بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

تابعگون‌های Ext و Tor در مدول‌های آرتینی و ماتلیس انعکاسی

استاد راهنما:
دکتر احد رحیمی

نگارش:
زینب قاسمی

بهمن ۹۲

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
زینب قاسمی

تحت عنوان :

تابعگون‌های Ext و Tor در مدول‌های آرتینی و ماتلیس انعکاسی

در تاریخ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر احد رحیمی	با مرتبه‌ی علمی	امضاء:
استاد داور داخل گروه	دکتر بهروز عدالت‌زاده	با مرتبه‌ی علمی	امضاء:
استاد داور خارج گروه	دکتر کیوان برنا	با مرتبه‌ی علمی	امضاء:

سپاس‌گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر احد رحیمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های دلسوزانه ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از راهنمایی‌های سرکار خانم لیلا عمر ملی صمیمانه تشکر می‌کنم.

زینب قاسمی

بهمن ۱۳۹۲

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی نوتری موضعی و L و L'، R-مدول باشند. هدف ما در این پایان‌نامه تحقیق در مورد ویژگی‌های تابعگون‌های $\operatorname{Ext}_R^i(L,-)$ و $\operatorname{Tor}_i^R(L,-)$ است. به عنوان مثال نتایج زیر را نشان می‌دهیم:

۱. اگر L و L' آرتینی باشند، $\operatorname{Tor}_i^R(L,L')$ آرتینی و $\operatorname{Ext}_R^i(L,L')$ روی $\widehat{R}$ نوتری است.

۲. اگر L آرتینی و L' ماتلیس انعکاسی باشد، $\operatorname{Ext}_R^i(L,L')$، $\operatorname{Ext}_R^i(L',L)$ و $\operatorname{Tor}_i^R(L,L')$ ماتلیس انعکاسی هستند.

کلمات کلیدی:

مدول آرتینی، مدول نوتری، تابعگون‌های Ext و Tor، ماتلیس دوگان، مدول ماتلیس انعکاسی، مدول مینی- ماکس و کامل سازی

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

پیشگفتار

تابعگون‌های Ext و Tor نقش بسیار مهمی را در جبر همولوژی ایفا می‌کنند که جوزف روتمن[۱] در سال ۱۹۷۹ در کتاب مقدمه‌ای بر جبر همولوژی این دو تابعگون را به طور کامل معرفی می‌کند. وی در این کتاب تابعگون‌های Ext و Tor را پایه‌ای برای یادگیری جبر همولوژی می‌داند. روتمن قضیه‌هایی با عنوان اصل موضوع Ext و اصل موضوع Tor را مطرح و اثبات نموده است.

فیس[۲] در [۱۱] نشان می‌دهد که اگر A و A'، R - مدولهایی آرتینی باشند آنگاه $A\otimes_R A'$ با طول متناهی است. این مطلب از این نکته که اگر N یک R - مدول نوتری باشد، آنگاه $\mathrm{Hom}_R(A,N)$ طول متناهی دارد نتیجه می‌شود. حال این سوال مطرح است که آیا قضیه‌ی فوق برای تابعگون‌های Ext و Tor نیز برقرار است؟ پاسخ دادن به این سوال نیازمند مطالعات و بررسی های بیشتری درباره‌ی تابعگون‌های Ext و Tor می‌باشد.

فصل اول این پایان‌نامه، شامل مطالبی از کامل سازی، ماتلیس دوگان، جبر جابجایی و همولوژی است که در فصول بعد از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم مدول‌های تابدار، مدول‌های مینی ماکس و مدول‌های ماتلیس انعکاسی را معرفی می‌کنیم که نقشی مهمی در اثبات قضیه‌های اصلی این پایان‌نامه دارد. در فصل های سوم و چهارم به بررسی خواص تابعگون‌های Ext و Tor می‌پردازیم. در این دو فصل قضایای مهم زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید A یک R - مدول آرتینی و $i\geq 0$ باشد. همچنین فرض کنید L و L'، دو R - مدول باشند. i - امین عدد باس را با $\mu_R^i(L)$ و i - امین عدد بتی را با $\beta_i^R(L')$ نمایش می‌دهیم. اگر $\mu_R^i(L)$ و $\beta_i^R(L')$ متناهی باشند، آنگاه $\mathrm{Ext}_R^i(A,L)$ یک $\widehat{R}$ - مدول نوتری و $\mathrm{Tor}_i^R(A,L')$ یک R - مدول آرتینی است.

