دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم — گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض— گرایش جبر (نظریه گروههای متناهی)

موضوع:

OD — سرشت نمایی K_4 — گروههای ساده

نگارش:

سپیده اشجع‌زاده

استاد راهنما:

دکتر علیرضا مقدم فر

استاد مشاور:

مهندس مسعود شجاعی

تهران — بهمن ۱۳۸۹

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: $\mathrm{OD}-$ سرشت نمایی $K_۴-$ گروههای ساده

استاد راهنما: دکتر علیرضا مقدم فر

نام دانشجو: سپیده اشجع زاده

شماره دانشجویی: ۸۷۰۵۰۳۴

اینجانب سپیده اشجع زاده دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

تشکر و قدردانی

نخست خدای بزرگ را به جهت تمامی الطاف پیدا و پنهانش سپاس می‌گویم، او که هر لحظه مرا یاری داد تا مراحل علمی را با موفقیت پشت سر گذاشته و به مراحل جدیدتر راه یابم، با تمام وجود بر این باورم که بدون لطف او این موفقیت ها امکان پذیر نبود. همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را به استاد راهنمایم آقای دکتر علی رضا مقدم‌فر که در تنظیم این پایان‌نامه به من کمک نموده‌اند ابراز می دارم. در حقیقت زیبایی نگارش این پایان نامه عصارهٔ تجربه و دقت ایشان است.

همچنین از مادر عزیز و پدر مهربانم که زحمات بی‌دریغشان همیشه مایهٔ امید و خرسندی من برای کسب موفقیت ها بوده‌است صمیمانه ممنون و سپاسگزارم. از خدای بزرگ برای این بزرگواران آرزوی سلامتی و طول عمر دارم.

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

چکیده

در این پایان‌نامه اثبات می‌کنیم تمام گروههای ساده‌ای که مرتبهٔ آن‌ها دقیقاً توسط چهار عدد اول عاد می‌شود، بجز گروه سادهٔ A_{10}، OD$-$ سرشت‌پذیرند. همچنین نشان خواهیم داد که هر چند $D(A_{10})=D(J_2\times Z_3)$ و $|A_{10}|=|J_2\times Z_3|$، اما $A_{10}\ncong J_2\times Z_3$ که در آن D الگوی درجهٔ G است.

بعلاوه OD$-$ سرشت پذیری گروه سادهٔ $L:=U_3(5)$ و گروههای وابسته به آن را مد نظر قرار می‌دهیم. در حقیقت نشان خواهیم داد L و $L\cdot 2$، OD$-$ سرشت پذیرند، در حالی که $L\cdot 3$، ۳$-$ بار OD$-$ سرشت پذیر و $L\cdot S_3$، ٦$-$ بار OD$-$ سرشت پذیر می‌باشد.

کلمات کلیدی: درجهٔ یک رأس، OD$-$سرشت پذیری گروه متناهی، الگوی درجه، گراف اول، گروههای تقریباً ساده.

