دانشکده ریاضی
گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
آمار، گرایش آمارریاضی

عنوان

برآورد انقباضی در مدل‌های محدود شده

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

پژوهشگر

حمید کرمی کبیر

اردیبهشت ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: کرمی کبیر نام: حمید

عنوان: برآورد انقباضی در مدل‌های محدود شده

استاد راهنما: دکتر محمد آرشی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمارریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: اردیبهشت ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۲۱

واژگان کلیدی: برآوردگر انقباضی، توزیع متقارن کروی، توزیع نرمال چندمتغیره، فضای پارامتر محدود شده، مخاطره

چکیده

در این پایان‌نامه مسئله برآورد بردار پارامتر مکان p بعدی θ در کلاس توزیع‌های متقارن کروی با پارامتر ماتریس مقیاس معلوم و مجهول، تحت محدودیت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سه محدودیت بر روی بردار پارامتر θ در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم همه مؤلفه‌های بردار θ نامنفی باشند و سپس فرض می‌کنیم تنها زیر مجموعه‌ای از مؤلفه‌های بردار θ نامنفی باشند. به عنوان محدودیت سوم حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن پارامتر θ متعلق به مخروط $\mathscr{C} \in \mathbb{R}^p$ است. هدف یافتن کلاسی از برآوردگرهای انقباضی برتر برای پارامتر مکان مجهول θ، در فضای پارامتر محدود شده، تحت توابع زیان مربعی و مربعی موزون است. ملاک برتری برآوردگرها کمتر بودن نسبی مخاطره آن‌ها از برآوردگر طبیعی است.

خاضعانه و خالصانه تقدیم می گردد به محضر نورانی

امام مهدی (عج)

سپاس‌گزاری

دَعْواهُمْ فيها سُبْحانَكَ اللَّهُمَّ وَ تَحِيَّتُهُمْ فيها سَلامٌ وَ آخِرُ دَعْواهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعالَمينَ.
نیایش آنان در آنجا، این است که خدایا تو پاك و منزّهی و درودشان در آنجا سلام است و پایان نیایش آنان این است که ستایش ویژه پروردگار جهانیان است (سوره یونس آیه ۱۰).

سپاس خداوندی را که بخشنده، مهربان و شایسته پرستش است. خداوندی که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و وی را کیمیای محبت کرامت فرمود.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد آرشی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. ایشان نه تنها راهنمای مسائل علمی بلکه راهنمای عملی راه و رسم زندگی نیز بودند. همچنین وظیفه خود می‌دانم از تمامی اساتید محترم گروه آمار دانشگاه شاهرود آقایان داود شاهسونی، احمد نزاکتی رضازاده و اساتید محترم داور آقایان حسین باغیشنی و مهدی روزبه قدردانی به عمل بیاورم.

هر چند این اوراق در بیان ارادت قلبی، به پدر و مادر عزیزم ناتوان‌اند، اما به رسم ادب، صمیمانه و خالصانه، از پدرم برای صبر و فداکاری‌اش و مادرم به خاطر گذشت و مهربانی‌اش، تشکر و قدردانی به عمل می‌آورم. همچنین از برادر و خواهرانم به ویژه سرکار خانم کرمی کبیر که از کودکی معلم ریاضی بنده بوده‌اند، کمال تشکر را دارم.

وظیفه خود می‌دانم تا از دوستانم آقایان احسان اسحقی و میعادولیپور بواسطه همراهی و هم‌فکری‌شان تشکر نمایم. همچنین از دوست عزیزم آقای پیمان برآبادی که آشنایی با ایشان تاثیری شگرف در اینجانب داشت، از صمیم قلب سپاسگذارم.

در پایان از تمامی دانشجویان آمار و ریاضی دانشکده ریاضی و همچنین از مسئولین محترم آموزش دانشکده جناب آقای حسین‌پور و سرکار خانم خداوردی به پاس لطف و محبت‌هایشان قدردانی می‌نمایم.