قضیه ۲. فرض کنید A یک R - مدول آرتینی و L و L'، R - مدول باشند به‌طوریکه $R/(\mathrm{Ann}_R(A)+\mathrm{Ann}_R(L))$ و $R/(\mathrm{Ann}_R(A)+\mathrm{Ann}_R(L'))$ کامل باشند. همچنین فرض کنید $i\geq 0$ به‌طوریکه $\mu_R^i(L)$ و $\beta_i^R(L')$ متناهی هستند، در این صورت $\mathrm{Ext}_R^i(A,L)$ و $\mathrm{Tor}_i^R(A,L')$ ماتلیس انعکاسی می‌باشند.

در فصل پنجم دوگان ماتلیس تابعگون $\mathrm{Ext}_R^i(L,L')$ را به‌دست می‌آوریم. این فصل شامل قضایای مهم زیر است.

قضیه ۳. فرض کنید A و A'، R - مدول‌هایی آرتینی و $i\geq 0$ باشد، در این صورت

$$\mathrm{Ext}_R^i(A,A')\cong \mathrm{Ext}_{\widehat{R}}^i(A'^{\vee},A^{\vee}).$$

بنابراین $\widehat{R}$ - مدول‌های نوتری N و N' موجودند به‌طوریکه $\mathrm{Ext}_R^i(A,A')\cong\mathrm{Ext}_{\widehat{R}}^i(N,N')$.

[۱] Rotman [۲] Faith

قضیه۴. فرض کنید $i \geq 0$ و M و M'، R - مدول‌هایی مینی- ماکس باشند. اگر M یا M' ماتلیس انعکاسی باشند، در این صورت $\mathrm{Ext}_R^i(M, M')^\vee \cong \mathrm{Tor}_i^R(M, M'^\vee)$.

در فصل ششم مجموعه‌های ایده‌ال‌های اول وابسته‌ی $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ و نیز ایده‌ال‌های اول الحاقی $A \otimes_R M$ را شرح می‌دهیم. این فصل همچنین شامل نتایجی در راستای موضوع صفر شدن $\mathrm{Ext}_R^i(A, M)$ و $\mathrm{Tor}_i^R(A, M)$ است.

فصل هفتم شامل مثال‌هایی برای درک بهتر مفاهیم فصول پیشین است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$V(I)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول شامل I
$\mathrm{Supp}_R(M)$	تکیه‌گاه R-مدول M
$\widehat{R^I}$	کامل سازی I-ادیک حلقه‌ی R
$\widehat{R}$	کامل سازی $\mathfrak{m}$-ادیک حلقه‌ی R
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول حلقه R
$\mathrm{Ass}_R(M)$	ایده‌ال‌های اول وابسته R-مدول M
$\mathrm{Att}_R(M)$	ایده‌ال‌های اول ضمیمه‌ی R-مدول M
$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز R-مدول M
$\dim R$	بعد حلقه R
$\mathrm{ht}(-)$	ارتفاع
$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های ماکسیمال حلقه R
$l_R(M)$	طول R-مدول M
$E_R(M)$	پوشش انژکتیو R-مدول M
$M^\vee$	دوگان ماتلیس R-مدول M
$\mathrm{depth}_R(I, M)$	طول R-مدول M نسبت به ایده‌ال I
$\mathrm{width}_R(I, M)$	عرض R-مدول M نسبت به ایده‌ال I
$S = K[x_۱, \ldots, x_n]$	حلقه چندجمله‌ای روی میدان K

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی از جبر جابجایی و همولوژی را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر پیشرفته آشنایی دارد. در سرتاسر این فصل، منظور ازحلقه‌ی R، حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

