نزدیک‌تر به خدا
می‌توان به جاودانگی رسید[1]

سرایزاک نیوتون

[1] Nearer the God no mortal may approach

دانشکده‌ی علوم - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در
رشته ریاضی (گرایش آنالیز)

عنوان:

نامساوی‌های شبه تغییراتی برداری با نگاشت‌های $\alpha - \eta$ شبه یکنوای آرمیده در فضاهای باناخ

استاد راهنما:
دکترخیر ا... پوربرات

پژوهشگر:
مالک عباسی

بهار ۸۸

چکیده

در این پایان نامه، به گردآوری انواعِ توسعه یافته‌ای از نابرابری‌های تغییراتی اعم از نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\alpha - \eta$ شبه یکنوای آرمیده، نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\alpha - \eta$ نیمه شبه یکنوای آرمیده، نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\alpha - \eta$ نیمه یکنوای آرمیده و... در فضاهای باناخ پرداخته می‌شود. با بکارگیری تکنیک KKM و قضیه‌های نقطه‌ی ثابت، ویژه‌ی نگاشت‌های مجموعه — مقدار، نتایجی در خصوص حلپذیری این قِسم از نابرابری‌ها در فضاهای باناخ، به‌ویژه فضاهای باناخ بازتابی، حاصل می‌گردد. در نهایت، دستگاهی از نابرابری‌های تغییراتی بر مبنای نتایج بدست آمده معرفی و حلپذیری آن بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: نابرابری‌های شبه تغییراتی برداری، نگاشت‌های $\alpha - \eta$ شبه یکنوا، نگاشت‌های $\alpha - \eta$ نیمه شبه یکنوا، نگاشت KKM، قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت، تابع $\eta-$ بازگشتی.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نابرابری‌های تغییراتی [۲] برداری نخستین بار توسط جیانسی(Giannessi) (۱۹۸۰) در مجموعه‌ی فضاهای اُقلیدسی متناهی بُعد معرفی و مطالعه شدند. در سال ۱۹۹۰ چن(Chen) و یانگ(Yang) نابرابری‌های تغییراتی برداری کلی و مسائل تکمیلی برداری را در فضاهای نامتناهی بُعد مطالعه نمودند. به‌تازگی، بسیاری از نتایجی که پاسخ پذیری انواعی از نابرابری‌های تغییراتی برداری را بررسی می‌نماید استخراج شده و نابرابری‌های تغییراتی جایگاه ویژه‌ای را در شاخه‌هایی از ریاضیات از قبیلِ بهینه سازی برداری، بهینه سازی مجموعه مقداری، آنالیز تقریبِ مسائلِ بهینه سازی برداری و مسائل توازن شبکه — برداری به خود اختصاص داده است. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مرجع‌های [۳] ، [۱۱] و [۱۲] مراجعه کرد.

به‌خوبی می‌دانیم که یکنوایی نقش مهمی را در مطالعه‌ی نابرابری‌های تغییراتی برداری و همچنین نابرابری‌های برداری ایفا می‌کند. در سالهای اخیر، تعمیم‌های بسیار مهمی از یکنوایی از قبیلِ یکنوایی آرمیده [۳]، $p-$ یکنوایی [۴]، شبه یکنوایی [۵]، نیمه یکنوایی [۶] و شبه یکنوایی چگال [۷] و غیره به منظور مطالعه‌ی رده‌های گسترده‌ای از نابرابری‌های تغییراتی و مسائل مقدماتی معرفی شده است. بحث کلّی تر را می‌توان در مرجع‌های [۱] تا [۵]، [۷] تا [۹]، [۱۱] تا [۱۹] و [۲۳]