حمید کرمی کبیر
اردیبهشت ۱۳۹۲

فهرست مقالات مستخرج از متن پایان نامه

Karamikabir H. and Arashi M. (2012), " A Note On Shrinkage Estimator For Restricted Parameter Space" **Communications in Statistics - Theory and Methods**, Under Review.

کرمی کبیر، ح. و آرشی، م. (۱۳۹۱)، " رآوردگر انقباضی در توزیع نرمال چندمتغیره تحت فضای پارامتر محدود"ب، **مجله علوم آماری**، در حال بررسی.

پیش گفتار

از زمانی که استاین (۱۹۵۶) نشان داد در توزیع نرمال، وقتی که بعد فضای پارامتر بزرگتر از ۲ است، میانگین نمونه برآوردگری غیرمجاز برای میانگین توزیع نرمال است، تاکنون تلاش‌های فراوانی در جهت بهبود برآوردگر میانگین صورت گرفته است. با این حال هنوز برآوردگر مجاز به طور یکنواخت در تمام فضای پارامتر برای این حالت به دست نیامده است.
به دست آوردن برآوردگر بهبود یافته نه تنها در توزیع نرمال بلکه در خانواده توزیع‌های بیضی‌گون به خصوص توزیع متقارن کروی نیز مورد توجه قرار دارد. بدین منظور در این پایان‌نامه در جستجوی یافتن کلاسی از برآوردگرهای انقباضی بهبود یافته برای پارامتر مکان مجهول θ، که در فضای محدود شده قرار دارد، نسبت به برآوردگر طبیعی هستیم. در این راستا با در نظر گرفتن سه نوع محدودیت بر روی فضای پارامتر مکان توزیع متقارن کروی با پارامتر مقیاس معلوم و مجهول، برآوردگرهای انقباضی بهبود یافته را معرفی خواهیم کرد. این مجموعه شامل ۴ فصل و ۳ پیوست می‌باشد. مطالب هر فصل به طور خلاصه عبارتند از:

- در فصل اول مقدمات کار را با ارائه تعاریف اولیه و لم‌های مورد نیاز در فصل‌های بعدی فراهم می‌کنیم.

- در فصل دوم با قرار دادن سه نوع محدودیت روی بردار پارامتر θ، رده‌ای از برآوردگرهای انقباضی به صورت

$$\delta(X,U) = \delta_\circ(X) + g(X)U^TU,$$

  که تحت تابع زیان مربعی بهتر از برآوردگر طبیعی $\delta_\circ(X)$ است را خواهیم یافت. مطالب این فصل عمدتاً از منبع فودینیر و همکاران (۲۰۰۳a) می‌باشد.

- در فصل سوم همانند فصل دوم با قرار دادن دو محدودیت بر روی بردار پارامتر θ، در توزیع متقارن کروی با پارمتر مقیاس $\sigma^۲ I$ با $\sigma^۲$ مجهول و همچنین در توزیع نرمال p - متغیره با پارامتر مکان θ و پارامتر مقیاس $\sigma^۲ I$ با $\sigma^۲$ مجهول ($N_p(\theta, \sigma^۲ I_p)$) رده‌ای از برآوردگرهای

انقباضی به صورت

$$\delta(X,U)=\delta_\circ(X)+g(X,S)U^TU,$$

که تحت تابع زیان درجه دوم بهتر از برآوردگر طبیعی $\delta_\circ(X)$ است را خواهیم یافت.

- در فصل چهارم ضمن ارائه یک مثال واقعی برای پی بردن چگونگی کار با برآوردگر انقباضی، با استفاده از شبیه‌سازی برتری برآوردگر انقباضی را در توزیع نرمال چند متغیره تحت محدودیت کامل، به تصویر خواهیم کشید.

- در پیوست‌ها ابتدا به تعاریف جبر خطی مورد نیاز که در متن پایان‌نامه به آن‌ها اشاره شده است، می‌پردازیم. سپس در بخش دوم، به ارائه پیشنهادات پرداخته و در پایان دستورهای مورد نیاز برنامه‌نویسی بر اساس نرم‌افزار R، که در پایان‌نامه استفاده شده، را می‌آوریم.

