دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان:

حل چند جمله‌ای معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه‌ی بالا با ضرایب ثابت

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل بابلیان

تدوین :

سید ریبوار بدوی

شهریور ۱۳۸۸

به یاد پدر فقیدم.

و تقدیم

به دارایی گران‌بهای زندگیم، مادر مهربانم،

به پاس دنیا دنیا مهر و عطوفتش،

به برادر و خواهر عزیزم،

که فداکارانه یاریگر برادر کوچک خود بوده‌اند،

و به همسرم که صمیمانه در تدوین این پایان‌نامه مرا یاری نمود.

سپاس خدایی را چون خداوند است و عزیز.

از مادر عزیزم که دعای خیر او همواره راه‌گشای فرزند کوچکش بوده است،
از جناب آقای پروفسور اسماعیل بابلیان، استاد راهنمای ارجمندم، که علاوه بر راهنمایی‌های گرانقدرشان بامساعدت بسیار نیز مرا یاری داده‌اند،
از اساتید محترم، جناب آقای دکتر شهنام جوادی و جناب آقای دکتر عباس‌بندی که زحمت داوری پایان‌نامه‌ی اینجانب را بر عهده گرفتند،
از برادر و خواهرم که حمایت‌های بی‌دریغ‌شان همواره شامل حال من بوده است،
و از همسرم که مرا در این امر یاری نمود،

سپاسگزارم.

سید ریبوار بدوی

پاییز ۱۳۸۸

چکیده

دراین نوشتار یک روش ماتریسی کاربردی جهت یافتن جوابی تقریبی برای معادله‌ی انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه‌ی بالا با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=۰}^{m} p_k y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt \qquad a \le x, t \le b$$

تحت شرایط اولیه ـ مرزی

$$\sum_{k=۰}^{m-۱} \Big(a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) + c_{ik} y^{(k)}(c) \Big) = \gamma_i \ , \quad i = ۰, ۱, \ldots, m - ۱ \ , \quad a \le c \le b$$

با استفاده از چند جمله‌ای تیلور، ارائه شده است. در این روش معادله‌ی انتگرال ـ دیفرانسیل با جایگزینی توابع موجود در معادله به وسیله‌ی چند جمله‌ای تیلور آن‌ها، به یک معادله‌ی ماتریسی که معادل یک دستگاه معادلات خطی است تبدیل می‌شود.

در ادامه تجزیه و تحلیل خطا و مثال‌های عددی جهت اثبات کارایی این روش ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: چند جمله‌ای های تیلور، معادله‌ی انتگرل ـ دیفرانسیل فردهلم، روش ماتریسی تیلور.

رده‌بندی موضوعی(۲۰۰۰): 65R20, 45J05

پیشگفتار

معادلات تابعی[۱] از بسیاری شاخه‌های علوم مانند فیزیک، مکانیک، الکترونیک، هندسه، شیمی، زیست‌شناسی، نجوم، اقتصاد و ... [8 - 3] ناشی می‌شوند.

حل این گونه معادلات با استفاده از روش‌های تحلیلی اغلب بسیار مشکل و حتی غیر ممکن بوده و بنابراین ریاضی‌دانان توجه خود را به استفاده از روش‌های عددی معطوف داشتند. از جمله روش‌های عددی مورد استفاده می‌توان روش تجزیه‌ی آدمین[۲]، روش موجک هار[۳]، روش هم‌محلی چبیشف[۴]، روش سری‌های والش و تاو[۵]، روش چندجمله‌ای تیلور[۶] و ...[16 - 9] را نام برد. روش چندجمله‌ای تیلور اولین بار توسط کانول[۷] و لیو[۸] جهت حل معادلات انتگرال[۹] مورد استفاده قرار گرفت [17] سپس سزر[۱۰] این روش را توسعه داد و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل[۱۱] [18] و معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل[۱۲] [19] استفاده کرد.

معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل توسط روش‌های عددی دیگر نظیر روش موجک های سینوس- کوسینوس[۱۳]، روش تفاظلات متناهی فشرده[۱۴]، روش توابع هار[۱۵]، روش مونت کارلو[۱۶]،

---

[۱] Functional Equations

[۲] Adomian decomposition method

[۳] Haar wavelet method

[۴] Chebyshev collocation method

[۵] Tau and Walsh series method

[۶] Taylor polynomial method

[۷] Kanwal

[۸] Liu

[۹] Integral Equation

[۱۰] Sezer

[۱۱] Differential Equations

[۱۲] Integro - Differential Equations

[۱۳] Sine - Cosine wavelets method

[۱۴] Compact finite difference method

[۱۵] Haar functions method

[۱۶] Monte Carlo method

روش توابع ترکیبی فوریه و قطعه‌ای جهشی[۱۷] و ... [24 - 20] نیز حل شده‌اند.

در این پایان‌نامه از روش چندجمله‌ای تیلور برای حل معادله‌ی انتگرال ـ دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه بالا با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=\circ}^{m} p_k y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt \qquad a \leq x,t \leq b$$

تحت شرایط اولیه ـ مرزی

$$\sum_{k=\circ}^{m-۱} \left(a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) + c_{ik} y^{(k)}(c) \right) = \gamma_i \ , \quad i = \circ, ۱, \ldots, m-۱ \ , \quad a \leq c \leq b$$

استفاده شده است.

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است که خلاصه‌ی هر یک به شرح زیر است:

فصل اول: پیش‌نیازها

در این فصل قضایا و روابطی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بررسی می‌کنیم.

فصل دوم: تعاریف

در این فصل تعریف معادلات تابعی و انواع آن ارائه می‌شود.

فصل سوم: آشنایی مختصر با چند روش تقریبی برای حل معادلات تابعی

این فصل شامل بررسی و توضیح مختصر روش‌های هموتوپی آشفتگی، توابع فوریه و توابع ترکیبی فوریه و قطعه‌ای جهشی‌است که روش‌های تقریبی برای حل معادلات تابعی هستند و در فصل آخر آنها را با روش خود مقایسه کرده‌ایم.

فصل چهارم: یک جواب به‌صورت چندجمله‌ای

در این فصل بعد از توضیح سیمای کلی روش مورد نظر پایان‌نامه، قضایا و روابط اصلی روش را بیان کرده و سپس به ارائه و توضیح دقیق روش می‌پردازیم در انتها نیز تحلیل خطا بیان شده است.

---

[۱۷] Hybrid Fourier and block - pulse functions

فصل پنجم: مثال‌های عددی

در این فصل چند مثال عددی را بیان کرده و با روش خود آنها را حل کرده‌ایم. هم چنین جواب‌های تقریبی به دست آمده و خطاها را در جداولی بیان و با جواب واقعی و جواب‌های تقریبی به‌دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه کرده‌ایم. این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی زیر تدوین شده است:

N. Kurt, M. Sezer, Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, Journal of the Franklin Institute, 345(2008)839-850.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ چند جمله‌ای تیلور تولید شده بوسیله‌ی یک تابع

فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x = \alpha$ تا مرتبه‌ی n ($n \geq ۱$) دارای مشتق باشد، حال سعی می‌کنیم یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n مانند p پیدا کنیم به طوری که در نقطه‌ی $x = \alpha$ با f و n مشتق اول آن برابر باشد. بنابراین $(n + ۱)$ شرط هست که بایستی برقرار شوند، یعنی باید:

$$p(\alpha) = f(\alpha) \quad , \quad p'(\alpha) = f'(\alpha) \quad , \ldots , \quad p^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha) \qquad (۱.۱)$$

لذا یک چندجمله‌ای درجه‌ی n ، مثلاً:

$$p(x) = c_۰ + c_۱(x - \alpha) + c_۲(x - \alpha)^۲ + \cdots + c_n(x - \alpha)^n \qquad (۲.۱)$$

را با $(n + ۱)$ ضریب (که باید تعیین شوند) مورد آزمایش قرار می‌دهیم. از شرایط (۱.۱) استفاده کرده و این ضرایب را به طور متوالی معین خواهیم کرد.

