ّ

[ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ]   [ٰ ُ ِ] [ٰ ُ ِ]

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

پیش دوگان های گروه های نیم گروهی

استاد راهنما:

دکتر حجت اله سامع

پژوهشگر:

مسعود نوروزی

دی ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر فداکار و خانواده مهربانم

تشکر و قدر دانی

تقدیر و تشکر از تمامی انسان‌ها که مزرع اندیشه را سبز می‌خواهند و با سر انگشتان مشتاق خویش افق‌های روشن را نشانه رفته‌اند.

آمدنم را در وادی آگاهی دستی نیرومند هدایتگر شد، هم آمدنم را، هم ماندنم را، هم برخاستنم را، هم رفتنم را، هم او که در لحظه لحظه‌هایم جای دارد.

سپاسم را چگونه در آغوشت رها کنم تا ذره بودنم هویدا نشود. از تو مدد می‌گیرم تا سپاسم را بر تمامی آنانی که گام‌های استوارشان و دست‌های پر از لطفشان تکیه‌گاه خستگی راهم بود، پیشکش کنم.

سپاس و ستایش خود را به پیشگاه پدر و مادر بسیار گرانقدر و عزیزم، یاوران پاک و بی‌ریای همیشگی هستی‌ام که برگ برگ این دفتر ثمره‌ی زحمات آن‌هاست تقدیم می‌نمایم. سرو وجودشان همیشه سبز باد.

ارج می‌نهم زحمات استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکترحجت اله سامع ، که در طول مدت تحصیلم با مساعدت‌ها و راهنمایی‌های ارزشمندشان روشنگر راهم بودند. امید است همیشه در پناه الطاف باری تعالی، شادکام و پیروز باشند.

مسعود نوروزی

دی ماه ۱۳۹۱

چکیده

در این رساله فرض می کنیم S یک نیم گروه گسسته باشد آن گاه پیش دوگان های $\ell^1(S)$ را بررسی می کنیم پس نگاشت های $\Gamma : \ell^1(S) \longrightarrow \ell^1(S \times S)$ و $\Gamma^* : \ell^1(S \times S)^* \longrightarrow \ell^1(S)^*$ بطور ضعیف– ستاره پیوسته می باشد. در ادامه شرایط معین روی S قرار می دهیم که با این شرایط $\ell^1(S)$ تنها یک پیش دوگان دارد، و ثابت می کنیم که اگر S هر یک از نیم گروه‌های $(\mathbb{N}, .)$ یا $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ باشد آن گاه $\ell^1(S)$ ناشمارا پیش دوگان دارد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مباحث اولیه

در این فصل مفاهیم واصطلاحات وقضیه هایی را ارائه می دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل های بعدی می باشند.

تعریف ۱.۰.۱ **نیم گروه** : فرض کنیم S مجموعه نا تهی و $\star$ یک عمل دوتایی باشد. در اینصورت $(S,\star)$ را یک نیم گروه گوییم هرگاه عمل $\star$ روی S شرکت پذیر باشد.

مثال ۲.۰.۱ : $(\mathbb{N},.)$ یک نیم گروه است.

۱.۱ جبر باناخ

تعریف ۱.۱.۱ **فضای باناخ** : فضای نرم‌دار A را فضای باناخ گویند، هرگاه متر القا شده از نرم آن، A را به فضای متریک کامل تبدیل کند.

تعریف ۲.۱.۱ **سرشت نما**[۱] : فرض کنیم A جبر باناخ باشد. در این صورت یک سرشت نما روی A، تابع مختلط مقدار، خطی و ضربی روی A می باشد.مجموعه‌ی سرشت نماهای ناصفر روی A را فضای سرشت نمای A گویند و با نماد $\Omega(A)$ نمایش می دهیم.

مثال ۳.۱.۱

الف) فرض کنید (X, M, μ) فضای اندازه باشد. برای هر $۱ \leq p < \infty$، فضای برداری $L^p(X, \mu)$ متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{\frac{۱}{p}} < \infty$، فضای باناخ است. همچنین فضای برداری $L^\infty(X)$، متشکل از کلاس‌های هم ارزی توابع اندازه پذیر مختلط مقدار به گونه‌ای که $\|f\|_\infty = \inf\{a \geq ۰ \ : \ \mu(\{x : \ |f(x)| > a \}) = ۰\} < \infty$، فضای باناخ است.

ب) فرض کنید X فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد. $M(X)$ مجموعه اندازه‌های رادون مختلط روی X با نرم $\|\mu\| := |\mu|(X)$ فضای باناخ است.

