دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

حل عددی معادله دیفرانسیل ریکاتی با استفاده از روش اختلال هموتوپی و مقایسه آن با روش تجزیه آدومین

استاد راهنما:

دکتر علیرضا وحیدی

استاد مشاور :

دکتر محمد حسن بیژن‌زاده

نگارش:

الهام آریامند

ماه و سال

شهریور ۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

حل عددی معادله دیفرانسیل ریکاتی با استفاده از روش اختلال هموتوپی و مقایسه آن با روش تجزیه آدومین

استاد راهنما:

دکتر علیرضا وحیدی

استاد مشاور :

دکتر محمد حسن بیژن‌زاده

نگارش:

الهام آریامند

ماه و سال

شهریور ۸۹

تقدیم به:

گوهران دریای محبت

بخشندگان بی منت

پدر و مادرم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان، هستند

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

و برادرانم که تکیه گاه و قدرت بخش گامهایم بوده اند.

سپاس:

توفیق در اجرا و ارائه این پایان نامه مرهون زحمات و مساعدتهای گسترده و گوناگون بوده و شایسته است تا مراتب تقدیر، تشکر و امتنان خود را بر ایشان معروض دارم.

در اجرای این پروژه همواره رهین انسان شریف و آزاده ای هستم که چراغ راه حقیر شدند، از استاد ارجمند جناب آقای دکتر وحیدی که با قبول راهنمایی این پایان نامه و با رهنمودهای دلسوزانه و مدبرانه، روشنی بخش راهم بودند، خاضعانه سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر بیژن زاده برای مشاوره این پایان نامه، کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر بابلیان که با قبول داوری این پایان نامه افتخار بزرگی را نصیب اینجانب نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم.

در پایان از کلیه اساتید و دوستانی که به هر نحو اینجانب را در تدوین این اثر یاری نمودند، تشکر و قدردانی نموده و توفیقات روز افزون آنها را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

روش اختلال هموتوپی توسط جی هوان خی در سال ۱۹۹۹ برای حل معادلات تابعی پیشنهاد شد. روش‌های عددی متداول که برای حل این‌گونه معادلات به کار می‌روند مانند روش‌های تفاضلات متناهی، عناصر محدود، و روش‌های کلاسیک مانند روش‌های سری فوریه، انتگرال فوریه و تبدیلات لاپلاس دارای حجم محاسبات بالا و سرعت همگرایی کند و دقت کم هستند و یا دسته‌ای خاص از مسایل را حل می‌کنند. از این‌رو محققان علوم و مهندسی به دنبال ارائه روش‌های جدید برای حل معادلات تابعی می‌باشند. در این پایان‌نامه روش اختلال هموتوپی برای حل مسایلی از معادلات تابعی مانند معادلات دیفرانسیل به کار رفته است.

واژگان کلیدی: روش اختلال هموتوپی، روش تجزیه آدومین، معادله دیفرانسیل ریکاتی، الگوریتم تجزیه لاپلاس

فهرست

فهرست جداول

فهرست نمودارها

فصل اول
روش اختلال هموتوپی

۱–۱ مقدمه

اکثر پدیده‌ها در جهان واقعی به طور ذاتی غیرخطی هستند و به وسیله معادلات غیرخطی مدل‌بندی و مشخص می‌شوند. با ظهور کامپیوترهای دیجیتالی با عملکرد عالی حل یک مسأله خطی آسان و آسانتر شد، اگر چه بدست آوردن جواب‌های مسائل غیرخطی در حالت کلی، هنوز بسیار سخت و پیچیده است. به ویژه به واسطه داشتن ابرکامپیوترهایی با دقت بالا و محاسبات با ارقام زیاد و نرم‌افزارهای محاسباتی عالی نظیر *Maple* و *Matlab* و غیره تعیین تقریب جواب تحلیلی یک مسأله غیرخطی در مقابل تقریب جواب عددی آن مسأله سخت‌تر است. عموماً فنون عددی در یک دامنه محاسباتی پیچیده می‌توانند بکار گرفته شوند؛ این یک مزیت آشکار روش‌های عددی نسبت به روش‌های تحلیلی است، هنگامی که یک مسأله غیرخطی با یک دامنه ساده سروکار داشته باشد. در هر حال، فنون عددی نقاط منفصل یک منحنی