در سرتاسر این مجموعه، در مواردی که برهان از نویسنده بوده از علامت * و در صورتی که هم قضیه و هم برهان از نویسنده می‌باشد، از نماد ** استفاده شده است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمه و دورنما

۱.۱ مقدمه

در تحلیل آماری، استفاده از اطلاعات پیشین بر روی تعدادی یا تمام پارامترهای مدل معمولاً منجر به استفاده از روش‌های پیشرفته و تعمیم یافته ای می‌شود، که با توجه به قطعی یا غیرقطعی بودن این اطلاعات، به کار برده می‌شود. در حالت اول، اعمال آن بر روی مدل به صورت قید[۱]، باعث به وجود آمدن مدل محدودشده[۲] می‌شوند. برآوردگری که بر اساس مدل‌های محدودشده به دست می‌آید، برآوردگر محدودشده[۳] نامیده می‌شود. اعتبار و کارآیی برآوردگرهای محدودشده بر اساس قید اعمال شده بر روی فضای پارامتر مورد سنجش و بررسی قرار می‌گیرند، در حالی که برآوردگرهای محدودنشده در کل فضای پارامتر بررسی می‌شوند. بنابراین، نتایج بدست آمده بر پایه مدل‌های محدودشده و محدودنشده تنها با سنجش درست و اعتبار محدودیت‌ها و قیود اعمال شده، می‌تواند معقول و کاربردی باشد (برای آگاهی بیشتر در این زمینه آرشی، ۱۳۸۷ را ببینید).

در سال ۱۹۵۶، چارلز استاین نشان داد که در توزیع نرمال p - متغیره ($p \geq ۳$)، برآوردگر طبیعی[۴] میانگین نمونه تحت تابع زیان مربعی، غیرمجاز[۵] است. این موضوع سبب ایجاد انگیزه برای بهبود برآوردگرها در مسائل مختلف برآوردیابی شد. سپس جیمز و استاین (۱۹۶۱) برآوردگری ارائه دادند

[۱] Constraint
[۲] Restricted model
[۳] Restricted estimator
[۴] Natural estimator
[۵] Inadmissible

که بر میانگین نمونه برتری داشت. به عبارت دیگر این برآوردگر دارای مخاطره کمتری نسبت به میانگین نمونه بود. این یافته تحول بزرگی در شاخه‌های مختلف آمار ایجاد کرد. زیرا پس از آن افراد زیادی تلاش کردند برآوردگرهایی از نوع جیمز ـ استاین ارائه دهند که در شرایط مختلف فضای پارامتر دارای مخاطره کمتر باشد.

برآوردگر جیمز ـ استاین برآوردگری غیرخطی است، که بر برآوردگر خطی میانگین نمونه برتری دارد. در نتیجه تمامی خواص خوب برآوردگر میانگین نمونه‌ای، از قبیل نااریبی و پایایی، که بر اساس نظریه کمترین توان‌های دوم و درستنمایی ماکزیمم بدست می‌آیند، تحت تاثیر برآوردگر جیمز-استاین قرار گرفتند. بر این اساس به افتخار پرفسور چارلز استاین، برآوردگری که به طور یکنواخت بر برآوردگر استاندارد (برآوردگر کمترین توان‌های دوم[۶] (LSE) و برآوردگر درستنمایی ماکزیمم[۷] (MLE)) برتری دارد، را برآوردگر نوع استاین [۸] (SE) می‌نامند. فرض کنید $X \in \mathbb{R}^{۲}$ برآوردگر طبیعی پارامتر مکان باشد، ساختار کلی برآوردگرهای نوع استاین مکان به صورت زیر است.

$$\delta_a^{JS}(X) = \Big(۱ - \frac{a}{\|X\|^{۲}}\Big)X, \quad ۰ < a < ۲(p-۲).$$

که در آن p بعد فضای پارامتر است. بنابه قضیه گوس-مارکف[۹]، برآوردگر LS در کلاس برآوردگرهای نااریب خطی دارای کمترین واریانس است (شائو، ۲۰۰۳). اما ممکن است در ازای اریب شدن برآوردگرها به برآوردگری دست پیدا کنیم که دارای واریانسی (مخاطره) به مراتب کمتر از برآوردگر LS باشد. برآوردگر انقباضی [۱۰] یکی از برآوردگرهایی است که دارای این خاصیت است.