فهرست مندرجات

مقدمه ۸

۱ **تعاریف و نماد گذاری** ۱۰

۱.۱ گراف ۱۱

۲.۱ سرشت‌پذیری گروههای متناهی توسط مرتبه و الگوی درجهٔ آنها ۱۲

۳.۱ گروههای ساده ۱۸

۴.۱ گروه خودریختی‌های یک گروه ۱۹

۵.۱ زیر گروهای مینیمال نرمال ۲۰

۶.۱ زیر گروههای ماکسیمال نرمال ۲۱

۷.۱ $p-$گروه‌ها و $p-$ زیرگروههای سیلو ۲۱

۸.۱ $C_{p,p}-$ گروهها ۲۱

۹.۱ $\omega-$گروهها ۲۲

۱۰.۱ زیرگروه‌های مشخصه ۲۳

۱۱.۱ سری‌ها ۲۳

۱۲.۱ گروههای پوچتوان و گروههای حلپذیر ۲۶

۱۳.۱ زیرگروههای هال ۲۷

۱۴.۱ توسیع گروه ۲۸

۱۵.۱ عمل یک گروه بر یک مجموعه ۲۹

۱۶.۱ گروههای فروبنیوس ۳۱

۱۷.۱ گروههای ۲–فروبنیوس ۳۲

۱۸.۱ حاصلضرب مستقیم و نیم مستقیم گروهها ۳۲

۱۹.۱ گروههای خطی ۳۴

۲ **قضایا و نتایج مقدماتی** ۳۶

۱.۲ گروههای خطی ۳۶

۲.۲ قضایای سیلو ۳۷

۳.۲ قضایایی پیرامون گروههای پوچتوان و گروه‌های حلپذیر ۳۸

۴.۲ قضیه هال ۳۹

۵.۲ استدلال فراتینی ۴۰

۶.۲ زیرگروههای مشخصه ۴۰

۷.۲ رده بندی بعضی از $C_{p,p}-$ گروههای ساده ۴۱

۸.۲ قضایایی پیرامون گروههای فروبنیوس و گروههای ۲–فروبنیوس ۴۱

۹.۲ تاریخچهٔ مختصری از گروههای $OD-$ سرشت‌پذیر ۴۴

۱۰.۲ قضایای لازم برای OD–سرشت‌پذیری K_4- گروههای ساده. ۴۶

۳ **OD–سرشت‌پذیری K_4- گروههای ساده** ۴۹

۴ **$OD-$ سرشت‌پذیری گروههای تقریباً سادهٔ وابسته به گروه سادهٔ $U_3(5)$** ۵۹

۱.۴ قضایای لازم برای OD—سرشت پذیری گروههای تقریباً سادهٔ وابسته به گروه $U_۳(۵)$. ۵۹

۲.۴ OD—سرشت‌پذیری گروههای تقریباً سادهٔ وابسته به گروه $U_۳(۵)$. ۶۱

مقدمه

نظریهٔ گروهها بخصوص نظریه گروههای متناهی در جبر از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد و زمینهٔ مطالعات بسیاری از ریاضی‌دانان شده است. در حقیقت هدف نهایی در نظریهٔ گروههای متناهی، یافتن تمامی گروههای متناهی می‌باشد، یعنی نشان دادن چگونگی ساخت گروههای متناهی از هر نوع ممکن و نیز شیوه های مؤثری که مشخص می‌سازند از دو گروه متناهی مفروض کدام‌ها از یک نوعند. مطالعات اخیر در نظریهٔ گروهها به مسائلی منجر شد که تا مدت‌ها حل نشده بودند. برای مثال رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی در سال ۱۹۸۱ ارائه گردید و پس از آن گروهدانان به سرشت پذیری گروههای سادهٔ متناهی تحت پارامترهای عددی وابسته به آنها پرداختند. بعنوان نمونه برخی از گروهدانان با استفاده از مجموعهٔ مرتبهٔ اعضای گروههای متناهی که از اهمیت خاصی برخوردار است به سرشت‌پذیری آن گروهها می‌پردازند. همچنین اخیراً نوعی دیگر از سرشت پذیری گروههای متناهی با عنوان OD—سرشت پذیری گروهها ارائه شده است. در واقع این مطلب اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط دکتر علیرضا مقدم فر مورد مطالعه قرار گرفت و نتایجی در مورد برخی گروههای ساده به دست آمد. در این‌جا ما ابتدا سرشت پذیری نوع خاصی از گروههای سادهٔ متناهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. گروههای مورد مطالعهٔ ما گروههایی ساده هستند که مرتبهٔ آنها تنها شامل چهار عدد اول می‌باشد و لیست این گروههای ساده توسط Liangcai Zhang و Wujie Shi در سال ۲۰۰۰ میلادی تکمیل شده است. در این پایان نامه به یک گروه متناهی یک گراف وابسته می‌کنیم و با مطالعه روی این گراف نتایج جالبی در نظریهٔ گروهها به‌دست می آوریم. به‌طور نیز می‌توان به یک گراف یک گروه وابسته کرد و با مطالعه روی آن گروه و قضایا و نتایج نظریهٔ گروهها، مطالب جدیدی را در نظریهٔ گراف‌ها به دست آورد. فرض می کنیم G یک گروه متناهی و M یک گروه معین باشد. در این صورت گراف اول $\Gamma(G)$ متناظر با