ابتدا مقدار $x = \alpha$ را در چند جمله‌ای $p(x)$ قرار داده و به دست می‌آوریم $p(\alpha) = c_۰$ و با توجه به آنکه باید $p(\alpha) = f(\alpha)$ پس خواهیم داشت: $c_۰ = f(\alpha)$. حال از طرفین تساوی (۲.۱)

مشتق گرفته و مجدداً مقدار $x = \alpha$ را در نتیجه قرار داده، به دست خواهیم آورد : $p'(\alpha) = c_1$ و با توجه به شرط $p'(\alpha) = f'(\alpha)$ خواهیم داشت: $c_1 = f'(\alpha)$. اما اگر دو بار از تساوی (۲.۱) مشتق گرفته و مقدار $x = \alpha$ را در نتیجه‌ی به دست آمده قرار دهیم به‌تساوی $p^{(2)}(\alpha) = 2c_2$ رسیده و با توجه به شرایط (۱.۱) خواهیم داشت: $c_2 = f^{(2)}(\alpha)/2$. به طور کلی اگر k بار از تساوی (۲.۱) مشتق گرفته و مقدار $x = \alpha$ را در آن قرار دهیم به تساوی $p^{(k)}(\alpha) = k!c_k$ دست می‌یابیم که با توجه به شرط $p^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ به دستور کلی زیر خواهیم رسید:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{۳.۱}$$

که در آن وقتی $k = 0$ ، $f^{(0)}(\alpha)$ را به معنی $f(\alpha)$ می‌گیریم.

آنچه گفته شد ثابت می‌کند که هرگاه یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n وجود داشته باشد که در شرایط (۱.۱) صدق کند آنگاه ضرایب آن الزاماً از (۳.۱) به‌دست می آیند و برعکس یک چند جمله‌ای با ضرایب (۳.۱) در شرایط (۱.۱) صدق می‌کند (این را به آسانی می‌توان تحقیق کرد). لذا، مطالب بیان شده اثبات قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۱.۱ . فرض کنید که f تابعی باشد که در نقطه‌ی $x = \alpha$ تا مرتبه‌ی n مشتق داشته باشد. در این صورت یک و فقط یک چند جمله‌ای مانند p از درجه‌ی حداکثر n وجود دارد که در $(n+1)$ شرط

$$p(\alpha) = f(\alpha) \quad , \quad p'(\alpha) = f'(\alpha) \quad , \ldots , \quad p^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha)$$

صدق کند و این چند جمله‌ای به صورت زیر است:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k \tag{۴.۱}$$

واضح است که درجه‌ی p مساوی n است اگر و تنها اگر $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$.

چند جمله‌ای (۴.۱) را به افتخار ریاضیدان انگلیسی، بروک تیلور[۱] (۱۶۸۵ – ۱۷۳۱)، یک چند جمله‌ای تیلور می‌نامند. چند جمله‌ای $p(x)$ را با نماد $f_n(x)$ نشان می‌دهیم.

پس اگر تابع f در نقطه‌ی $x = \alpha$ تا مرتبه‌ی n مشتق داشته باشد همیشه می‌توان چند جمله‌ای تیلور $f_n(x)$ آن را در نقطه‌ی $x = \alpha$ به صورت

$$f_n(x) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k,$$

تشکیل داد.

۲.۱ دستور تیلور با باقیمانده

۱.۲.۱ تعاریف و قضایا

اکنون در مورد خطائی بحث می‌کنیم که در تقریب تابع f به وسیله‌ی چند جمله‌ای تیلور آن در نقطه‌ی α (یعنی $f_n(x)$)، ایجاد می‌شود. این خطا را با $E_n(x)$ نشان داده و داریم:

$$E_n(x) = f(x) - f_n(x)$$

لذا اگر تابع f در نقطه‌ی $x = \alpha$ دارای مشتق تا مرتبه‌ی n باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + E_n(x) \qquad (۵.۱)$$

تساوی (۵.۱) را دستور تیلور با باقیمانده گویند. این دستور زمانی مفید است که بتوان اندازه‌ی $E_n(x)$ را تخمین زد. ما خطا را به صورت یک انتگرال بیان کرده و بعد اندازه‌ی انتگرال را تخمین می‌زنیم. برای آنکه خطوط اصلی کار روشن شود ابتدا خطای حاصل از یک تقریب خطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[۱] Brook Taylor