۱-۱ کامل سازی

تعریف ۱-۱-۱. مجموعه‌ی جزئاً مرتب Λ را که به ازای هر $\lambda,\mu\in\Lambda$، وجود داشته باشد $\nu\in\Lambda$ به‌طوریکه $\lambda\leq\nu$ و $\mu\leq\nu$، یک مجموعه‌ی مستقیم می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنید M یک R-مدول دلخواه و مجموعه‌ی Λ یک مجموعه‌ی مستقیم باشد. همچنین فرض کنید $F=\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ یک صافی[۱] از زیر مدول‌های M باشد، یعنی اگر $i,j\in A$ به گونه‌ای باشند که $i<j$ آنگاه $M_j\subseteq M_i$. پس به ازای هر $i<j$ همریختی طبیعی $\varphi_{ij}:M/M_j\rightarrow M/M_i$ را داریم. حال می‌توان دستگاه معکوس $\{M/M_i,\varphi_{ij}\}$ را ساخت. حد معکوس این دستگاه را کامل شده[۲] M نامیده و با نماد $\widehat{M}$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\widehat{M}=\varprojlim M/M_i.$$

از آنجایی که $\widehat{M}$ زیر مدولی از $\prod M/M_i$ است، R-همریختی طبیعی چون $\psi:M\rightarrow\widehat{M}$ وجود دارد. اگر این همریختی، یکریختی باشد آنگاه M را کامل[۳] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۳. اگر I ایده‌الی از R باشد آنگاه $\{I^iM\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک صافی از زیر مدول های M است. کامل سازی M به کمک این صافی را کامل شده I-ادیک [۴] می‌نامیم.

مثال ۱-۱-۴. فرض کنید $R=S[x_1,\dots,x_n]$ و $I=(x_1,\dots,x_n)$ که در آن S یک حلقه‌ی دلخواه است. اگر $\widehat{R}$ کامل‌شده I-ادیک R باشد، آنگاه $\widehat{R}=S[[x_1,\dots,X_n]]$.

قضیه ۱-۱-۵. *فرض کنید I ایده‌الی از حلقه‌ی R، M یک R-مدول و $\widehat{M}$ کامل‌شده I-ادیک M باشد. در این صورت $\widehat{M}\cong\widehat{\widehat{M}}$. بنابراین $\widehat{M}$ کامل است.*

برهان. رجوع شود به تمرین ۹ از فصل ۴ در [۲]. $\square$

قضیه ۱-۱-۶. *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌الی از R و M، R-مدولی متناهی مولد باشد. اگر $\widehat{M}$ و $\widehat{R}$ بترتیب کامل شده I-ادیک M و R باشند، در این صورت*

[۱] Filtration [۲] Completion [۳] Complete [۴] I-adic completion

۱. *اگر* $\circ \to M' \to M \to M'' \to \circ$ *یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از* R*-مدول‌هایی با تولید متناهی باشد، در این صورت دنباله‌ی*

$$\circ \to \widehat{M'} \to \widehat{M} \to \widehat{M''} \to \circ$$

نیز دقیق است. از این‌رو می‌توان یکریختی زیر را نتیجه گرفت.

$$(\widehat{M/M'}) \cong \widehat{M}/\widehat{M'}.$$

۲. $\widehat{I^nM}$ *یک* $\widehat{R}$*-زیرمدول* $\widehat{M}$ *است و*

$$\widehat{M}/\widehat{I^nM} \cong M/I^nM.$$

۳. $\widehat{R}\otimes_R M \cong \widehat{M}$.

۴. $I\widehat{R} \cong I\otimes_R \widehat{R} \cong \widehat{I}$.