گرافی است ساده با مجموعه رئوس $\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ و دو رأس مانند p_i و p_j توسط یک یال به هم وصل می‌شوند هرگاه G دارای عضوی از مرتبهٔ $p_i p_j$ باشد. برای رأس دلخواه p_i قرار می‌دهیم:

$$\deg(p_i) = |\{p_j \in \pi(G) | p_j \neq p_h, p_j \sim p_i\}|$$

و آن را درجهٔ رأس p_i می‌نامیم. اگر $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ که در آن $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ اعداد اول هستند، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{D}(G) := (\deg(p_1),\ \deg(p_2), \ldots,\ \deg(p_k)),$$

و آن را الگوی درجهٔ G می‌نامیم. اکنون فرض می‌کنیم برای گروه معین M و گروه دلخواه G داشته باشیم:

$$|G| = |M|, \quad D(G) = D(M).$$

چنانچه با توجه به شرایط فوق بتوان نتیجه گرفت $G \cong M$، می‌گوییم M گروهی $OD-$ سرشت پذیر است. بعلاوه اگر دقیقاً k گروه متناهی غیر یکریخت مانند G وجود داشته باشند به طوری که $|G| = |M|$ و $D(G) = D(M)$ می‌گوییم گروه M، $k-$ بار $\mathrm{OD}-$ سرشت پذیر است. بعلاوه اگر گروهی ۱ $-$بار $\mathrm{OD}-$ سرشت پذیر باشد، برای سادگی می‌گوییم آن گروه $\mathrm{OD}-$ سرشت پذیر است . همان‌طور که اشاره کردیم $\mathrm{OD}-$ سرشت پذیری بسیاری از گروهها تا کنون انجام شده است.

به عنوان مثال گروههای سادهٔ پراکنده به جز گروههای $\mathrm{Aut}(J_2)$ و $\mathrm{Aut}(M^cL)$، برخی گروههای نوع لی، $C_{2,2}-$ گروهها، K_4- گروههای ساده، گروههای ساده‌ای که مرتبهٔ آن‌ها کمتر از 10^8 می‌باشد و گروههای متناوب A_p، A_{p+1} و A_{p+2} به‌طوری که p عددی اول است، $\mathrm{OD}-$ سرشت‌پذیرند.

در فصل اول تعاریف و نمادهایی را که در طول پایان نامه از آن‌ها استفاده کرده‌ایم را توضیح می‌دهیم، در فصل بعد قضایا و نتایجی از گروههای $\mathrm{OD}-$ سرشت‌پذیر را بیان می‌کنیم، در فصل سوم به $\mathrm{OD}-$ سرشت‌پذیری K_4- گروههای ساده می‌پردازیم و در انتها در فصل آخر به $\mathrm{OD}-$ سرشت‌پذیری گروههای تقریباً سادهٔ وابسته به گروه سادهٔ $U_3(5)$ می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و نماد گذاری

در سراسر این پایان نامه فرض را بر این می‌گذاریم که G یک گروه متناهی باشد و منظور از یک گروه ساده یک گروه سادهٔ نا آبلی است. هرگاه n یک عدد طبیعی باشد، $\pi(n)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ مقسوم علیه‌های اول عدد n. چنانچه G یک گروه متناهی باشد، منظور از $\pi(G)$ همان مجموعهٔ $\pi(|G|)$ است. مجموعهٔ مرتبهٔ عناصر در گروه G را طیف گروه G نامیده و آن را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم. چون مرتبهٔ هر عنصر مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند، بنابراین طیف یک گروه همواره یک مجموعهٔ متناهی است. در حقیقت این مجموعه نسبت به رابطهٔ بخش پذیری بسته و جزئاً مرتب است. بنابراین $\omega(G)$ را می‌توان تنها با آن دسته از عناصرش که نسبت به رابطهٔ بخش پذیری ماکسیمال هستند به طور منحصر به فرد مشخص کرد. مجموعهٔ عناصر ماکسیمال $\omega(G)$ تحت رابطهٔ بخش پذیری را با $\mu(G)$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال برای گروه سادهٔ پراکندهٔ $M_{۲۲}$، طیف و مجموعهٔ عناصر ماکسیمال آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} \omega(M_{۲۲}) &= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦, ۷, ۸, ۱۱\} \\ \mu(M_{۲۲}) &= \{۵, ٦, ۷, ۸, ۱۱\} \end{aligned}$$

۱.۱ گراف

دربخش‌های آتی به یک گروه متناهی گرافی موسوم به گراف اول وابسته خواهیم کرد که نقش بسیار مهمی در شناسایی گروههای ساده تحت پارامترهای عددی خواهد داشت. لذا در این بخش نخست یک سری تعاریف و نتایج مقدماتی در ارتباط با گراف‌ها در حالت کلی مطرح نموده و سپس به تجزیه و تحلیل آن‌ها روی گراف اول وابسته به یک گروه متناهی خواهیم پرداخت.