برآوردگر انقباضی، برآوردگری است که به طور واضح یا مجازی در اثر انقباض به دست می‌آید (تعریف کامل این برآوردگر در ادامه خواهد آمد). شکل کلی برآوردگر انقباضی به صورت $X+g(X)$ است که در آن g یک تابع اندازه‌پذیر می‌باشد. همانطور که مشخص است برآوردگر استاین نیز با فرض $g(X) = -\frac{a}{\|X\|^{۲}}X$، یک برآوردگر انقباضی است. لذا به برآوردگر نوع استاین، برآوردگر انقباضی نوع استاین [۱۱] (SSE) نیز گفته می‌شود. به طور کلی، آماره آزمون به کار رفته در برآوردگر

[۶] Least Squares Estimator
[۷] Maximum-Likelihood Estimator
[۸] Stein-type Estimator
[۹] Gauss–Markov Theorem
[۱۰] Shrinkage estimator
[۱۱] Stein-type Shrinkage Estimator

نوع استاین، فاصله بین برآوردگر محدودشده و برآوردگر محدودنشده را اندازه می‌گیرد.

در اغلب پدیده‌های طبیعی، با توجه به شرایط خاص طبیعت، ممکن است محدودیت‌هایی روی صفت‌ها و مشخصه‌های متغیر گذاشته شود که این مورد، موجب تخمین این مشخصه‌ها در مدل‌های محدودشده می‌شود. مثلاً در یک فرآیند تولید لامپ، متوسط طول عمر همواره عددی مثبت است، حال اگر علاقه‌مند به تخمین طول عمر باشیم، باید محدودیت مثبت بودن را به مدل مورد بررسی اضافه کنیم. لازم به ذکر است که چنانچه از توزیع گاما برای مدل‌سازی طول عمر لامپ‌ها استفاده کنیم، محدودیت مثبت بودن در ذات تکیه‌گاه و فضای پارامتر توزیع است. ولی چنانچه از توزیع نرمال (بنابه اطلاعات نمونه) استفاده کنیم، آن‌گاه باید حتماً محدودیت مثبت بودن را بر روی برآوردگر پارامتر مکان اعمال کنیم، چون طول عمر نمی‌تواند نامثبت باشد. بنابراین برآورد پارامتر محدودشده، رده‌ای وسیع از مثال‌های موجود در دنیای واقعی را شامل می‌شود. چرا که در اغلب این مثال‌ها محدودیت‌هایی وجود دارد که توسط آزمایشگر اتخاذ می‌شود. برای آگاهی بیشتر و مشاهده مثالی کاربردی به تجدد (۱۳۹۱)، در زمینه کاربرد برآوردگر انقباضی در بازی بیس‌بال، مراجعه کنید.

برآوردگر انقباضی از دو جهت در برآورد پارامتر محدودشده دارای اهمیت است. یکی این‌که این برآوردگر، مقدار مخاطره را در حالت کلی نسبت به برآوردگر LS کاهش می‌دهد و دیگر این‌که نقش تابع $g(X)$ در اضافه کردن اثر محدودیت به برآوردگر اولیه X غیر قابل چشم‌پوشی است. از این‌رو در این پایان‌نامه به دنبال یافتن برآوردگر انقباضی مناسب و بررسی رفتار آن در مدل‌های محدودشده هستیم.