را نتیجه می‌دهند و اغلب مشخص کردن منحنی کامل نتایج بسیار پر هزینه و زمان‌بر است. گذشته از اینها، با استفاده از نتایج عددی درک اساسی و کامل یک مسأله غیرخطی سخت است وقتی یک مسأله غیرخطی شامل جواب‌های تکین باشد یا جواب‌های چندگانه داشته باشد، آنگاه دشواری‌های اضافی فنون عددی ظاهر می‌شوند. البته روش‌های عددی و تحلیلی امتیازها و محدودیت‌های خاص خود را دارند و برای ما غیرضروری هست که یکی را انجام دهیم و از دیگری غافل باشیم.

چندین روش معروف برای حل مسائل غیرخطی نظیر روش‌های اختلال و روش‌های هموتوپی وجود دارند و به طور وسیع بکار گرفته می شوند. به وسیله روش‌های اختلال خواص مهم زیادی و پدیده‌های جالبی آشکار شدند. یکی از حیرت انگیزترین موفقیت‌های روش‌های اختلال کشف سیاره نهم در منظومه شمسی می‌باشد، که در آسمان پهناور در یک مسیر پیش بینی شده صورت گرفت. به تازگی، روش‌های اختلال تکین به عنوان یکی از ده پیشرفت عالی مکانیک نظری و کاربردی در نظرگرفته شده‌اند. روش‌های اختلال نقش مهمی در توسعه علوم و مهندسی بازی می‌کنند. برای دانستن جزئیات بیشتر در مورد روش‌های اختلال، خواننده علاقمند را به کتاب‌های تألیف شده در این زمینه ارجاع می‌دهیم.

روش‌های اختلال اساساً بر پایه وجود پارامترها یا متغیرهای کوچک و بزرگ که کمیت (چندی) اختلال نامیده می‌شوند بنا گذاشته می‌شوند. به طور خلاصه، روش‌های اختلال با استفاده از کمیت‌های اختلال، یک مسأله غیرخطی را به تعداد بیشمار زیر مسأله‌های خطی تبدیل می‌کند. سپس به وسیله مجموع جواب‌های چند زیر مسأله اول، آن را تقریب می‌زنند. کمیت‌های اختلال به طور واضح بنیاد روش‌های اختلال هستند. اگر چه این کمیت‌های اختلال هستند که برای روش‌های اختلال چندین محدودیت ایجاد می‌کنند. اول اینکه هرمسأله غیرخطی، غیرممکن است که شامل چندین کمیت اختلال باشد این یک محدودیت آشکار برای روش‌های اختلال محسوب می‌شود. دوم آنکه تقریبات تحلیلی یک مسأله غیرخطی، اغلب به غیرخطی شدید تفکیک می‌شود، پس روش اختلال فقط برای مسائل غیرخطی ضعیف معتبر است.

برخلاف همه فنون قبلی روش اختلال هموتوپی یک راه ساده برای یافتن جواب‌های تحلیلی و تقریبی با دقت بالا را برای ما فراهم می‌سازد و بعلاوه این روش آزادی زیادی برای ساختن هموتوپی‌های مختلف

را بر پایه نظریه هموتوپی در توپولوژی در اختیار ما قرار می‌دهد.

۱–۲ تاریخچه

در چند دهه اخیر کارهای قابل ملاحظه‌ای در جهت توسعه بخشیدن به روش‌های جدید و مدرن برای حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال، خطی و غیرخطی صورت گرفته است. از روش‌های جدید می‌توان به روش هموتوپی[۱] و روش اختلال هموتوپی خی[۲] اشاره کرد.