[۲] Variational Inequalities

[۳] Relaxed Monotonicity

[۴] p-monotonicity

[۵] Pseudomonotonicity

[۶] Demimonotonicity

[۷] Dense Pseudomonotonicity

تا [۲۷] یافت. در سال ۱۹۹۹، چن(Chen) با بکارگیری ترکیبی از فشردگی و یکنوایی به معرفی مفهوم نیمه یکنوایی[8] پرداخت و نابرابری‌های تغییراتی به‌اصطلاح اسکالر نیمه یکنوا را در فضاهای باناخ مطالعه نمود. فانگ(Fang) و هیونگ(Huang) مفهوم جدید $\eta - \alpha$ یکنوایی آرمیده[9] را معرفی و قضیه‌هایی را در خصوص وجود پاسخ برای نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\eta - \alpha$ یکنوای آرمیده و در فضاهای باناخ بازتابی استخراج کردند. اخیراً، بای(Bai)، زوو(Zhou) و نی(Ni) مفهوم جدید $\eta - \alpha$ شبه یکنوایی آرمیده[10] را معرفی و نتایجی را در خصوص وجود پاسخ برای نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\eta - \alpha$ شبه یکنوای آرمیده و در فضاهای باناخ بازتابی با بکارگیری تکنیک KKM بدست آوردند.

دراین پایان نامه، باالهام گرفتن از کارهایی که در بالا ذکر شد، مفاهیم $\eta - \alpha$ شبه یکنوایی آرمیده و $\eta - \alpha$ نیمه شبه یکنوایی آرمیده و غیره به همراه رده‌هایی از نابرابری‌های شبه تغییراتی برداری با نگاشت‌های $\eta - \alpha$ شبه یکنوا و نگاشت‌های $\eta - \alpha$ نیمه شبه یکنوای آرمیده در فضاهای باناخ معرفی می‌شود. با بکارگیری تکنیک KKM، نتایجی در خصوص وجود پاسخ برای نابرابری‌های شبه تغییراتی برداری با نگاشت‌های $\eta - \alpha$ شبه یکنوای آرمیده در فضاهای باناخ بازتابی گرفته می‌شود. سپس با بکارگیری قضیه‌ی نقطه ثابت **کاکوتانی — فن — گلیکسبرگ**[11] حلپذیری نابرابری‌های شبه تغییراتی برداری با نگاشت‌های $\eta - \alpha$ نیمه شبه یکنوا در فضاهای باناخ بازتابی بدست می‌آید. افزون بر این‌ها، به منظور مطالعه‌ی جامع‌تر، دستگاه‌های نابرابری‌های تغییراتی نیز معرفی و مطالعه می‌شود. نتایجی که در این پایان نامه بدست می‌آید، برخی از نتایج متناظر کارهای پیشین در این زمینه را توسعه و بهبود می‌بخشد.

این پایان نامه شامل ۵ فصل است. در فصل اوّل، برخی مفاهیم اوّلیه و ضروری مورد نیاز درسایر فصول داده می‌شود. مطالبِ این فصل بر اساس مرجع‌های [٦] و [۲۰] می‌باشد.

در فصل دوّم، نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\eta - \alpha$ شبه یکنوای آرمیده در

---

[8] Semimonotonicity

[9] Relaxed $\eta - \alpha$ monotonicity

[10] Relaxed Pseudomonotonicity

[11] Kakutani-Fan-Glicksberg

فضاهای باناخ مطالعه می‌شود. در واقع با بیانی خالی از دقّت، هدف یافتنِ $x \in K$ است طوری که

$$\langle Tx, \eta(y,x)\rangle \not< 0, \quad \forall y \in K.$$

در اینجا، K زیر مجموعه‌ایست از یک فضای باناخ X و $T : K \to L(X,Y)$، نگاشتی است که $\alpha - \eta$ شبه یکنوای آرمیده[۱۲] خوانده می‌شود.