در واقع گراف Γ زوج مرتبی است مانند $(V(\Gamma), E(\Gamma))$، متشکل از مجموعهٔ ناتهی $V(\Gamma)$ که مجموعهٔ رئوس Γ و $E(\Gamma)$ مجموعهٔ متشکل از یال‌های $V(\Gamma)$ است. یالی را که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند طوقه می‌نامند. بعلاوه چنانچه بین دو رأس بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال‌ها را یال‌های چند گانه می‌نامند. گرافی را که فاقد طوقه و یال چندگانه باشد گراف ساده می‌نامند.

درجهٔ یک رأس در گراف Γ عبارت است از تعداد یال‌های گذرنده بر آن رأس و معمولاً درجهٔ رأس v در گراف Γ را با یکی از نمادهای $\deg_\Gamma(v)$ یا $d_\Gamma(v)$ نشان می‌دهند. در حالتی که گراف Γ مشخص باشد معمولاً نمادهایی که درجهٔ رأس v را نشان می‌دهند به طور مختصر به صورت $\deg(v)$ یا $d(v)$ خواهند بود.

فرض کنیم U زیر مجموعهٔ ناتهی V باشد. زیر گراف Γ را که مجموعهٔ رأس‌هایش U و مجموعهٔ یالهایش مجموعه‌ای از آن یالهای Γ است که هر دو انتهایش در U است، زیر گراف Γ، القا شده به‌وسیلهٔ U می‌نامند و با $G[U]$ نشان می‌دهند. می‌گوییم که $\Gamma[U]$ یک زیر گراف القایی Γ است.

دو رأس u و v را همبند می‌گوییم اگر بین این دو رأس مسیری در گراف Γ موجود باشد. همبندی، یک رابطهٔ هم‌ارزی درمجموعهٔ رأسهای V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \dots, V_w$ وجود دارد به‌طوری‌که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگرافهای $\Gamma[V_1], \Gamma[V_2], \dots, \Gamma[V_w]$ را مؤلفه‌های Γ می‌نامند. اگر Γ دارای دقیقاً یک مؤلفه باشد، Γ همبند است و در غیر این‌صورت Γ ناهمبند است.

۲.۱ سرشت‌پذیری گروههای متناهی توسط مرتبه و الگوی درجهٔ آنها

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و داشته باشیم

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

که در آن p_i ها به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ اعدادی اولند به طوری که $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. یکی از گراف‌های معروف وابسته به گروه متناهی G گراف اول نامیده می‌شود که آن را با $\Gamma(G)$ نمایش می دهیم. مجموعهٔ رئوس این گراف عبارت است از $V(G) = \pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$، همچنین در این گراف دو رأس p_i و p_j مجاورند اگر و تنها اگر $p_i p_j \in \omega(G)$.

در حقیقت مطالعه روی گراف اول وابسته به یک گروه متناهی ابتدا توسط دو جبردان صاحب نام یعنی گروئنبرگ و کیگل آغاز شد. آنها موفق شدند گروههای متناهی با گراف اول ناهمبند را رده بندی کنند. نتایج به دست آمده توسط آنها در هیچ مجله‌ای منتشر نشد تا اینکه یکی از شاگردانِ گروئنبرک به نام ویلیامز[1] این نتایج را با اثبات آن‌ها به چاپ رساند. او در این مقاله تمام مولفه‌های همبندی گروههای سادهٔ متناهی را بجز گروههای سادهٔ نوع لی که روی میدان با مشخصهٔ زوج تعریف می‌شوند، مشخص نمود. چند سال بعد کوندراتف[2] مؤلفه‌های همبندی گروههای سادهٔ نوع لی باقیمانده را نیز به دست آورد.