از نقطه نظر تاریخی، روش اختلال[۳] یک روش بسیار قدیمی است که به عنوان یک ابزار تقریبی در مکانیک کلاسیک کوانتومی توسعه یافته است. در نظریه اختلال برای عملگرهای خطی به طور عام رفتار خواص طیفی این عملگرها وقتی که عملگر تغییر کوچکی می‌کند مورد نظر است. بنیان نظریه ریاضی در این مورد که مشتمل بر اثبات همگرایی سری اختلال است، به وسیله رلیچ[٤] در مرجع [۱] و کاتو[٥] در مراجع [۳،۲] بنا نهاده شده است. موضوع اصلی دیگر در نظریه اختلال برای عملگرهای خطی اختلالی در طیف پیوسته است که توسط فردریژ[٦] در مرجع [٤] بنیان‌گذاری شده است، که ارتباط نزدیکی با نظریه پراکندگی دارد. از مراجع استانداردی که دراین زمینه از آنها نام برده شده است می‌توان به [٥] و کتاب مقدماتی در فنون اختلال تألیف نایفه[۷] اشاره کرد.

در هر حال روش‌های اختلال که جواب را برحسب پارامترهای کوچک و بزرگ محاسبه می‌کنند حائز اهمیت هستند زیرا این روش‌ها به طور وسیعی در علوم و مهندسی بکار گرفته می‌شوند. این گونه روش‌های اختلال از نبودن پارامترهای کوچک در معادله رنج می‌برند. یعنی این روش‌ها برای مسائلی معتبر هستند که در معادله پارامتر کوچک وجود داشته باشد. البته این گونه معادلات در مسائل کاربردی زیاد نیستند.

---

۱ - Homotopy method
۲ - He’s homotopy perturbation method
۳ - Perturbation method
٤ - F. Rellich
٥ - T. Kato
٦ - K. O. Friedrichs
۷ - A. H. Nayfe

برای مرتفع کردن مشکل موجود در استفاده از روش‌های اختلال کلاسیک، دانشمندان زیادی روش‌های دیگری که به روش‌های غیراختلال[۸] معروف هستند را معرفی کردند. از جمله آنها می‌توان به لیاپانوف[۹] [۷] اشاره کرد که در سال ۱۸۹۲ روش پارامتر مصنوعی را معرفی کرد. همان طوری که از نام روش پیداست لیاپانوف یک پارامتر کوچک مصنوعی[۱۰] در معادله وابسته می‌نشاند، که معمولاً ضریب جمله غیرخطی است. آدومین[۱۱] در سال ۱۹۸۰ روش تجزیه[۱۲] را معرفی کرد [۱۰–۸] که به هیچ وجه به پارامتری بستگی ندارد. از روش‌های دیگر می‌توان به روش δ- بسط[۱۳] اشاره کرد، که توسط کارمیشن و همکارانش[۱٤] (ترجمه شده در سال ۱۹۹۰) [۱۱] مطرح شد. البته نباید فراموش کرد که لیائو[۱۵] در سال ۱۹۹۲ [۱۳،۱۲] هم روشی موسوم به روش تحلیلی هموتوپی[۱٦] را معرفی کرد که این روش عملکردی شبیه به روش‌های اختلال دارد.

از طرفی روش هموتوپی به دلیل خاصیت همگرایی سرتاسری یک ابزار سودمند برای حل مسائل غیرخطی محسوب می‌شود [۱٤]. این روش بیشتر برای حل مسائل معکوس غیرخطی[۱۷] [۱۵] و مسائل بهینه‌سازی[۱۸] [۱۸–۱٦] بکار گرفته می‌شود. بنا به آنچه ذکر شد، روش‌های اختلال و هموتوپی ابزارهای مهم و مفیدی در مواجه با مسائل غیرخطی علوم و مهندسی هستند.