در فصل سوّم نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های $\alpha - \eta$ نیمه شبه یکنوای آرمیده در فضاهای باناخ بازتابی معرفی می‌شود. در این فصل، هدف یافتنِ آن $x \in K$ است آنچنان که

$$\langle A(x,x), \eta(y,x)\rangle \not< 0, \quad \forall y \in K.$$

در اینجا، K زیر مجموعه‌ایست از یک فضای باناخ بازتابی X و $A : K \times K \to L(X,Y)$، نگاشتی است که $\alpha - \eta$ نیمه شبه یکنوای آرمیده[۱۳] خوانده می‌شود. مطالب فصل های ۳ و ۲، تماماً بر اساس مرجع [۲۸] می‌باشد.

در فصل چهارم نابرابری‌های شبه تغییراتی با نگاشت‌های توسعه یافته‌ی $\alpha - \eta$ یکنوای آرمیده[۱۴] در فضاهای باناخ بازتابی و نگاشت‌های توسعه یافته‌ی $\alpha - \eta$ نیمه یکنوای آرمیده[۱۵] در فضاهای باناخ دلخواه مطالعه می‌شود. موضوع از این قرار است که K زیر مجموعه‌ای از یک فضای باناخ X و $T : K \to L(X,Y)$ و $A : K \times K \to L(X,Y)$ نگاشت‌هایی هستند که به ترتیب $\alpha - \eta$ یکنوای آرمیده و $\alpha - \eta$ نیمه یکنوای آرمیده خوانده می‌شود و هدف یافتنِ $x \in K$ است طوری که

$$\langle Tx, \eta(y,x)\rangle + f(y) - f(x) \geq 0, \quad \forall y \in K, \tag{۱}$$

و

$$\langle A(x,x), \eta(y,x)\rangle + f(y) - f(x) \geq 0, \quad \forall y \in K. \tag{۲}$$

---

[۱۲] Relaxed $\eta - \alpha$ Pseudomonotone

[۱۳] Relaxed $\eta - \alpha$ Demipseudomonotone

[۱۴] Generalized Relaxed $\eta - \alpha$ Monotone Mappings

[۱۵] Generalized Relaxed $\eta - \alpha$ Semimonotone Mappings

برقرار باشد. در مسئله‌ی (۱)، X یک فضای باناخ بازتابی و در مسئله‌ی (۲)، X یک فضای باناخ دلخواه می‌باشد. مطالب این فصل از مرجعِ [۸] اقتباس شده است.

در فصل پنجم، با در نظر گرفتنِ نتایجِ بدست آمده، اَقسامی از دستگاهِ نابرابری‌های شبه تغییراتی معرفی و مطالعه می‌شود. عنوانِ افزودگی‌ها بر این فصل حکایت از آن دارد که مطالبِ گردآوری شده در این فصل صرفاً به وسیله‌ی مؤلف بوده و به منظور توسیع نتایجِ بدست آمده در فصل‌های گذشته و ارائه‌ی تکنیکی برای تولید نتایج گسترده تر در قلمرو مورد بحث می‌باشد.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضیه‌ها و یا لم‌های مورد نیاز در سایر فصول می‌پردازیم. در بخش اوّل مخروط‌ها را معرفی می‌کنیم. در بخش دوّم نگاشت‌های مجموعه — مقدار را معرفی کرده و مفهوم پیوستگی آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش سوّم به یاری مخروط‌ها فضاهای باناخ مرتب را توصیف نموده و با استفاده از آن مفهوم تحدب را از توابع به نگاشت‌ها گسترش می‌دهیم. در بخش چهارم نگاشت‌های KKM را به همراه قضیه‌ای که برجسته ترین ویژگی‌شان را به تصویر می‌کشد ارائه می‌دهیم. در آخرین بخش چند قضیه‌ی مشهور در آنالیز تابعی که راه را برای تشریح مباحث اصلی هموار می‌سازد بیان می‌کنیم.