برهان. رجوع شود به قضیه‌های ۲.۵.۱۱، ۲.۵.۱۴، ۲.۵.۱۵ و نتیجه ۲.۵.۱۳ در [۱۰]. □

نکته ۱-۱-۷. *فرض کنید* $\widehat{R}$ *کامل‌شده* I*-ادیک* R *باشد. اگر در قسمت دوم قضیه‌ی ۱-۱-۶ قرار دهیم* $M = R$*، خواهیم داشت*

$$\widehat{R}/\widehat{I^nR} = \widehat{R}/I^n\widehat{R} \cong R/I^n.$$

تعریف ۱-۱-۸. R-مدول M یکدست وفادار[1] نامیده می‌شود هرگاه M یکدست باشد و برای هر R-مدول غیر صفر N، $M\otimes_R N \neq \circ$.

تعریف ۱-۱-۹. همریختی $\varphi : R\to S$ یکدست(یکدست وفادار) نامیده می‌شود هرگاه S به عنوان R-مدول یکدست(یکدست وفادار) باشد.

قضیه ۱-۱-۱۰. *فرض کنید* R *حلقه‌ای نوتری،* I *و* J *ایده‌ال‌هایی از* R *باشند. اگر* $\widehat{R}$*، کامل شده* I*-ادیک* R *باشد، در این صورت*

۱. $\widehat{R}$ *به عنوان* R*-مدول یکدست وفادار است. بنابراین* $R\subseteq \widehat{R}$ *و* $\widehat{I}\cap R = I$.

۲. *اگر* $(R,\mathfrak{m},\Bbbk)$ *حلقه‌ی نوتری موضعی باشد،* $\widehat{R}$ *نیز حلقه‌ای نوتری و موضعی با ایده‌ال ماکسیمال* $\mathfrak{m}\widehat{R}$ *و میدان باقیمانده* $\widehat{R}/\mathfrak{m}\widehat{R} = \widehat{R/\mathfrak{m}} = \Bbbk$ *است.*

۳. *اگر* R *حلقه‌ی آرتینی موضعی باشد، آنگاه* R *کامل است.*

---
[1] Faithfully flat

۴. *اگر M ، R - مدولی با تولید متناهی باشد، آنگاه* $\widehat{(JM)} = J\widehat{M}$.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۸.۱۱، ملاحظه‌ی ۲، نکات ۳ و ۴ صفحه‌ی ۶۳ در [۱۹]. $\square$

قضیه ۱-۱-۱۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری موضعی، I, J ایده‌ال هایی از R و $\widehat{R}$ کامل شده $\mathfrak{m}$-ادیک R باشد. در این صورت*

۱. *اگر R کامل باشد، برای هر ایده‌ال $I \neq R$ ، R/I نیز حلقه‌ای کامل است.*

۲. *اگر $I \subseteq J$ و R/I کامل باشد، آنگاه R/J نیز کامل است.*

برهان. ۱. از نوتری بودن R نتیجه می‌گیریم که I با تولید متناهی است و لذا بنا به قضیه‌ی ۱-۱-۶، $\widehat{I} = I \otimes_R \widehat{R}$.

بنابراین

$$\begin{aligned}\widehat{R/I} &= \widehat{R}/\widehat{I} \\ &= \widehat{R}/(I \otimes_R \widehat{R}) \\ &= R/(I \otimes_R R) \\ &= R/I.\end{aligned}$$

۲. با توجه به اینکه $I \subseteq J$ است بنابراین نگاشت طبیعی

$$R/I \xrightarrow{\varphi} R/J \to ۰$$

را داریم. طبق قضیه‌ی اول یکریختی مدول‌ها داریم

$$(R/I)/\operatorname{Ker}\varphi \cong R/J.$$

اما با توجه به قسمت اول $(R/I)/\operatorname{Ker}\varphi$ کامل است، در نتیجه R/J نیز کامل است.