در این پایان نامه ظهور یک روش قوی، کارا، قابل اطمینان و آینده‌دار را در حل مسائل غیرخطی که ترکیب جالب روش‌های اختلال کلاسیک و هموتوپی است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جی هوان خی[۱۹]، استاد مکانیک دانشگاه دونگهوای چین، در سال ۱۹۹۹ میلادی یک روش اختلال مدرن [۲۰،۱۹] به نام روش اختلال هموتوپی[۲۰] را معرفی کرد، که اولاً تمام خواص اختلال کلاسیک را دارا می‌باشد و

---

[۸] - Non-perturbation method
[۹] - A. M. Lyapunov
[۱۰] - Artificial small parameter method
[۱۱] - G. Adomian
[۱۲] - Decomposition method
[۱۳] - Expansion
[۱٤] - A. V. Karmishin et al
[۱۵] - S. J. Liao
[۱٦] - Homotopy analysis method
[۱۷] - Non linear inverse problems
[۱۸] - Opimization problems
[۱۹] - Ji – Huan He
[۲۰] - Homotopy perturbation method

ثانیاً این روش نه تنها برای پارامترهای کوچک بلکه برای پارامترهای خیلی بزرگ هم معتبر است.

این روش برخلاف روش‌های اختلال، دیگر وابسته به پارامتر کوچک که شاید از بزرگترین ضعف‌های روش‌های اختلال است، نمی‌باشد. در این روش پارامتر کوچک (پارامتر نشاندن[۲۱]) برای ساخت بسط پارامتری استفاده می‌شود که تا این مرحله مشابه با روش اختلال معمولی می‌باشد. در ادامه روش اختلال هموتوپی با بکارگیری مفهوم هموتوپی در توپولوژی اقدام به ساخت یک معادله هموتوپی ساده می‌کند. ساختن این معادله هموتوپی به نحوی است که باعث حذف پارامتر در مولفه‌های جواب و در نهایت در جواب نهایی می‌شود. این مزیت روش خی، نسبت به روش‌های اختلال کلاسیک می‌باشد.

متذکر می‌شویم که روش‌های اختلال کلاسیک بر پایه وجود یک پارامتر کوچک در معادله مربوطه استوار است. به این ترتیب روش اختلال هموتوپی هی نه تنها برای پارامترهای کوچک بلکه برای پارامترهای بسیار بزرگ هم معتبر می‌باشد. این روش دیگر وابسته به پارامتر نیست. مزیت دیگر روش اختلال هموتوپی خی می‌تواند ساختن هموتوپی‌های مختلف برای یک مسأله غیرخطی باشد، که به همگرایی جواب شتاب دهد. طبیعت روش خی به گونه‌ای است که حل یک مسأله غیرخطی مشکل را به حل بیشمار مسأله خطی ساده تبدیل می‌کند با حل این مسائل خطی ساده، مولفه‌های جواب یکی پس از دیگری با کمترین زحمت ممکن تعیین می‌شوند، که در نهایت جواب به صورت یک سری بی‌پایان در نظر گرفته می‌شود که معمولاً به جواب واقعی معادله همگراست.

او ابتدا این روش را برای حل معادلات مربوط به نوسانگرهای غیرخطی[۲۲] گسسته [۶]، معادلات غیرخطی موج[۲۳] [۵۰] یک مساله مقدار مرزی خاص [۳۰] و مسائل دیگری از این معادلات به کار برد. می‌توان گفت که روش اختلال هموتوپی یک روش شناخته شده و بسیار مشهور برای حل معادلات تابعی می‌باشد [۲۲-۱۹].

این روش به دلیل سادگی در حل و دقت بالا مورد توجه محققین بسیاری در سرتاسر جهان قرار گرفته که از میان آنها می‌توان به ازیش[۲۴] [۳۴،۳۵]، آریل[۲۵] [۳۶]، بلندز[۲۶] [۴۰-۳۷]، عباس بندی[۲۷] [۴۱،۴۲]،

[۲۱] - Embedding parameter
[۲۲] -Nonlinear oscillator
[۲۳] -Nonlinaer wave equation
[۲۴] - T. Ozis

صابری نجفی[۲۸] [۴۳-۴۶] و گنجی[۲۹] [۴۷،۴۸] و ... اشاره کرد که توانستند ایـن روش را بـا موفقیـت در معادلات غیرخطی مختلفی پیاده کنند.