۱.۱ مخروط‌ها

در این قسمت تعاریف و خاصیت‌های اوّلیه‌ی مخروط‌ها، به‌ویژه مخروط‌های محدب را بیان می‌کنیم. مخروط‌ها موجوداتی با خصوصیات دلپذیر در ریاضیات پیشرفته‌اند که در بیشتر تعمیم‌ها حضور دارند. خواهیم دید که مخروط‌های محدب، طبیعی ترین راه را برای تعمیم نابرابری‌های تغییراتی به فضاهای پیشرفته‌تر نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱ زیرمجموعه‌ی K از فضای برداری حقیقی V، **محدب** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $u, v \in K$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم $\lambda u + (1-\lambda)v \in K$. یعنی برای هر دو نقطه‌ی u, v عضو K، پاره‌خط واصل بین آن‌ها نیز در K قرار گیرد.

یادآوری می‌کنیم که اگر K یک زیر مجموعه‌ی محدب از فضای نُرم‌دار V باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $int(K)$ و $\bar{K}$ نیز محدب است که $int(K)$ درون K و $\bar{K}$ بستار K می‌باشد.

تعریف ۲.۱ زیرمجموعه‌ی ناتهی C از فضای باناخ حقیقی B را **مخروط** نامیم هرگاه برای هر $\alpha \geq 0$ اگر $p \in C$، آن‌گاه $\alpha p \in C$.

تعریف ۳.۱ مجموعه‌ی $\{\alpha\Gamma + \beta : \alpha \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ با $\Gamma \neq 0$ یک نیم‌خط تعریف می‌کند که یک **راه**، در جهت ناصفر $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ی β نامیده می‌شود.

برای مثال اجتماع دو ربع دایره‌ی مخالف(مثلاً ربع اول و چهارم)، مجموعه‌ی $C = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\right\}$، زیرفضاها، راه‌ها و... مخروط هستند.

همه‌ی مخروط‌ها شامل مبدأ و بی‌کران هستند البته به‌جز مخروط بدیهی صفر. امّا مخروط‌ها همواره محدب نیستند. مجموعه‌ی $C = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\right\}$ مخروطی نامحدب در $\mathbb{R}^2$ است. گزاره‌ی زیر تعریف معادلی برای مخروط محدب در یک فضای باناخ حقیقی بدست می‌دهد.

گزاره ۴.۱ زیرمجموعه‌ی ناتهی C یک مخروط محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in C$ و هر $\lambda, \mu \geq 0$ داشته‌باشیم

$$\lambda x + \mu y \in C.$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم C یک مخروط محدب باشد. $x, y \in C$ و $\lambda, \mu \geq 0$. اگر $\lambda + \mu = 0$، آن‌گاه $\lambda = \mu = 0$ و به‌وضوح $\lambda x + \mu y \in C$. همچنین چون C محدب است اگر $\lambda + \mu > 0$،

آن‌گاه $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, y \in C$. بنابراین

$$\lambda x + \mu y = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, x + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, y\right) \in C$$

زیرا C مخروط است.

به‌عکس، فرض کنیم برای هر $x, y \in C$ و $\lambda, \mu \geq 0$ داشته باشیم $\lambda x + \mu y \in C$. بدیهی است که C محدب است. برای نشان دادن این‌که مخروط محدب است فرض کنیم $x \in C$ و $\lambda \geq 0$، در این صورت بنابر فرض $\lambda x = \lambda x + 0 y \in C$. $\square$

نتیجه ۵.۱ زیرمجموعه‌ی ناتهی C از B یک مخروط محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in C$ و هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $x + y \in C$ و $\lambda x \in C$.

برهان. بی‌درنگ از گزاره قبل نتیجه می‌شود. $\square$

فضای V و هر زیرفضای خطی V(شامل زیرفضای بدیهی $\{0\}$) مخروط‌های محدب هستند. یک مثال کلی‌تر از مخروط‌های محدب، مجموعه‌ی زیر است

$$\{\lambda x : \lambda \geq 0, x \in X\},$$

که X یک زیرمجموعه‌ی محدب از V است.