$\square$

۱-۲ مفاهیم و قضایایی از جبر جابجایی

تعریف ۱-۲-۱ (واریته[۱])**.** فرض کنید I ایده‌الی سره از حلقه‌ی R باشد، واریته‌ی I را با $V(I)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \quad I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

[۱] Variety

تعریف ۱-۲-۲ (تکیه‌گاه[1]). فرض کنید M یک R-مدول باشد، تکیه‌گاه M را که با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نمایش می‌دهیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Supp}_R(M)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R):\quad M_{\mathfrak{p}}\neq 0\}.$$

تعریف ۱-۲-۳ (ایده‌ال‌های اول وابسته[2]). فرض کنید M یک R-مدول باشد، مجموعه ایده‌ال‌های اول وابسته M را که با علامت $\mathrm{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$\mathrm{Ass}_R(M)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R):\exists x\in M,\ \ \mathfrak{p}=\mathrm{Ann}_R(x)\}.$$

نکته ۱-۲-۴. *اگر R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول باشد، در این صورت*

$$\mathrm{Ass}_R(M)=\emptyset \Longleftrightarrow M=0.$$

برهان. رجوع شود به نتیجه‌ی ۹.۳۵ در [۲۴] $\square$

لم ۱-۲-۵. *فرض کنید M یک R-مدول باشد، آنگاه*

۱. *اگر R نوتری و M با تولید متناهی باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Supp}_R(M)=V\big(\mathrm{Ann}_R(M)\big)=\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_R(M)} V(\mathfrak{p}).$$

۲. *اگر R نوتری و M با تولید متناهی باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Ass}_R\big(\mathrm{Hom}_R(M,N)\big)=\mathrm{Supp}_R(M)\cap \mathrm{Ass}_R(N).$$

برهان. رجوع شود به لم ۹.۲۰ در [۲۴] و و تمرین ۱.۲.۲۷ در [۸]. $\square$

تعریف ۱-۲-۶ (بعد حلقه). بعد حلقه‌ی R را با $\dim(R)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim(R)=\sup\{n\in \mathbb{N}_0:\quad \mathfrak{p}_0\subsetneq \mathfrak{p}_1\subsetneq \ldots\subsetneq \mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i\in \mathrm{Spec}(R)\ ;\ i=0,\ldots,n\}.$$

تعریف ۱-۲-۷ (بُعد کرول مدول[3]). فرض کنید M یک R-مدول باشد. بُعد کرول M را با $\dim_R(M)$ نشان داده و عبارت است از،

$$\dim_R(M)=\sup\{n\in \mathbb{N}_0:\ \mathfrak{p}_o\subsetneq \mathfrak{p}_1\subsetneq \cdots\subsetneq \mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i\in \mathrm{Supp}(M)\}.$$

تعریف ۱-۲-۸. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از حلقه R باشد، در این صورت ارتفاع (یا همبعد) $\mathfrak{p}$ را با $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ (یا $\mathrm{codim}(\mathfrak{p})$) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=\sup\{n\in \mathbb{N}_0:\quad \mathfrak{p}_0\subsetneq \mathfrak{p}_1\subsetneq \ldots\subsetneq \mathfrak{p}_n=\mathfrak{p},\mathfrak{p}_i\in \mathrm{Spec}(R)\ \ ,\ 0\leq i\leq n\}$$

[1] Support [2] Associated prime ideals [3] Krull dimension of module

و برای یک ایده‌ال دلخواه I از حلقه R تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{ht}(I) = \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) :\ \mathfrak{p} \in V(I)\}$$

و همچنین برای R-مدول M تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{ht}(M) = \operatorname{ht}\big(\operatorname{Ann}(M)\big).$$

تعریف ۱-۲-۹ (طول مدول[1]). فرض کنید M یک R-مدول باشد. زنجیر

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \cdots \subsetneq M_n = M$$

از زیرمدول‌های M را که از صفر شروع می‌شود و به M ختم می‌شود، زنجیر سره از زیرمدول‌های M می‌نامیم و n را طول زنجیر تعریف می‌کنیم. اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، R-مدول‌های خارج‌قسمتی M_i/M_{i-1} ساده باشند، زنجیر را سری ترکیبی‌ای برای M می‌نامیم. می‌توان نشان داد که همه‌ی سری‌های ترکیبی برای M طول مساوی دارند. می‌گوییم M با طول متناهی است اگر M سری ترکیبی‌ای داشته باشد. در این صورت، طول این سری ترکیبی برای M را طول مدول M می‌نامیم و با نماد $l_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱-۲-۱۰. *فرض کنید M، R-مدول باشد. در این صورت M با طول متناهی است اگر و فقط اگر هم نوتری باشد و هم آرتینی.*

برهان. رجوع شود به گزاره‌ی ۷.۳۶ در [۲۴].