در این فصل ابتدا مقدماتی را در مورد واژه هموتوپی بیـان و سـپس سـاختار روش اخـتلال هموتـوپی را برای حل معادلات تابعی بیان می‌کنیم. در ادامه به بحث در مورد همگرایی این روش خواهیم پرداخـت و با ارائه قضایایی در این مورد همگرایی روش را بررسی خواهیم کرد.

۱-۳ هموتوپی

۱-۳-۱ تعریف

یک توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق کند

۱- ϕ و X به τ متعلق است.

۲- اجتماع اعضای هر زیر گردایه τ به τ متعلق است.

۳- اشتراک اعضای هر زیر گردایه متناهی τ به τ متعلق است.

۱-۳-۲ تعریف

فرض کنید X مجموعه‌ای باشد که برای آن توپولوژی τ مشخص باشد در این صورت زوج مرتب (X,τ) را یک فضای توپولوژیک[۳۰] می‌نامند.

۱-۳-۳ تعریف

فرض کنید که X یک فضای توپولوژیک باشد تابع پیوسته $h:[a,b]\rightarrow X$ را یک مسیر (قوس) گویند. نقطه $h(a)$ را نقطه آغازی و نقطه $h(b)$ را نقطه پایانی می‌نامند. همچنین گویند که h این دو نقطه را به

[۲۵] - D. D. Ariel
[۲۶] - A. Belendez
[۲۷] - S. Abbasbandi
[۲۸] - J. Saberi - Najafi
[۲۹] - D. D. Ganji
[۳۰] -Topological space

هم وصل می‌کند.

۱-۳-۴ تعریف

فرض کنید $f,g : I = [0,1] \to X$ مسیرهایی در X باشند به گونه‌ای که $f(0) = g(0) = x_0$ و $f(1) = g(1) = x_1$. گوییم f و g هموتوپ هستند هرگاه نگاشت پیوسته‌ای چون $F : I \times I \to X$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$F(x,0) = f(x) \quad , \quad F(x,1) = g(x)$$
$$F(0,t) = x_0 \qquad , \qquad F(1,t) = x_1$$

F را یک هموتوپی (مسیر) میان f و g می‌نامند. اگر f و g هموتوپ باشند آنگاه می‌نویسیم $f \approx g$.
اکنون برای $x , t \in I$ تعریف می‌کنیم $F_t = F(x,t)$ آنگاه $F_0 = f$ و $F_1 = g$ و $F_t(0) = x_0$ و $F_t(1) = x_1$ بنابراین $t \to F_t$ یک خانواده از مسیرها بوده که f را بر روی g قرار می‌دهد. به طور معادل $\{F_t\}_{0 \le t \le 1}$ را یک هموتوپی گویند.

۱-۳-۵ تعریف

فرض کنید $f,g : X \to Y$ نگاشت‌های پیوسته‌ای باشند. گوییم f با g هموتوپیک است هرگاه نگاشت پیوسته‌ای چون $F : X \times I \to Y$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر $x \in X$، $F(x,0) = f(x)$ و $F(x,1) = g(x)$.

توضیح بیشتر اینکه برای هر $0 \le t \le 1$ نگاشت پیوسته $F_t : X \to Y$ را چنین تعریف می‌کنیم برای هر $x \in X$، $F_t(x) = F(x,t)$. اینک t را پارامتر زمان در نظر می‌گیریم آنگاه در لحظه $t = 0$ داریم $F_0 = f$ و در لحظه $t = 1$ داریم $F_1 = g$. بنابراین اگر t را از صفر تا یک تغییر دهیم آنگاه به گونه‌ای پیوسته f بر g قرار می‌گیرد.

در حالت کلی، موضوع هموتوپی در توپولوژی بیان می‌شود. این موضوع زمانی به یک ابزار قوی در محاسبات تقریباتی تبدیل می‌شود که با فنون عددی ترکیب شود. این مطلب به خوبی در مقالات

[۱۸–۱٤] آمده است که ما به طور اجمالی به بیان آن می‌پردازیم، سپس ترکیب روش هموتوپی را با روش اختلال که موضوع اصلی این پایان‌نامه می‌باشد را به طور کامل بیان می‌کنیم.