قضیه ۲.۱ . فرض کنید که تابع f در یک همسایگی α مشتق دوم قطعه‌ای پیوسته داشته باشد. در این صورت به ازای هر x در این همسایگی داریم:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + E_1(x)$$

که در آن

$$E_1(x) = \int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt.$$

اثبات. طبق تعریف خطا داریم:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= f(x) - f_1(x) \\ &= f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha) \\ &= \int_\alpha^x f'(t)dt - f'(\alpha)\int_\alpha^x dt \\ &= \int_\alpha^x [f'(t) - f'(\alpha)]dt \end{aligned}$$

با فرض

$$u = f'(t) - f'(\alpha) \quad , \quad v = t - x$$

خواهیم داشت:

$$du = f''(t)dt \quad , \quad dv = dt$$

و لذا می‌توان نوشت:

$$E_1(x) = \int_\alpha^x [f'(t) - f'(\alpha)]dt = \int_\alpha^x u dv$$

و با استفاده از دستور انتگرال گیری جزء به جزء به‌دست خواهیم آورد:

$$E_1(x) = \int_\alpha^x u dv$$

$$
\begin{aligned}
&= uv]_{\alpha}^{x} - \int_{\alpha}^{x} v du \\
&= (f'(t) - f'(\alpha))(t-x)]_{\alpha}^{x} - \int_{\alpha}^{x} (t-x) f''(t) dt \\
&= \circ - \int_{\alpha}^{x} (t-x) f''(t) dt \\
&= \int_{\alpha}^{x} (x-t) f''(t) dt
\end{aligned}
$$

و لذا اثبات قضیه کامل است. □

حال نتیجه‌ی متناظر را برای خطای تقریب تابع f به وسیله‌ی چند جمله‌ای $f_n(x)$، به‌صورت قضیه‌ی زیر بیان می‌داریم.

قضیه ۳.۱ . فرض که تابع f در بازه‌ای شامل α مشتق مرتبه‌ی $(n+۱)$ قطعه‌ای پیوسته داشته باشد. در این صورت به ازای هر x متعلق به این بازه، دستور تیلور

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + E_n(x)$$

را داریم که در آن

$$E_n(x) = \frac{۱}{n!} \int_{\alpha}^{x} (x-t)^n f^{(n+۱)}(t) dt.$$

اثبات. قضیه را به استقرا ثابت می‌کنیم. در قضیه‌ی ۲.۱ دیدیم که حکم برای $n = ۱$ درست بوده و لذا پایه‌ی استقرا برقرار است، فرض می‌کنیم که حکم به ازای n نیز درست باشد (فرض استقرا) حال نشان می‌دهیم که برای $(n+۱)$ نیز حکم درست است.

دستور تیلور (۵.۱) را برای n و $(n+۱)$ نوشته و از هم کم می کنیم. خواهیم داشت:

$$f(x) - f(x) = \sum_{k=\circ}^{n+۱} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + E_{n+۱}(x) - \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k - E_n(x)$$

$$\circ = \frac{f^{(n+۱)}(\alpha)}{(n+۱)!}(x-\alpha)^{(n+۱)} + E_{n+۱}(x) - E_n(x)$$

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{(n+1)}.$$

با استفاده از فرض استقرا و انتگرال مربوط به $E_n(x)$ داریم:

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt - \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{(n+1)} \qquad (٦.١)$$

باتوجه به تساوی زیر

$$\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1} = \int_\alpha^x (x-t)^n dt, \qquad (٧.١)$$

و جایگذاری آن در (٦.١) به‌دست می آوریم:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt - \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n [f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(\alpha)]dt. \end{aligned}$$

حال با فرض

$$u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(\alpha) \quad ; \quad v = (x-t)^{(n+1)}/(n+1),$$

خواهیم داشت:

$$du = f^{(n+2)}(t)dt \quad ; \quad dv = (x-t)^n dt,$$

و لذا:

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_\alpha^x udv,$$

با استفاده از دستور انتگرال گیری جزء به جزء و با توجه به این مطلب که در $t=\alpha$ داریم: $u=0$ و در $t=x$، $v=0$ است، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\left[[uv]_\alpha^x - \int_\alpha^x vdu\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n!}\int_\alpha^x v\,du \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_\alpha^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