گزاره ۱-۲-۱۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و نوتری و I یک ایده‌ال سره از R باشد، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند.*

۱. $\dim(R/I) = 0$؛

۲. $l(R/I) < \infty$؛

۳. $\operatorname{Ass}(R/I) = \operatorname{Supp}(R/I) = V(I) = \mathfrak{m}$؛

۴. *I ایده‌الی $\mathfrak{m}$-اولیه است؛*

۵. *عددی چون $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\mathfrak{m}^t \subseteq I$ و*

۶. $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$.

[1] Length of module

برهان. رجوع شود به تمرین ۱۷ از فصل ۱۵ در [۲۴]. □

قضیه ۱-۲-۱۲. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری و موضعی باشد. در این صورت R-مدول M با طول متناهی است، اگر و تنها اگر M با تولید متناهی باشد و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوریکه $\mathfrak{m}^n M = 0$.*

برهان. رجوع شود به تمرین ۷.۴۵ در [۲۴]. □

قضیه ۱-۲-۱۳. *فرض کنید $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ ایده‌ال‌های ماکسیمالی از حلقه‌ی R باشند. اگر M، R-مدولی باشد با این ویژگی که $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n M = 0$، آنگاه M نوتری است اگر و تنها اگر آرتینی باشد.*

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۷.۳۰ در [۲۴]. □

تعریف ۱-۲-۱۴ (رشته منظم[1]). فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌آلی از آن و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. دنباله $x_1, \dots, x_n$ از عناصر I یک M-رشته منظم در I نامیده می‌شود هرگاه

۱. $M \neq (x_1, \dots, x_n)M$.

۲. به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $x_i \notin \mathrm{Z}\left(M/(x_1, \dots, x_{i-1})M\right)$.

همچنین یک M-رشته منظم مانند $x_1, \dots, x_n$ در I ماکسیمال نامیده می‌شود هرگاه نتوان عنصری چون $x_{n+1} \in I$ پیدا کرد که $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ یک M-رشته منظم باشد.

قضیه ۱-۲-۱۵ (نورسکات-ریس[2]). *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد ناصفر باشد و I ایده‌آلی از R باشد که $IM \neq M$، در این صورت طول هر دو M-رشته ماکسیمال در I، یکسان است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۵ در بخش ۲ از فصل ۱ در [۸]. □

تعریف ۱-۲-۱۶. با مفروضات قضیه فوق، طول یکسان M-رشته‌های ماکسیمال در I را عمق M نسبت به I می‌نامیم و آن را با نماد $\operatorname{depth}_R(I, M)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد، $\operatorname{depth}_R(\mathfrak{m}, M)$ را با $\operatorname{depth}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۲-۱۷. *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و موضعی، I ایده‌آلی از R و $\widehat{R}$، کامل‌سازی I-ادیک R باشد. در این صورت $\operatorname{depth}_R R = \operatorname{depth}_R \widehat{R}$.*

---

[1] Regular sequence [2] Northcott-Rees

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۱۷.۵ در [۱۹]. $\square$

گزاره ۱-۲-۱۸. *اگر $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی نوتری موضعی و M یک R-مدول باشد، در این صورت* $\operatorname{depth}_R(M)=0$ *اگر و تنها اگر* $\mathfrak{m}\in\operatorname{Ass}(M)$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۹.۱.۴ در [۸]. $\square$

تعریف ۱-۲-۱۹ (مدول کوهن-مکالی[۱]). فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی و M، R-مدولی متناهی مولد باشد. گوئیم R-مدول M کوهن-مکالی است هرگاه $\operatorname{depth}_R(M)=\dim(M)$. همچنین حلقه‌ی R را کوهن-مکالی گوییم هرگاه به عنوان R-مدول کوهن-مکالی باشد. هر گاه $\operatorname{depth}_R(M)=\dim(R)$، آنگاه M را مدول کوهن-مکالی ماکسیمال می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۲۰. حلقه‌ی نوتری و موضعی R را گرنشتاین[۲] نامیم هرگاه $\operatorname{id}_R(R)$ متناهی باشد. منظور از $\operatorname{id}_R(R)$، بعد انژکتیو حلقه‌ی R است.