۱–۳–٦ نظریه هموتوپی

هموتوپی یک نگاشت پیوسته از بازه $[0,1]$ به یک فضای تابعی می‌باشد، که در آن مفهوم پیوستگی نسبت به توپولوژی فضای تابعی تعریف می‌شود. به طوریکه هموتوپی $\rho(\lambda)$ تابع $\rho(0)=f$ را به تابع $\rho(1)=g$ تغییر شکل می‌دهد، وقتی که پارامتر λ از صفر تا یک تغییر کند در این صورت به توابع f و g هموتوپیک گفته می‌شود. نگاشت‌های هموتوپی ابزارهای اساسی و پایه‌ای در توپولوژی هستند و یک روند سودمند برای تعریف رده‌های هم ارزی توابع فراهم می‌کنند. در اینجا خلاصه‌ای از نظریه هموتوپی برای حل معادلات عملگری غیرخطی نظیر مسائل معکوس بیان می‌شود.

درحالت کلی، یک مسأله معکوس غیرخطی می‌تواند مانند یک معادله عملگری غیرخطی به صورت زیر فرمول‌بندی شود

$$F(m)=y \qquad (۱–۱)$$

یا به صورت یک مساله کمینه‌سازی مانند زیر

$$\min\|F(m)-y\|^2 \qquad (۲–۱)$$

که در معادلات (۱–۱) و(۱–۲)، m مدلی است که باید معکوس شود. y یک مجموعه به اصطلاح از مشاهدات و F یک مدل مقدم است که از یک معادله دیفرانسیل حاکم مقتضی محاسبه شده است. توجه کنید که مسائل (۱–۱) و (۱–۲) به شدت غیرخطی می‌باشند. بنابراین یک حدس اولیه خوب از مدل m هنگامی که می‌خواهیم یک الگوریتم عددی اجرا شود باید فراهم نمود. به وسیله ترکیب یک تابع هدف[۳۱] $F(m)$، پارامتر هموتوپی $\lambda\in[0,1]$و یک تابع ساده $G(m)$ یک تابع هموتوپی ساخته می‌شود به طوریکه

$$H(m,0)=G(m) \quad , \quad H(m,1)=F(m)-y \qquad (۳–۱)$$

دستگاه شروع معادلات غیرخطی $G(m)=0$ به طور دلخواه می‌تواند انتخاب شود، و حداقل یک جواب

[۳۱] - Target function

معلوم مانند m° دارد، که می‌تواند به عنوان یک حدس اولیه در تمام محاسبات انتخاب شود. انتظار می‌رود که منحنی $m = m(\lambda)$ که در آن $\lambda \in [\circ,\text{١}]$ وجود داشته باشد به طوری که در معادله هموتوپی زیر

$$H(m,\lambda) = \circ \qquad (\text{١-٤})$$

صدق کند. بنابراین واضح است که $m(\circ) = m^{\circ}$ و $m(\text{١}) = m^*$، جوابی از معادله عملگری (١-١) می‌باشند. بنابراین $m(\lambda)$ یک منحنی است که m° را به m^* پیوند می‌دهد. اگر بعضی از فنون عددی را برای دنبال کردن این منحنی از یک نقطه معلوم m° بکار ببریم، آنگاه در نهایت می‌توانیم به جواب m^* برسیم. به طور کلی دو راه برای تعقیب این منحنی وجود دارد.

راه اول. اولین راه بر پایه این فرض است که $H(m,\lambda)$ نسبت به m و λ دیفرانسیل پذیر باشد. با گرفتن دیفرانسیل از دو طرف معادله (١-٤) خواهیم داشت

$$H'_m(m,\lambda)dm + H'_{\lambda}(m,\lambda)d\lambda = \circ \qquad (\text{١-٥})$$

به خاطر اینکه m در شرط اولیه $m(\circ) = m^{\circ}$ صدق می‌کند، مساله بدست آوردن $m(\lambda)$ به یک مساله مقدار اولیه از معادله دیفرانسیل معمولی (١-٤) تبدیل می‌شود. به وسیله فرمول انتگرالگیری عددی، می‌توان یک تقریب از $m^* = m(\text{١})$ را بدست آورد.

