادن[2] می‌نامیم هرگاه روی مجموعه‌های فشرده مقدار متناهی، روی مجموعه‌های بورل، منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز منظم درونی باشد.

[1] Borel
[2] Radon

**تعریف ۲۵.۱.۱.** اندازه رادن غیر صفر $\mu$ روی گروه توپولوژیک $G$ را هار چپ(راست) گوییم هرگاه به ازای هر $x \in G$ و هر مجموعه بورل $E \subseteq G$ داشته باشیم

$$\mu(xE) = \mu(E) \qquad (\mu(Ex) = \mu(E))$$

و آنرا اندازه هار[۳] گوییم هرگاه هار چپ و راست باشد.
برای مثال اندازه هار روی $(\mathbb{R}, +)$ همان اندازه لبگ است که برای هر بورل $E$ داریم

$$m(E + x) = m(E).$$

**تعریف ۲۶.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ بدون عضو همانی باشد. مجموعه $A \oplus \mathbb{C}$ ( $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط می‌باشد که با نرم اقلیدسی یک جبر باناخ تشکیل می‌دهد و تنها عنصر همانی $۱ \in \mathbb{C}$ تابعک خطی ضربی روی $\mathbb{C}$ می‌باشد) متشکل از زوج مرتب $(a, \lambda)$ که $a \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ با ضرب زیر یک جبر باناخ با همانی $(0, ۱)$ است و به آن یکدار شده $A$ گویند و با نماد $A^\sharp$ نمایش می‌دهند.

$$(a_۱, \lambda_۱)(a_۲, \lambda_۲) = (a_۱ a_۲ + \lambda_۱ a_۲ + \lambda_۲ a_۱, \lambda_۱ \lambda_۲)$$

**تعریف ۲۷.۱.۱.** تابع $\varphi$ از جبر $A$ به جبر $B$ را یک همومورفیسم گوییم اگر برای هر $a, b$ از $A$ داشته باشیم:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

هر همومورفیسم $\varphi : A \longrightarrow A$ یک اندومورفیسم از $A$ نامیده می‌شود.
همومورفیسم یک به یک $\varphi : A \longrightarrow B$ یک مونومورفیسم و همومورفیسم پوشا $\varphi : A \longrightarrow B$ یک اپی‌مورفیسم نامیده می‌شود.
همومورفیسم $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک مشخصه روی $A$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۲۸.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر و $E, F$، $A-$مدولهای چپ[راست] باشند، نگاشت $T \in L(E, F)$ یک همومورفیسم $A-$ مدولی چپ [راست] است هرگاه

$$T(a.x) = a.T(x) \quad [T(x.a) = T(x).a] \qquad (a \in A \ \ , x \in E).$$

**تعریف ۲۹.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر و $E$ یک فضای خطی باشد. یک نمایش از $A$ روی $E$ یک همومورفیسم $\rho : A \longrightarrow L(E)$ می‌باشد. فرض کنید $E$ یک $A-$ مدول چپ باشد و قرار می‌دهیم

$$\rho(a)(x) = a.x \qquad (a \in A \ \ , x \in E).$$

آنگاه $\rho$ یک نمایش از $A$ روی $E$ است.

[۳] Har

**تعریف ۳۰.۱.۱.** نمایش منظم راست[چپ] $R[L]$ از گروه موضعا فشرده $G$ روی $L^۲(G)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$R(g)f(h) = R_g f(h) = f(hg) \ \ [L(g)f(h) = L_g f(h) = f(g^{-۱}h)] \quad (g, h \in G \ , f \in L^۲(G)).$$

**تعریف ۳۱.۱.۱.** فرض کنید $V$ و $W$ دو فضای نرمدار باشند. نگاشت $f : V \longrightarrow W$ آفین است هرگاه

$$f(\alpha x + (۱-\alpha)x) = \alpha f(x) + (۱-\alpha) f(x).$$

در این پایان‌نامه مجموعه همه هومومورفیسم‌های از $A$ به $\mathbb{C}$ را با $\triangle(A)$ نشان می‌دهند.

قبل از شروع فصل اول، لازم است بعضی از تعاریف و قضایای میانگین‌پذیری را بیان کنیم. فرض کنید $A$ یک جبر باناخ باشد. $A$ میانگین‌پذیر است هرگاه برای هر $A-$ مدول باناخ $X$ داشته باشیم

$$H^۱(A, X^*) = \{0\}.$$

یا بعبارتی هر مشتق کراندار $D : A \longrightarrow X^*$ داخلی باشد.

**تعریف ۳۲.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ باشد. آنگاه حاصلضرب تانسوری تصویری $A\hat{\otimes}A$ با اعمال زیر

$$a.(b \otimes c) = ab \otimes c \quad , (b \otimes c).a = b \otimes ca \quad (a, b, c \in A).$$

یک $A$ دومدول باناخ است

$\pi$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\pi_A : A\hat{\otimes}A \longrightarrow A \quad , \quad a \otimes b \longrightarrow ab \ \ (a, b \in A).$$

**تعریف ۳۳.۱.۱.** الف) یک قطر تقریبی کراندار برای $A$ یک تور کراندار مانند $(m_\alpha)$ در $A\hat{\otimes}A$ است بطوریکه

$$a.m_\alpha - m_\alpha.a \longrightarrow 0 \quad , \quad a\pi_A(m_\alpha) \longrightarrow a \quad (a \in A).$$

ب) یک قطر واقعی برای $A$ یک عضو مانند $M$ در $(A\hat{\otimes}A)^{**}$ است بطوریکه

$$a.M = M.a \quad , \quad a\pi_A^{**}(M) = a \quad (a \in A).$$

**قضیه ۴.۱.۱.** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ باشد. آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

۱. $A$، میانگین‌پذیر است.

۲. $A$ یک قطر تقریبی کراندار دارد.

۳. $A$ یک قطر واقعی دارد.