قضیه ۶.۱ اشتراک یک مجموعه دلخواه از مخروط‌های محدب، یک مخروط محدب است. به عبارت دیگر مخروط‌های محدب تحت اشتراک بسته هستند.

البته مخروط‌های محدب لزوماً تحت اجتماع بسته نیستند. به عنوان مثال مجموعه‌های $\left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\right\}$ و $\left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \leq 0\right\}$ مخروط‌های محدب هستند در صورتی‌که اجتماع آن‌ها یعنی مجموعه $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\right\}$ یک مخروط محدب نیست.

تعریف ۷.۱ یک مخروط محدب C، نوک‌دار است، هرگاه شامل هیچ خطی نباشد. به طور معادل C نوک‌دار نیست هرگاه مسیر ناصفر $\Gamma \in \bar{C}$ موجود باشد به طوری که $-\Gamma \in \bar{C}$. به‌سادگی می‌توان اثبات کرد که مخروط C نوک‌دار است اگر و فقط اگر $\overline{C} \bigcap \left\{-\overline{C}\right\} = \{0\}$.

لم ۸.۱ اگر K مخروطی در فضای نُرم‌دار V باشد و $u \in intK$، آن‌گاه $tu \in intK$ برای هر $t > 0$.

برهان. از $u \in intK$ نتیجه می‌شود که $\epsilon > 0$ وجود دارد آنچنان که $B_\epsilon(u) \subset K$، که $B_\epsilon(u)$ گوی باز به مرکز u و شعاع ϵ در فضای V می‌باشد. در این صورت $tB_\epsilon(u) \subset tK$. از این‌که K یک مخروط و $t > 0$ نتیجه می‌شود $tK \subset K$ که در ادغام با نتیجه‌ی پیشین می‌شود $tB_\epsilon(u) \subset K$. به‌سادگی می‌توان اثبات کرد $tB_\epsilon(u) = B_{t\epsilon}(tu)$. حالا با قرار دادن $\delta = t\epsilon$ روشن می‌شود که اولاً $\delta > 0$ و ثانیاً $B_\delta(tu) \subset K$. این برهان را کامل می‌کند. $\square$

۲.۱ نگاشت‌های مجموعه — مقدار

دراین بخش نگاشت‌هایی را معرفی می‌کنیم که به ازای هر عضو از فضای دامنه، زیرمجموعه‌ای از فضای دیگری را نظیر می‌کند. این دسته از نگاشت‌ها را نگاشت‌های مجموعه — مقدار می‌نامند. در سراسر این بخش فرض می‌کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی باشد.

- اولین مثال طبیعی که در آن از نگاشت مجموعه — مقدار استفاده می‌شود، معکوس f^{-1} از یک نگاشت تک — مقداری f، از X به Y است. همیشه می‌توانیم f^{-1} را به‌عنوان یک نگاشت مجموعه — مقدار معرفی کنیم به طوری که به هر مقدار y مجموعه جواب $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ (حتی ممکن است تهی باشد!) را نسبت می‌دهد.

- نگاشت $G : \mathbb{R}^+ \to 2^{\mathbb{R}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$G(r) = B_r(0)$$

که $B_r(0)$ گوی باز در$\mathbb{R}$ به شعاع r و به مرکز 0 است. می‌توان این وضعیت را تعمیم داد. در واقع اگر (M, d) یک فضای متریک باشد آن‌گاه نگاشت $G_s : \mathbb{R}^+ \to 2^M$ با تعریف

زیر یک نگاشت مجموعه مقدار است:

$$G_s(r) = B_r(s)$$

که $B_r(s)$ گوی باز در M به شعاع r و به مرکز s است و $s \in M$ پارامتر است.

مثال‌های بیشتر را به فصل‌های بعد موکول می‌کنیم. حال تعاریف اساسی نگاشت‌های مجموعه — مقدار را بیان می‌کنیم.