قضیه ۴.۱.۱ : گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد آن‌گاه $(X, \|.\|)$ باناخ است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق در X، همگرا باشد.

اثبات: قضیه ۱ از فصل ۴ مرجع [۱۴].

[۱] character

تعریف ۵.۱.۱ **جبر باناخ** : فضای باناخ A همراه با نگاشت دو خطی $(a, b) \mapsto ab$ به نام ضرب، به گونه‌ای که برای هر $a, b, c \in A$ رابطه‌های $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ و $(ab)c = a(bc)$ برقرار باشند، را جبر باناخ گویند.

جبر باناخ A را جابجایی گویند، هر گاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$. و آن را یکدار گویند، هر گاه عنصر $e \in A$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $ae = ea = a$.

مثال ۶.۱.۱

الف) فرض کنید X فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد. $C_\circ(X)$ مجموعه توابع مختلط مقدار پیوسته که در بی نهایت به صفر میل می‌کنند. با نرم یکنواخت و ضرب نقطه‌ای جبر باناخ جابجایی است.

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \quad x \in X\}, \qquad (f.g)(x) = f(x)g(x), \qquad (f, g \in C_\circ(X))$$

$C_\circ(X)$ یکدار است اگر و تنها اگر X فشرده باشد.

ب) $M_n(\mathbb{C})$ مجموعه ماتریس های $n \times n$ مختلط با ضرب ماتریسی و نرم $\|A\| = \sup\{|A(x)| : \quad \|x\| \leq 1\}$ جبر باناخ ناجابجایی و یکدار می‌باشد.

ج) فضای $L^\infty(X)$ با ضرب نقطه‌ای جبر باناخ جابجایی و یکدار است.

■

برای هر $a \in A$ نگاشت

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\tau) = \tau(a), \qquad (\tau \in \Omega(A))$$

عضوی از $C_\circ(\Omega(A))$ است که آن را تبدیل گلفاند a گویند.

قضیه ۷.۱.۱ نمایش گلفاند: فرض کنید A جبر باناخ جابجایی باشد. در این صورت نگاشت $a \mapsto \hat{a}$ از A به $C_\circ(\Omega(A))$ همریختی، نرم کاهشی می باشد. یعنی برای هر $a \in A$ داریم $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$.

اثبات: قضیه (۵.۱.۱۰) از مرجع [۱۳].

تعریف ۸.۱.۱ $*$-جبرباناخ : یک برگشت روی جبر A نگاشت پاد خطی $a \mapsto a^*$ از A به A می‌باشد، به گونه‌ای که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$. جبر باناخ A همراه با برگشت $*$ به گونه‌ای که برای هر عضو $a \in A$ رابطه $\|a^*\| = \|a\|$ برقرار باشد را $*$-جبر باناخ گویند.

مثال ۹.۱.۱

الف) $C_\circ(X)$ که X فضای فشرده موضعی و هاسدورف است. با برگشت $f^* = \bar{f}$ ، $*$-جبر باناخ است.

ب) $M_n(\mathbb{C})$ با برگشت $(a_{ij})^* = (\bar{a_{ji}})$، $*$-جبر باناخ است.

ج) $L^\infty(X)$ با برگشت $f^* = \bar{f}$، $*$-جبر باناخ است.

در واقع ویژگی مورد نظر که باید بر ساختمان جبر باناخ جابجایی وجود داشته باشد که بتوان آن را به صورت $C_\circ(X)$ که X فضای فشرده موضعی و هاسدورف است، نمایش داد، ویژگی C^*- جبر بودن است. فرض کنید A، $*$- جبر باناخ باشد، اگر برای هر $a \in A$ رابطه $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ برقرار باشد، دراین صورت A راC^*-جبر گویند. جبرهای باناخ $C_\circ(X)$، $M_n(\mathbb{C})$ و $L^\infty(X)$ در مثال قبل C^*- جبر می‌باشند. نشان داده شده است که برای گروه فشرده موضعی G، $L^1(G)$ یک C^*-جبر نیست.

■

تعریف ۱۰.۱.۱ **محافظ**: محافظ تابع مختلط f بر فضای توپولوژیک X، بستار مجموعه $\{x : f(x) \neq ۰\}$ می‌باشد.

گردایه‌ی تمام مختلط پیوسته بر X که محافظ فشرده دارند را با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم. البته $C_c(X)$ فضای برداری نیز هست.