راه دوم. دومین راه تقسیم کردن بازه $[\circ,\text{١}]$ به صورت $\circ = \lambda_{\circ} < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N = \text{١}$ وسپس بکارگیری بعضی روش‌های عددی برای حل پی در پی معادلات عملگری

$$H(m,\lambda_k) = \circ \quad , \quad k = \circ,\text{١},\text{٢},\ldots,N \qquad (\text{١-٦})$$

است. چون جواب $m^{k+\text{١}}$ از معادله مرتبه $k+\text{١}$ محاسبه می‌شود (توجه کنید که معادله مرتبه صفر از قبل معلوم است)، پس می‌تواند به عنوان تقریب اولیه معادله مرتبه k از معادله (١-٦) بکار برده شود. وقتی که $\lambda_k - \lambda_{k-\text{١}}$ به اندازه کافی کوچک باشد پیش بینی می‌شود که $m^{k-\text{١}}$ یک تقریب خوب برای m^k باشد، به طوری که به وسیله یک روش تکراری با همگرایی سرتاسری می‌توان به نتیجه‌ی همگرای آن رسید. برای مشاهده مثالی در این زمینه خواننده را به [١٥] رجوع می‌دهیم.

۴-۱ روش اختلال هموتوپی خی

دربخش ۱-۳-۶ توضیح داده شد که ایده هموتوپی وقتی به یک ابزار قوی در آنالیز عددی تبدیل می‌شود، که با حداقل یک روش سرتاسر همگرا ترکیب شود، به طور نمونه در [۱۵] روش هموتوپی با روش تفاضلات متناهی ترکیب شده است که برای حل معادله موج غیرخطی بکار رفته است.

به این نکته هم اشاره می‌کنیم که روش مذکور ممکن است که کارا باشد ولی حجم محاسبات بالاست و برای اجرا کننده روش، خسته کننده می‌باشد. از طرف دیگر توضیح داده شد که روش‌های اختلال به طور وسیعی در علوم و مهندسی بکار گرفته می‌شوند. دامنه کاربرد این روش‌ها به واسطه وجود کمیت اختلال و همچنین پارامترهای فیزیکی کوچک یا بزرگ در مسائل مربوطه محدود است.

روش اختلال هموتوپی توسط جی هوان خی در سال ۱۹۹۹ مطرح شد [۱۹] و به وسیله خود شخص خی در سال ۲۰۰۰ به طور رسمی معرفی شد [۲۰]. این روش برخلاف روش‌های هموتوپی و اختلال دیگر از محاسبات زیاد و پارامترهای کوچک یا بزرگ رنج نمی‌برد. در مقایسه با روش‌های اختلال کلاسیک، روش اختلال هموتوپی تمام خواص روش‌های اختلال کلاسیک را دارا می‌باشد و از اینها گذشته این روش ترکیبی، دیگر به هیچ پارامتری وابسته نمی‌باشد. جالب است توجه کنیم که روش اختلال هموتوپی برای حل معادلات تابعی غیرخطی ابداع شده است.

برای توضیح ایده اساسی و پایه‌ای روش اختلال هموتوپی، معادله تابعی زیر را

$$A(u)=f(r) \quad , \quad r(x)\in\Omega \qquad (۱-۷)$$

که در آن، A عملگری عمومی، $f(r)$ یک تابع تحلیلی و معلوم است را در نظر بگیرید. عملگر A را می‌توان به دو بخش خطی L و غیرخطی N تقسیم کرد. بنابراین معادله (۱-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L(u)+N(u)=f(r) \qquad (۱-۸)$$

یک هموتوپی به شکل $v(r,p):\Omega\times[0,1]\rightarrow\Re$ را که در رابطه زیر صدق کند، می‌سازیم

$$H(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L(y_0)\right]+p\left[A(v)-f(r)\right]=0 \qquad (۱-۹)$$

رابطه (۱-۹) معادل است با