تعریف ۹.۱ یک نگاشت مجموعه — مقدار F از X به Y، به‌وسیله‌ی گرافش، که زیرمجموعه‌ی فضای حاصلضرب $X \times Y$ است، مشخص می‌شود. **گراف** F عبارت است از

$$GraphF = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

$F(x)$ را تصویر یا مقدار F در x می‌نامیم.

فرض کنیم $F : X \longrightarrow 2^Y$ یک تابع مجموعه — مقدار باشد و $\emptyset \neq M \subset Y$. برای مجموعه‌ی M تحت F تصویر وارو ن را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$F^{-1}(M) = \{x \in X \mid F(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

تعریف ۱۰.۱ فرض کنیم $F : X \longrightarrow 2^Y$ یک نگاشت مجموعه — مقدار باشد.

(الف) F در $x_0 \in DomF$ **نیم پیوسته‌ی بالایی** $(u.s.c)$ است، اگر برای هر همسایگی باز شامل $F(x_0)$ مثل $N(F(x_0))$، همسایگی باز $N(x_0)$ از x_0 موجود باشد به طوری که برای هر x عضو $N(x_0)$، $F(x) \subset N(F(x_0))$. گوییم F نیم پیوسته‌ی بالایی است، اگر در هر نقطه از $DomF$ نیم پیوسته‌ی بالایی باشد.

(ب) F در $x_0 \in X$ **نیم پیوسته‌ی پایینی** $(l.s.c)$ است، اگر برای هر تور $\{x_\gamma\} \subset X$ که $x_\gamma \longrightarrow x_0$ و $y_0 \in F(x_0)$، تور $\{y_\gamma\}$ با $y_\gamma \in F(x_\gamma)$ موجود باشد به طوری که

$y_\gamma \longrightarrow y_0$. گوییم F نیم‌پیوسته‌ی پایینی است، اگر در هر نقطه از $DomF$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی باشد.

(پ) F در $x_0 \in X$ **پیوسته** است، هرگاه در x_0، $u.s.c$ و $l.s.c$ باشد. اگر F در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، آن‌گاه گوییم F پیوسته است.

قضیه ۱۱.۱ فرض کنیم X, Y دو فضای توپولوژیکی و نگاشت $T : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ مجموعه – مقدار باشد. اگر فضای Y فشرده و $GraphT$ بسته باشد، آن‌گاه نگاشت T، نیم پیوسته بالایی است.

برهان. برای اثبات به [۲۲] مراجعه کنید. □

۳.۱ فضاهای مرتب باناخ

در این قسمت با استفاده از مفهوم مخروط‌ها فضاهای مرتب خطی را تعریف کرده و مفهوم تحدب را از توابع به نگاشت‌ها گسترش می‌دهیم. اضافه می‌کنیم که یک نگاشت لزوماً حقیقی مقدار نیست. فرض کنیم K یک مخروط با درون ناتهی باشد. در این صورت روابط «$\geq$»، «$\ngeq$»، «$>$» و «$\ngtr$» را چنین تعریف می‌کنیم:

$$x \geq y \iff x - y \in K$$

$$x \ngeq y \iff x - y \notin K$$

$$x > y \iff x - y \in intK$$

$$x \ngtr y \iff x - y \notin intK.$$

به‌سادگی می‌توان بررسی نمود که درهر یک از روابط بالا با قرار دادن $\mathbb{R}^+$ به‌جای مخروط K نامساوی‌های معمولی در $\mathbb{R}$ بدست می آید که

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

حال اگر D کوچک‌ترین فضای باناخ باشد (نسبت به رابطه‌ی شمول) که شامل مخروط K است، آن‌گاه دوتائی $(D, \geq)$ **فضای باناخ القا شده** توسط K نامیده می‌شود.