پس حکم قضیه برای هر $n \geq 1$ برقرار است. □

۲.۲.۱ تخمین خطا در دستور تیلور

از آنجا که خطای $E_n(x)$ در دستور تیلور به صورت انتگرالی است که دارای مشتق مرتبه‌ی $(n+1)$ام تابع f است، لذا قبل از آنکه بشود اندازه‌ی $E_n(x)$ را تخمین زد، به اطلاعات بیشتری درباره‌ی $f^{(n+1)}$ نیاز خواهیم داشت. همان گونه که در قضیه‌ی زیر بیان می‌کنیم، اگر کران‌های بالا و پایینی برای $f^{(n+1)}$ وجود داشته باشد، می توانیم برای $E_n(x)$ نیز کران‌های بالا و پایینی نظیر را بیابیم.

قضیه ۴.۱ . هرگاه تابع f در بازه‌ای شامل α دارای مشتق مرتبه‌ی $(n+1)$ام بوده و به ازای هر t متعلق به این بازه داشته باشیم:

$$
m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \qquad (۸.۱)
$$

آنگاه به ازای هر x از بازه‌ی مذکور، تخمین‌های زیر را برای $E_n(x)$ خواهیم داشت:

اگر $x > \alpha$ آنگاه:

$$
m(x-\alpha)^{n+1}/(n+1)! \leq E_n(x) \leq M(x-\alpha)^{n+1}/(n+1)!
$$

و اگر $x < \alpha$ آنگاه:

$$
m(\alpha-x)^{n+1}/(n+1)! \leq (-1)^{n+1}E_n(x) \leq M(\alpha-x)^{n+1}/(n+1)!.
$$

اثبات. ابتدا فرض می کنیم که $x > \alpha$. در این صورت انتگرال مربوط به $E_n(x)$ روی بازه‌ی $[\alpha, x]$ خواهد بود و به ازای هر t در این بازه داریم: $(x-t)^n \geq ۰$. پس با ضرب $(x-t)^n/n!$ در طرفین نامساوی‌های (۸.۱) خواهیم داشت:

$$m(x-t)^n/n! \leq (x-t)^n f^{(n+۱)}(t)/n! \leq M(x-t)^n/n!$$

حال با انتگرال گیری از α تا x به دست می آوریم:

$$\frac{m}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n dt \leq \frac{۱}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n f^{(n+۱)}(t)dt \leq \frac{M}{n!}\int_\alpha^x (x-t)^n dt \qquad (۹.۱)$$

و با توجه به تساوی (۷.۱)، یعنی:

$$\frac{(x-\alpha)^{n+۱}}{n+۱} = \int_\alpha^x (x-t)^n dt$$

و جایگذاری آن در نامساوی‌های (۹.۱) خواهیم داشت:

$$\frac{m}{(n+۱)!}(x-\alpha)^{n+۱} \leq E_n(x) \leq \frac{M}{(n+۱)!}(x-\alpha)^{n+۱}$$

پس برای حالت $x > \alpha$ اثبات کامل است.

حال چنانچه $x < \alpha$ باشد، انتگرال گیری مربوط به $E_n(x)$ روی بازه‌ی $[x, \alpha]$ صورت خواهد گرفت. به‌ازای هر t از این بازه داریم: $t \geq x$. پس

$$(-۱)^n(x-t)^n = (t-x)^n \geq ۰,$$

بنابراین با ضرب عبارت نامنفی $(-۱)^n(x-t)^n/n!$ در طرفین نامساوی‌های (۸.۱) داریم:

$$(-۱)^n(x-t)^n m/n! \leq (-۱)^n(x-t)^n f^{n+۱}(t)/n! \leq (-۱)^n(x-t)^n M/n!$$

حال با انتگرال گیری از x تا α خواهیم داشت:

$$\frac{(-۱)^n m}{n!}\int_x^\alpha (x-t)^n dt \leq (-۱)^n \int_x^\alpha \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+۱)}(t)dt \leq \frac{(-۱)^n M}{n!}\int_x^\alpha (x-t)^n dt$$
(۱۰.۱)