هر یک از مؤلفه‌های گراف اول $\Gamma(G)$ را با $\pi_i(G)$ نشان می‌دهیم.چون هر گروه سادهٔ متناهی زوج مرتبه است لذا رأس ۲ همواره در گراف اول وابسته به یک گروه سادهٔ متناهی وجود دارد. از این رو قرار داد می‌کنیم که رأس ۲ در مؤلفهٔ $\pi_1(G)$ قرار داشته باشد. تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف را با $t(G)$ و یا $s(G)$ نشان می‌دهیم. مطابق نتایج به دست آمده توسط ویلیامز و کوندراتف نتیجه می‌شود که تعداد مؤلفه های همبندی برای گراف اول $\Gamma(G)$ هر گروه متناهی حداکثر برابر است با ٦. به‌علاوه تنها گروه متناهی که گراف اول آن دارای شش مؤلفهٔ همبندی است گروه سادهٔ J_4 می‌باشد.

[1] J. S. Williams

[2] A. S. Kondratév

جدول ۱.۱ مرتبه‌های مولفه‌ای گروه سادهٔ متناهی G با $t(G) = 2$

گروه	محدودیت روی گروه	Orcmp۱	Orcmp۲
A_n	$n, n-2$ اول نیستند و $6 < n = p, p+1, p+2$	$\frac{n!}{2p}$	p
$A_{p-1}(q)$	$(p,q) \neq (3,2), (3,4)$	$q^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^{p-1}(q^i - 1)$	$\frac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)}$
$A_p(q)$	$q-1 \mid (p+1)$	$q^{\frac{p(p+1)}{2}} (q^{p+1}-1) \prod_{i=2}^{p-1}(q^i - 1)$	$\frac{q^p-1}{q-1}$
${}^2A_{p-1}(q)$		$q^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^{p-1}(q^i - (-1)^i)$	$\frac{q^p+1}{(q+1)(p,q+1)}$
${}^2A_p(q)$	$q+1 \mid (p+1); (p,q) \neq (3,3), (5,2)$	$q^{\frac{p(p+1)}{2}} (q^{p+1}-1) \prod_{i=2}^{p-1}(q^i - (-1)^i)$	$\frac{q^p+1}{q+1}$
${}^2A_3(2)$		$2^6 \cdot 3^4$	5
$B_n(q)$	q فرد است و $n = 2^m \geq 4$	$q^{n^2}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{q^n+1}{2}$
$B_p(3)$		$3^{p^2}(3^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)$	$\frac{3^p-1}{2}$
$C_n(q)$	$n = 2^m \geq 2$	$q^{n^2}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{q^n+1}{(2,q-1)}$
$C_p(q)$	$q = 2, 3$	$q^{p^2}(q^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{q^p-1}{(2,q-1)}$
$D_p(q)$	$p \geq 5, q = 2, 3, 5$	$q^{p(p-1)}\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{q^p-1}{q-1}$
$D_{p+1}(q)$	$q = 2, 3$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{p(p+1)}(q^p+1)(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{q^p-1}{(2,q-1)}$
${}^2D_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$	$q^{n(n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{q^n+1}{(2,q-1)}$
${}^2D_n(2)$	$n = 2^m + 1 \geq 5$	$2^{n(n-1)}(2^n+1)(2^{n-1}-1)\prod_{i=1}^{n-2}(2^{2i}-1)$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_p(3)$	$p \neq 2^m + 1, p \geq 5$	$3^{p(p-1)}\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)$	$\frac{3^p+1}{4}$
${}^2D_n(3)$	$n = 2^m + 1 \neq p, m \geq 2$	$\frac{1}{2}3^{n(n-1)}(3^n+1)(3^{n-1}-1)\prod_{i=1}^{n-2}(3^{2i}-1)$	$\frac{3^{n-1}+1}{2}$
$G_2(q)$	$q \equiv \epsilon \pmod 3, \epsilon = \pm 1, q > 2$	$q^6(q^3-\epsilon)(q^2-1)(q+\epsilon)$	$q^2 - \epsilon q + 1$
${}^3D_4(q)$		$q^{12}(q^6-1)(q^2-1)(q^4+q^2+1)$	$q^4 - q^2 + 1$
$F_4(q)$	q فرد است	$q^{24}(q^8-1)(q^6-1)^2(q^4-1)$	$q^4 - q^2 + 1$
${}^2F_4(2)'$		$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2$	13
$E_6(q)$		$q^{36}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^3-1)(q^2-1)$	$\frac{q^6+q^3+1}{(3,q-1)}$
${}^2E_6(q)$	$q > 2$	$q^{36}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^3+1)(q^2-1)$	$\frac{q^6-q^3+1}{(3,q-1)}$
M_{12}		$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$	11
J_2		$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	7
Ru		$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$	29
He		$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$	17
M^cL		$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$	11
Co_1		$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	23
Co_2		$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	23
Fi_{22}		$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	13
$F_5 = HN$		$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$	19