تذکر ۱۲.۱ اگر K یک مخروط محدب در فضای باناخ D باشد آن‌گاه رابطه‌ی $\geq$ دارای خاصیت تعدی است.

در واقع اگر برای $a, b, c \in D$ داشته باشیم $a \geq b$ و $b \geq c$ آن‌گاه طبق تعریف $a - b \in K$ و $b - c \in K$. بنا بر نتیجه‌ی ۵.۱ باید داشته باشیم $(a - b) + (b - c) \in K$ که نتیجه می‌شود $a \geq c$ و خاصیت تعدی اثبات می‌شود.

تذکر ۱۳.۱ اگر K یک مخروط بسته در فضای باناخ D باشد و $A, B : \mathbb{R} \to D$ توابعی باشد که برای هر t در یک همسایگی از t_0، $A(t) \geq B(t)$ و هر دو در $t = t_0$ حد داشته باشد، آن‌گاه

$$lim_{t \to t_0} A(t) \geq lim_{t \to t_0} B(t).$$

در واقع برای هر t در این همسایگی داریم $A(t) - B(t) \in K$. حال از بسته بودن K نتیجه‌ی مطلوب سریعاً بدست می‌آید. البته می‌توان این نتیجه را برای هر فضای توپولوژیکی دیگری به‌جای $\mathbb{R}$ نیز بیان نمود.

لم ۱۴.۱ فرض کنیم $(D, \geq)$ یک فضای باناخ القا شده توسط مخروط محدب K با $intK \neq \emptyset$ باشد. در این صورت برای هر $a, b, c \in D$ گزاره‌های زیر برقرارند:

(الف) اگر $a \not\geq c$ و $a \geq b$ آن‌گاه $b \not\geq c$؛

(ب) اگر $b \geq a$ و $c \ngtr a$ آن‌گاه $c \ngtr b$.

برهان. (الف) فرض کنیم حکم بر قرار نباشد. در این صورت $b - c \in intK$. پس $\epsilon > 0$ هست طوری که $B_\epsilon(b-c) \subset K$. در یک فضای نُرم‌دار می‌توان این رابطه را به شکل زیر نوشت:

$$(b-c) + B_\epsilon(0) \subset K. \qquad (1)$$

از طرفی طبق فرض $a - b \in K$. اکنون با در نظر داشتن رابطه‌ی (۱) و با بکارگیری نتیجه‌ی ۵.۱ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (b-c) \quad & +B_\epsilon(0) + (a-b) \subset K \\ \Longrightarrow \quad & a - c + B_\epsilon(0) \subset K \\ \Longrightarrow \quad & B_\epsilon(a-c) \subset K. \end{aligned}$$

پس $a - c \in intK$ که به تناقض $a > c$ منجر می‌شود. این اثبات (الف) را کامل می‌کند. (ب) اثبات این قسمت کاملاً مشابه با اثبات (الف) است. از بیان آن صرفه‌نظر می‌کنیم. $\square$

این بخش را با تعریف نگاشت‌های محدب پایان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم $(D, \geq)$ یک فضای باناخ مرتب القا شده توسط مخروط K و B یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. نگاشت $f : B \longrightarrow D$ را محدب می نامیم اگر برای هر $x, y \in B$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(x) + t(f(y) - f(x)) \geq f(x + t(y-x)).$$

و آن را اکیداً محدب می‌نامیم اگر نامساوی در بالا اکید باشد.

تصریح می‌کنیم که در سراسر این پایان نامه معانی یکسانی از $a \geq b$ و $b \leq a$ حاصل می‌شود مگر اینکه خلافش تصریح گردد.