مسئله برآورد پارامتر مکان محدودشده، در سال‌های اخیر پیشرفت های متعددی یافته است. در این زمینه، کسلا و استرادرمان[۱۲] (۱۹۸۱) و بیکل[۱۳] (۱۹۸۱) مسئله برآورد پارامتر مکان را تحت محدودیت $|\theta| < m$ در توزیع نرمال یک متغیره مورد مطالعه قرار دادند. در همین راستا، گاتسونیس[۱۴] و همکاران (۱۹۸۵) برآوردگر بیز[۱۵] را با محدودیت مشابه با کسلا و استرادرمان

[۱۲] Strawderman
[۱۳] Bickel
[۱۴] Gatsonis
[۱۵] Bayes estimator

برای میانگین توزیع نرمال ارائه کردند. همچنین کاریا[۱۶](۱۹۸۹)، پرون و جیری[۱۷](۱۹۸۹) و مارچاند[۱۸](۱۹۹۴)، توزیع نرمال p - متغیره $N_p(\mu, \Sigma)$ را با محدودیت $\mu^T\Sigma^{-1}\mu = \lambda_0$ (برای μ و Σ مجهول)، در نظر گرفتند. مارچاند (۱۹۹۳) توزیع‌های متقارن کروی برای θ (اساساً برای توزیع‌های نرمال آمیخته) را با محدودیت $\lambda_0 = (\theta^T\theta)^{1/2} = \|\theta\|$ در نظر گرفت. وی بهترین برآوردگر هم‌پایا [۱۹](BEE) را یافت و ثابت کرد که BEE بهتر از برآوردگر درستنمایی ماکزیمم[۲۰] و بهترین برآوردگر خطی نااریب[۲۱] (BLUE) است. مارچاند و جیری (۱۹۹۳) کلاسی از برآوردگرهای از نوع جیمز ـ استاین را در نظر گرفته و نتایج را برای توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی[۲۲] تعمیم دادند.

فودینیر و اوسو [۲۳](۲۰۰۰)، توزیع کروی[۲۴] معمولی وقتی که مشاهدات به شکل (X, U) و دارای توزیع متقارن کروی[۲۵] حول بردار $(\theta, 0)$ بودند را در حالت θ محدودشده مورد بررسی قرار دادند. در ادامه، وان[۲۶] و همکاران (۲۰۰۰) برآوردگرهای مینیماکس[۲۷] و گاما-مینیماکس[۲۸] در توزیع پواسن، وقتی که فضای پارامتر به فاصله $\theta \in [0, \beta]$ متعلق است را بدست آوردند. همچنین اوسو و استرادرمان (۲۰۰۲) توزیع متقارن کروی را با محدودیت روی مخروط‌ها مورد بررسی قرار دادند و در همین راستا فودینیر و همکاران (۲۰۰۳a) در توزیع متقارن کروی با در نظر گرفتن سه محدودیت بر روی فضای پارامتر مطالعات را ادامه دادند.

در زمینه مدل‌های محدودشده، مارچاند و استرادرمان (۲۰۰۵) برای خانواده مکان با در نظر گرفتن محدودیتی به صورت $\theta > a$ کار را ادامه دادند. همچنین مارچاند و پرون (۲۰۰۵) نتایج را برای

[۱۶] Kariya
[۱۷] Perron and Giri
[۱۸] Marchand
[۱۹] Best Equivariant Estimator
[۲۰] Maximum Likelihood Estimator
[۲۱] Best Linear Unbiased Estimator
[۲۲] Scale mixture of normal distribution
[۲۳] Fourdrinier and Ouassou
[۲۴] Spherical distribution
[۲۵] Spherically symmetri distribution
[۲۶] Wan
[۲۷] Minimax
[۲۸] Γ-minimax

توزیع‌های متقارن کروی تحت محدودیت

$$\Theta(m) = \{\theta \in \mathbb{R}^p : \|\theta\| \leq m : \quad m > 0\}.$$

بدست آوردند. مارچاند و پارسیان (۲۰۰۶)، محدودیت به شکل $\theta \in [0, m]$ را برای کلاس وسیعی از مدل‌های گسسته در نظر گرفتند. در ادامه فودینیر و همکاران (۲۰۰۶) و فودینیر و مارچاند (۲۰۱۰) برای توزیع‌های متقارن کروی، پارامتر مکان را با نوع دیگری از محدودیت‌ها برآورد نمودند.

در توزیع نرمال چندمتغیره[۲۹]، زین‌الدینی (۱۳۸۸) ابتدا به برآورد میانگین در حالت‌هایی که ماتریس کوواریانس معلوم یا مجهول می‌باشد از دیدگاه نظریه تصمیم پرداخت و سپس برآورد میانگین توزیع‌های غیرنرمال و نرمال آمیخته مقیاسی تحت تابع زیان درجه دوم را مورد بررسی قرار داد.