گزاره ۱-۲-۲۱. *هر حلقه‌ی گرنشتاین یک حلقه‌ی کوهن-مکالی است.*

برهان. رجوع شود به گزاره‌ی ۳.۱.۲۰ در [۸]. $\square$

تعریف ۱-۲-۲۲ (حلقه‌ی مدرج[۳]). فرض کنید R یک حلقه باشد و $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های جمعی R باشد. R را یک حلقه‌ی مدرج گوئیم، هرگاه

۱. $R=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}R_i$

۲. برای هر $i,j\in\mathbb{Z}$ داشته باشیم $R_iR_j\subseteq R_{i+j}$.

مثال ۱-۲-۲۳. فرض کنید $S=K[x_1,\dots,x_n]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان K باشد.قرار می‌دهیم

$$S_i=\Big\{\sum_{a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n} r_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\ :\ r_a\in K,\ a_1+a_2+\ldots+a_n=i\Big\}$$

می‌توان نشان داد $S=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}_0}S_i$ و $S_iS_j\subseteq S_{i+j}$ که در این صورت گوئیم S مدرج استاندارد است. اعضای S_1 را فرم خطی[۴] نامیم و به وضوح $S_0=K$.

---

[۱] Cohen-Macaulay [۲] Gorenstein [۳] Graded ring [۴] Linear form

۱-۳ دوگان ماتلیس

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید N، R-مدول باشد و M توسیعی از آن. می‌گوییم M توسیع اساسی N است اگر به ازای هر زیرمدول غیر صفر مثل U از M، $N \cap U \neq 0$.

گزاره ۱-۳-۲. *R-مدول E انژکتیو است اگر و تنها اگر E توسیع اساسی سره نداشته باشد.*

برهان. رجوع شود به گزاره‌ی ۳.۲.۳ در [۸]. □

تعریف ۱-۳-۳. R-مدول M را بخش‌پذیر [۱] نامیم هرگاه برای هر $r \in R$ که مقسوم‌علیه صفر نباشد و برای هر $x \in M$، $y \in M$ موجود باشد به‌طوریکه $x = ry$.

قضیه ۱-۳-۴. *هر R-مدول انژکتیو، مدولی بخش‌پذیر است.*

برهان. رجوع شود به قسمت اول نتیجه‌ی ۳.۱.۵ در [۸]. □

تعریف ۱-۳-۵ (پوشش انژکتیو[۲]). فرض کنید M یک R-مدول باشد. R-مدول انژکتیو E را که E یک توسیع اساسی M است پوشش انژکتیو M می‌نامیم و با نماد $E_R(M)$ نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که هر R-مدول مثل M پوشش انژکتیو دارد و هر دو پوشش انژکتیو M یکریخت هستند.

تعریف ۱-۳-۶ (دوگان ماتلیس[۳]). فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی موضعی نوتری با ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و میدان باقیمانده $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ باشد. همچنین فرض کنید $E = E_R(\Bbbk)$ پوشش انژکتیو $\Bbbk$ باشد.برای R-مدول M قرار می‌دهیم:

$$M^\vee = \mathrm{Hom}_R(M, E)$$

و $M^\vee$ را دوگان ماتلیس M می‌نامیم.

قضیه ۱-۳-۷. *فرض کنید $\widehat{R}$، کامل سازی $\mathfrak{m}$-ادیک حلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت*

۱. *اگر M یک R-مدول باشد، آنگاه* $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(M^\vee)$.

۲. *نگاشت*

$$\delta_M : M \;\to\; M^{\vee\vee}$$

[۱]Divisible [۲]Injective hull [۳]Matlis dual