۴.۱ نگاشت KKM و قضیه‌های نقطه‌ی ثابت

در این بخش نخست نگاشت‌های KKM را معرفی نموده و قضیه‌ی اساسی این نگاشت‌ها را بیان و آن‌را به کمک قضیه‌ی نقطه ثابت ترافدر (Tarafdar) اثبات می‌کنیم. سپس یکی دیگر از قضایای نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های مجموعه – مقدار که در مباحث بعد استفاده می‌شود را بیان می‌کنیم. این قضیه به قضیه‌ی نقطه ثابت **کاکوتانی – فن – گلیکسبرگ** مشهوراست.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم M یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از یک فضای برداری توپولوژیک X باشد. نگاشت مجموعه – مقدار $G : M \to 2^X$ را یک نگاشت KKM می‌نامیم اگر برای هر مجموعه‌ی متناهی $A \subset M$ داشته باشیم

$$coA \subset \bigcup_{x\in A} G(x),$$

که 2^X خانواده‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های X و coA، غلاف محدب مجموعه‌ی A (اشتراک همه‌ی مجموعه‌های محدب که A را در بر دارند) است.

قضیه ۱۷.۱ فرض کنیم K یک زیر مجموعه‌ی محدب، فشرده و غیرتهی از یک فضای برداری توپولوژیکی X باشد و نگاشت مجموعه – مقدار $T : K \to 2^K$ در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $x \in K$، $T(x)$ زیر مجموعه‌ی محدب و ناتهی K است؛

(ب) برای هر $y \in K$، $T^{-1}(y) = \{x \in K : y \in T(x)\}$ شامل یک مجموعه‌ی باز از K مثل O_y است؛

(پ) $\bigcup\{O_y : y \in K\} = K$.

در این صورت x_0 در K هست طوری که $x_0 \in T(x_0)$. به عبارت دیگر x_0 یک نقطه‌ی ثابت T است.

برهان. برای اثبات به [۲۲] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۸.۱ فرض کنیم M یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از یک فضای برداری توپولوژیک X و $G : M \to ۲^X$ یک نگاشت KKM باشد که شرایط زیر را دارد:

(الف) برای هر $x \in M$، $G(x)$ در توپولوژی X بسته باشد؛

(ب) برای حداقّل یک $x_۰ \in M$، $G(x_۰)$ فشرده باشد.

در این صورت

$$\bigcap_{x\in M} G(x) \neq \emptyset$$

برهان. فرض کنیم برای هر مجموعه‌ی متناهی $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ داشته باشیم $\bigcap_{i=۱}^{n} G(x_i) \neq \emptyset$. حال اگر $\bigcap_{x\in M} G(x) = \emptyset$ آن‌گاه با قرار دادن $F(x) = G(x) \bigcap G(x_۰)$ نتیجه می‌شود $\bigcap_{x\in M} F(x) = \bigcap_{x\in M} G(x) = \emptyset$. به‌وضوح $F(x) \subset G(x_۰)$ برای هر $x \in M$. پس از این‌که $G(x_۰)$ فشرده و هر $G(x)$ بسته است نتیجه می‌شود که هر $F(x)$ در توپولوژی زیرفضایی $G(x_۰)$ بسته است. در این صورت خانواده‌ی $\{F(x) : x \in M\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی نیست و بنابراین $x_۱, x_۲, \ldots, x_m \in M$ وجود دارد آنچنان که $\bigcap_{i=۱}^{m} F(x_i) = \emptyset$. پس

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=۱}^{m} F(x_i) &= \bigcap_{i=۱}^{m} (G(x_i) \bigcap G(x_۰)) \\
&= \{\bigcap_{i=۱}^{m} G(x_i)\} \bigcap G(x_۰) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

پس مجموعه‌ی متناهی $A = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_m, x_۰\}$ بدست می‌آید آنچنان که $\bigcap_{x\in A} G(x) = \emptyset$ که اولین عبارت برهان را نقض می‌کند. بنابراین اگر برای هر مجموعه‌ی متناهی $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ داشته باشیم $\bigcap_{i=۱}^{n} G(x_i) \neq \emptyset$ آن‌گاه حکم اثبات می‌شود. در ادامه این