اخیراً مارچاند و استرادرمان (۲۰۱۲) رهیافت واحدی را برای برآورد مینیماکس در فضای پارامتر محدودشده ارائه داده‌اند. در نهایت کورتبی[۳۰] و مارچاند (۲۰۱۲) برآوردگر خطی بریده‌شده[۳۱] با محدودیت $\|\theta\| < m$ در توزیع نرمال چندمتغیره را ارائه کرده و رفتار آن را مورد بررسی قرار دادند.

در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم که جامعه مورد بررسی دارای توزیع متقارن کروی است. در این راستا بردار پارامتر p بعدی $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$، وقتی که مشاهدات به صورت (X, U)، که در آن بعد X برابر با p و بعد U برابر با k بوده را در نظر می‌گیریم. به عبارتی (X, U) دارای توزیع متقارن کروی حول $(\theta, 0)$ است. سپس پارامتر θ را تحت محدودیت‌های مختلف برآورد کرده و برآوردگرهایی از نوع انقباضی ارائه می‌دهیم.

[۲۹] Multivariate normal distribution
[۳۰] Kortbi
[۳۱] Truncated linear estimtor

۲.۱ تعاریف

در این بخش تعاریف اساسی که در طول این مجموعه از آن‌ها استفاده می‌شود را می‌آوریم.

۱.۲.۱ تعاریف و توابع ریاضی

برای اطلاع دقیقتر از تعاریف و قضایای این بخش می‌توان به رودین[۳۲] (۱۳۷۳)، میرهد[۳۳] (۱۹۸۲)، لهمن و کسلا[۳۴] (۱۹۹۸)، مدقالچی (۱۳۸۴)، بوید و واندربرگ[۳۵] (۲۰۰۹)، گات [۳۶](۲۰۰۵)، آرشی (۱۳۸۷) و راس[۳۷](۲۰۱۰) مراجعه کرد.

تعریف ۱.۲.۱. تابع گاما[۳۸]

تابع گاما را به ازای هر عدد حقیقی $\alpha > 0$ با نماد $\Gamma(\alpha)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx.$$

تعریف ۲.۲.۱. تابع بتا[۳۹]

تابع بتا را به ازای اعداد حقیقی $p, k > 0$ با نماد $\mathbf{B}(p,k)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{B}(p,k) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{k-1}dx.$$

لازم به ذکر است که بین تابع بتا و تابع گاما رابطه زیر برقرار است.

$$\mathbf{B}(p,k) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)}.$$

---

[۳۲] Rudin
[۳۳] Muirhead
[۳۴] Lehmann and Casella
[۳۵] Boyd and Vandenberghe
[۳۶] Gut
[۳۷] Ross
[۳۸] Gamma function
[۳۹] Beta function

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه محدب[۴۰]

مجموعه C محدب است، اگر پاره خط بین هر دو نقطه دلخواه در C، درون C قرار گیرد. به عبارتی به ازای هر x_1 و x_2 عضو C و به ازای هر θ ثابت، با شرط $0 \leq \theta \leq 1$، داشته باشیم

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C.$$

تعریف ۴.۲.۱. تابع محدب[۴۱]

تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدب است، اگر دامنه f یک مجموعه محدب باشد و به ازای هر X, Y عضو دامنه f و $0 \leq \theta \leq 1$ داشته باشیم

$$f(\theta X + (1-\theta)Y) \leq \theta f(X) + (1-\theta) f(Y).$$

تابع $f(\cdot)$ را مقعر [۴۲] گوییم اگر $(-f(\cdot))$ محدب باشد.

تعریف ۵.۲.۱. مخروط[۴۳]

مجموعه C مخروط است، اگر به ازای هر x عضو مجموعه C و $\theta \geq 0$، θx عضو C باشد.