لم ۱۱.۱.۱ **اوریزن** : فرض کنیم X یک فضای هاسدورف به طور موضعی فشرده، V در X باز، $K \subseteq V$ و K فشرده باشد. در اینصورت $f \in C_c(X)$ ی هست به طوری که

$$K \prec f \prec V$$

لازم به ذکر است نماد

$$K \prec f$$

یعنی K زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از X است، $f \in C_c(X)$، به ازای هر $x \in X$، $۰ \leq f(x) \leq ۱$، وبه ازای هر $x \in K$، $f(x) = ۱$. همچنین نماد

$$f \prec V$$

یعنی V باز است، $f \in C_c(X)$، $۰ \leq f(x) \leq ۱$، و محافظ f در V قرار دارد.

۲.۱ فشردگی

در این بخش با نگاه دقیقتری به مبحث فشردگی ، چندی از قضایای مرتبط با این پایان نامه را مطرح می‌کنیم .

تعریف ۱.۲.۱ **پوشش** : گوییم گردایه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های فضای X یک پوشش X است ، یا X را می پوشاند،در صورتی که اجتماع اعضای $\mathcal{A}$ مساوی X باشد. اگر اعضای $\mathcal{A}$ زیرمجموعه‌های باز X باشند، آن را یک پوشش باز X می‌خوانند.

تعریف ۲.۲.۱ **فشرده** : فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز آن ، مانند $\mathcal{A}$ ، حاوی یک زیرگردایه‌ی متناهی باشد که آن نیز X را بپوشاند.

الف) خط حقیقی $\mathbb{R}$ فشرده نیست .

ب) زیرفضای $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ |n \in \mathbb{Z}_+\}$ از $\mathbb{R}$ فشرده است .

قضیه ۳.۲.۱ زیرمجموعه‌ی A از $\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کران دار باشد.

اثبات: قضیه (۳.٦) از مرجع [۱۲]. لازم به ذکر است ، هر بسته و کران داری ، فشرده نیست .در حقیقت قضیه بالا فقط در فضای $\mathbb{R}^n$ برقرار است.

تعریف ۴.۲.۱ **فشردگی بر حسب نقطه حدی** : فضای X را فشرده بر حسب نقطه‌ی حدی خوانیم هر گاه هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی آن دارای یک نقطه‌ی حدی باشد.

مثال **۵.۲.۱** اگر X فضایی دونقطه ای با توپولوژی ناگسسته باشد. در این صورت $X \times \mathbb{Z}_+$ فشرده بر حسب نقطه‌ی حدی است، ولی فشرده نیست .

قضیه **۶.۲.۱** فشردگی مستلزم فشردگی بر حسب نقطه‌ی حدی است، ولی نه بعکس.

اثبات: قضیه(۱.۷) از مرجع [۱۲]. ■

تعریف **۷.۲.۱ فشرده‌ی دنباله ای** : فضای متریک (X,τ) را فشرده دنباله ای گویند هر گاه هر دنباله در X دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

در حقیقت می توان گفت مجموعه A را فشرده دنباله ای گویند هر گاه هر پوشش باز شمارای آن دارای یک زیر پوشش متناهی باشد. ■

تعریف **۸.۲.۱ کران دار کلی**[۲] : فرض کنیم (X,d) فضای متریک باشد. X را کران دار کلی گویند هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$، $x_1,\cdots,x_m \in X$ وجود داشته باشد x_m ای بطوریکه $d(x,x_m) < \epsilon$ باشد.

درحقیقت به گفته‌دیگر X را بتوانیم با تعداد متناهی از ϵ گوی ها بپوشانیم.

قضیه **۹.۲.۱** فرض کنیم (X,d) فضای متریک باشد در اینصورت گزاره های زیر با یکدیگر هم ارزند.

---

[۲] Totaly bounded

(الف) X فشرده است.

(ب) X فشرده دنباله ای است.

(ج) X کامل و کراندار کلی است.

(د) X فشرده بر حسب نقطه‌ی حدی است.

اثبات: قضیه(۴.۷) از مرجع [۱۲].

■

۳.۱ فشردگی موضعی

در این قسمت مفهوم فشردگی موضعی را مطالعه می کنیم و این قضیه‌ی اساسی را بیان می کنیم که هر فضای هاسدورف موضعا فشرده را می‌توان در فضای هاسدورف فشرده معینی، که این فضا به فشرده شده‌ی تک نقطه ای موسوم است نشاند.

تعریف **۱.۳.۱** : فضای X را در نقطه ی x موضعا فشرده گوییم در صورتی که زیر مجموعه ی فشرده ای از X مانند C موجود باشد که حاوی یک همسایگی x است. اگر X در هر نقطه ی خود موضعا فشرده باشد آنگاه به طور ساده X را موضعا فشرده می‌خوانیم .