تعریف ۶.۲.۱. مخروط محدب[۴۴]

مجموعه C را مخروط محدب گوییم، اگر هم محدب و هم مخروط باشد. به عبارت دیگر به ازای هر x_1 و x_2 عضو مجموعه C و $\theta_1, \theta_2 \geq 0$، $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$ عضو C باشد.

تعریف ۷.۲.۱. مخروط مثبت[۴۵]

مخروط C در $\mathbb{R}^p$ را مخروط مثبت گویند، اگر

۱. به ازای هر $X \in C$ و $\theta \geq 0$. آن‌گاه $\theta X \in C$.

۲. اگر $X_1, X_2 \in C$، آن‌گاه $X_1 + X_2 \in C$،

۳. اگر $X \in C$ و $-X \in C$ ، آن‌گاه $X = 0$.

[۴۰] Convex set
[۴۱] Convex function
[۴۲] Concave function
[۴۳] Cone
[۴۴] Convex cone
[۴۵] Positive cone

تعریف ۱.۲.۸. نرم[۴۶]

تابع $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ را نرم گوییم، اگر

۱. $f(\cdot)$ تابعی نامنفی باشد، یعنی به ازای هر $X \in \mathbb{R}^p$ داشته باشیم، $f(X) \geq ۰$.

۲. $f(\cdot)$ معین[۴۷] باشد، یعنی $f(X) = ۰$ اگر و تنها اگر $X = 0$.

۳. $f(\cdot)$ همگن[۴۸] باشد، یعنی به ازای هر $X \in \mathbb{R}^p$ و $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم، $f(tX) = |t| f(X)$.

۴. $f(\cdot)$ در نامساوی مثلثی[۴۹] صدق کند، یعنی به ازای هر $X, Y \in \mathbb{R}^p$ داشته باشیم

$$f(X+Y) \leq f(X) + f(Y).$$

در این صورت از نماد $f(\cdot) = \|\cdot\|$ برای نمایش نرم استفاده می‌کنیم.

نکته ۱.۲.۹. (بوید و واندربرگ ، ۲۰۰۹) فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم دلخواه روی $\mathbb{R}^p$ باشد. مخروط مرتبط با نرم $\|\cdot\|$، مجموعه

$$C = \{(X,t) | \|X\| \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^{p+۱},$$

است که محدب می‌باشد (شکل ۱.۱ را ببینید).

تعریف ۱.۲.۱۰. نرم اقلیدسی[۵۰]

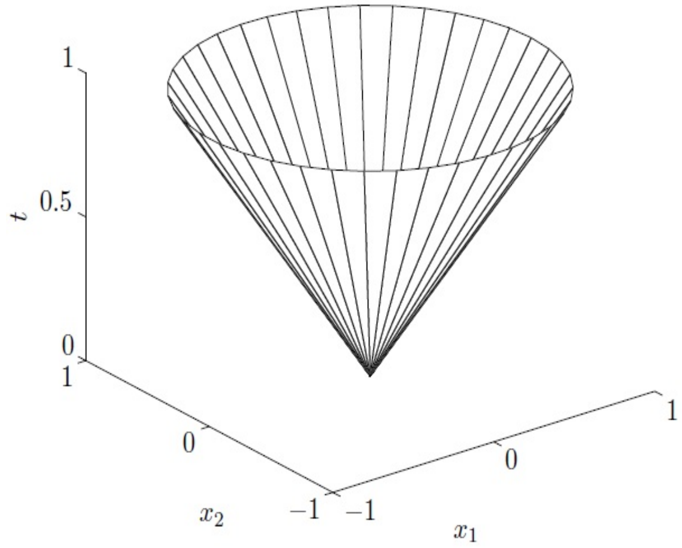
$\|X\|$ را روی بردار $X = (X_۱, \ldots, X_p) \in \mathbb{R}^p$ نرم اقلیدسی گوییم هرگاه

$$\|X\| = (X^T X)^{\frac{۱}{۲}} = (\sum_{i=۱}^{p} X_i^۲)^{۱/۲}.$$

نکته ۱.۲.۱۱. (بوید و واندربرگ، ۲۰۰۹) نرم اقلیدسی یک نرم اکیداً محدب است.

در این پایان‌نامه هر جا سخن از نرم در میان باشد، منظور نرم اقلیدسی است.

---
[۴۶] Norm
[۴۷] Definite
[۴۸] Homogeneous
[۴۹] Triangle inequality
[۵۰] Euclidean norm



شکل ۱.۱: کران مخروط مرتبه دوم در $\mathbb{R}^۳$، $\{(x_۱, x_۲, t)|(x_۱^۲ + x_۲^۲)^{۱/۲} \leq t\}$.

تعریف ۱۲.۲.۱. گوی[۵۱](گوی باز)

فرض کنید X و θ عضو $\mathbb{R}^p$ باشند. به ازای $\rho > ۰$ مجموعه

$$B_{\theta,\rho} = \{X|\|X - \theta\| < \rho\},$$

را یک گوی باز به مرکز θ و شعاع ρ می‌نامیم. به همین ترتیب

$$B_{[\theta,\rho]} = \{X|\|X - \theta\| \leq \rho\},$$

را یک گوی بسته[۵۲] به مرکز θ و شعاع ρ می‌نامیم.

نکته ۱۳.۲.۱. (رودین، ۱۳۷۳) فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم دلخواه روی $\mathbb{R}^p$ باشد. بنابه خواص کلی نرم‌ها می‌توان نشان داد که یک گوی به شعاع ρ و مرکز θ ($\{X|\|X - \theta\| \leq \rho\}$)، مجموعه‌ای محدب است.

تعریف ۱۴.۲.۱. کره[۵۳]

فرض کنید X و θ عضو $\mathbb{R}^p$ باشند. به ازای $\rho > ۰$ مجموعه

$$S_{\theta,\rho} = \{X|\|X - \theta\| = \rho\},$$

[۵۱] Open ball
[۵۲] Closed ball
[۵۳] Sphere

را یک کره به مرکز θ و شعاع ρ می‌نامیم. به عبارت دیگر کره عبارت است از مجموعه نقاط در $\mathbb{R}^p$ به طوری که نرم آن‌ها از یک نقطه ثابت مانند $\theta \in \mathbb{R}^p$ برابر ρ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۵. نقطه درونی مجموعه[۵۴]

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^p$. نقطه $\theta \in X$ را یک نقطه درونی مجموعه X می‌نامیم در صورتی که گوی بازی مانند $B_{\theta,\rho}$ وجود داشته باشد به طوری که جزء X باشد. به عبارت دیگر

$$\forall\ \theta \in X \ \ \exists \ \ \ B_{\theta,\rho} \subseteq X.$$

تعریف ۱.۲.۱۶. نقطه انباشتگی مجموعه[۵۵](نقطه حدی مجموعه)

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^p$. نقطه $\theta \in \mathbb{R}^p$ را یک نقطه انباشتگی X می‌نامیم در صورتی که هر گوی باز به مرکز θ شامل نقطه‌ای از X غیر از θ باشد. به عبارت دیگر

$$\forall \ \ \theta \in \mathbb{R}^p, \ \ \forall \ \ \ \Big(B_{\theta,\rho} - \{\theta\}\Big) \cap X \neq \varnothing.$$

تعریف ۱.۲.۱۷. مجموعه باز[۵۶]

مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^p$ را باز می‌نامیم در صورتی که هر نقطه آن درونی باشد و X را بسته[۵۷] می‌نامیم در صورتی که $\mathbb{R}^p - X$ باز باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. فاصله یک نقطه از مجموعه بسته[۵۸]

فاصله نقطه $X_\circ \in \mathbb{R}^p$ از مجموعه بسته $C \subseteq \mathbb{R}^p$، با نرم $\|\cdot\|$ را با $\mathrm{dist}(X_\circ, C)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{dist}(X_\circ, C) = \inf\{\|X_\circ - X\| | X \in C\}.$$

این مقدار اینفیمم همواره موجود است (بوید و واندربرگ، ۲۰۰۹).

[۵۴] Interior point of a set
[۵۵] Accumulation point of a set
[۵۶] Open set
[۵۷] Closed set
[۵۸] Distance of a point from a closed set