مثال **۲.۳.۱** الف) خط حقیقی $\mathbb{R}$ موضعا فشرده است .

ب) هر مجموعه ی مرتب ساده مانند X که دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد،موضعا فشرده است. زیرا هر عضو پایه ی X جزء بازه ای بسته در X است که فشرده است .

ج) Q متشکل از اعداد گویا موضعا فشرده نیست .

تعریف ۳.۳.۱ **فشرده سازی تک نقطه ای**: فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعا فشرده باشد. شیئی بیرون از X را در نظر می گیریم. می توانیم این شی ء را برای سهولت با نماد ∞ نمایش دهیم، و با الحاق این شی ء به X مجموعه ی $Y = X \cup \{\infty\}$ را تشکیل می دهیم. حال با تعریف گردایه ای از انواع مجموعه های ذیل، به عنوان مجموعه های باز در Y در آن توپولوژی ای می سازیم:

۱) U، که در آن U یکی اززیرمجموعه های باز X است.

۲) $Y - C$، که در آن C یکی از زیر مجموعه های فشرده ی X است .

فضای Y را فشرده شده ی تک نقطه‌ای X می خوانیم .

مثال ۴.۳.۱ :

الف) به سادگی می توان بررسی کرد که فشرده شده ی تک نقطه ای خط حقیقی $\mathbb{R}$ با دایره هومئومورف است .

ب) همچنین اگر $\mathbb{R}^2$ به عنوان فضای $\mathbb{C}$ از اعداد مختلط ملحوظ شود آنگاه $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را کره ریمانی یا صفحه ی مختلط گسترده می خوانند .

۴.۱ توپولوژی ضعیف

فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* فضای دوگان آن باشد. علاوه بر توپولوژی نرم روی X، توپولوژی‌های دیگری نیز وجود دارد که در ادامه به تعریف و بیان برخی ویژگی‌های آنها خواهیم پرداخت. از جمله مهمترین آنها، توپولوژی ضعیف و ضعیف$-*$ است.

تعریف ۱.۴.۱ **نیم نرم[۳]: فرض کنیم X فضای برداری روی میدان F باشد. در اینصورت نگاشت $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را نیم نرم گویند هر گاه :**

الف) برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

ب) برای هر $x \in X$ و هر $t \in F$ داشته باشیم $\rho(tx) = \mid t \mid \rho(x)$.

در ادامه در صورتی که X فضای برداری باشد ، خانواده‌ای از نیم نرم‌ها می توانند توپولوژی القا کنند . فضای برداری توپولوژیک پدید آمده از خانواده نیم نرم‌ها را با σ_p نمایش می‌دهیم .در حقیقت σ_p درشت بافترین توپولوژی روی X است که نسبت به آن نیم نرم‌های ρ پیوسته است .

تعریف ۲.۴.۱ **توپولوژی ضعیف [۴]** : توپولوژی ضعیف روی X توپولوژی است که توسط تابعی‌های خطی کران‌دار روی X تولید می‌شود و آن‌را با نماد τ_w یا $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهند. به بیان دیگر τ_w کوچکترین توپولوژی روی X است که تمام تابعی‌های $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ نسبت به آن پیوسته‌اند.

---

[۳] semi norm
[۴] Weak-topology

قضیه ۳.۴.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $A \subseteq X$ باشد . در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند.

۱) A فشرده نسبی است.

۲) A فشرده دنباله‌ای است. یعنی هر دنباله $\{x_n\}$ در A زیردنباله‌ای دارد که به نقطه‌ای از A همگراست.

۳) A کران‌دارکلی است .

اثبات: قضیه ۴.۲ صفحه ۱۳۵ از مرجع [۱۲]. ■

۵.۱ دنباله

تعریف ۱.۵.۱ دنباله : هر تابع از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به مجموعه دلخواه X یک دنباله در X نامیده شده و با نماد $\{x_n\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۵.۱ همگرایی دنباله : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. در اینصورت دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به $x \in X$ گویند هرگاه برای هر $\varepsilon \geq 0$ عدد طبیعی n_ε موجود باشد که برای هر $n \geq n_\varepsilon$ داشته باشیم $d(x_n,x) < \varepsilon$.

تعریف ۳.۵.۱ مفهوم همگرایی دنباله توسط همسایگی‌های باز : دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به x گویند هرگاه به ازای هر همسایگی باز حول x مانند $N_\varepsilon(x)$ عددی مانند n_ε باشد که به ازای هر $n \geq n_\varepsilon$ داشته باشیم $x_n \in N_\varepsilon(x)$.