جدول ۲.۱ مرتبه‌های مؤلفه‌ای از گروههای سادهٔ متناهی G با $t(G) \ge 3$ بجز $E_8(q)$

گروه	Orcmp1	Orcmp2	Orcmp3	Orcmp4
A_p ($p, p-2$ هر دو اول هستند)	$\frac{(p-1)!}{2}$	$p-2$	p	
$A_1(q), \epsilon = \pm 1, 3 < q \equiv \epsilon \pmod 4$	$q-\epsilon$	q	$\frac{q+\epsilon}{2}$	
$A_1(q), q > 2$ و q زوج است	q	$q-1$	$q+1$	
$A_2(2)$	8	3	7	
$A_2(4)$	2^6	5	7	9
${}^2A_5(2)$	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5$	7	11	
${}^2B_2(q), q = 2^{2n+1} > 2$	q^2	$q - \sqrt{2q} + 1$	$q + \sqrt{2q} + 1$	$q-1$
${}^2D_p(3), p = 2^n + 1, n \ge 2$	$2 \cdot 3^{p(p-1)}(3^{p-1} - 1)\prod_{i=1}^{p-2}(3^{2i} - 1)$	$\frac{3^{(p-1)}+1}{2}$	$\frac{3^p+1}{4}$	
${}^2D_{p+1}(2), p = 2^n - 1 \cdot n \ge 2$	$2^{p(p+1)}(2^p - 1)\prod_{i=1}^{p-1}(2^{2i} - 1)$	$2^p + 1$	$2^{p+1} + 1$	2
$E_7(2)$	$2^{63} \cdot 3^{11} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43$	73	127	
$F_4(q), 2 \mid q, q > 2$	$q^{24}(q^6 - 1)^2(q^4 - 1)^2$	$q^4 + 1$	$q^4 - q^2 + 1$	
${}^2F_4(q), q = 2^{2n+1} > 2$	$q^{12}(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q^2 + 1)(q - 1)$	$q^2 - \sqrt{2q^3} + q - \sqrt{2q} + 1$	$q^2 + \sqrt{2q^3} + q + \sqrt{2q} + 1$	
$G_2(q), 3 \mid q$	$q^6(q^2 - 1)^2$	$q^2 + q + 1$	$q^2 - q + 1$	
${}^2G_2(q), q = 3^{2n+1}$	$q^3(q^2 - 1)$	$q - \sqrt{3q} + 1$	$q + \sqrt{3q} + 1$	
$E_7(3)$	$2^{23} . 3^{63} . 5^2 . 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 547$	757	1093	
${}^2E_6(3)$	$2^{36} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$	13	17	19
M_{11}	$2^4 \cdot 3^2$	5	11	
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2$	5	7	11
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	11	23	
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	11	23	
J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	7	11	19
J_4	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$	17	19	
HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	7	11	
Sz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7$	11	13	
ON	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$	11	19	31
Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$	31	37	67
Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$	11	23	
F_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	17	23	
F'_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13$	17	23	29
$F_1 = M$	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 47$	41	59	71
$F_2 = B$	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	31	47	
$F_3 = Th$	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$	19	31	

فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و داشته باشیم

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

به‌طوری که $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ عداد اولند و $\alpha_i \in \mathbb{N}$ و $i = 1, 2, ..., k$.

برای $p \in \pi(G)$ داریم

$$\deg(p) = |\{q \in \pi(G) | q \neq p, q \sim p\}|$$

و آن را درجهٔ رأس p می نامیم . همچنین تعریف می‌کنیم

$$D(G) = (\deg(p_1), \deg(p_2), ..., \deg(p_k))$$

و آن را الگوی درجهٔ G (Degree pattern) می‌نامیم.

تعریف ۱.۱ گروه متناهی M را $k-$بار OD$-$ سرشت‌پذیر (یاOD$-$ سرشت نما) گوییم هرگاه دقیقاً k گروه متناهی غیریکریخت موجود باشد که دارای مرتبه و الگوی درجهٔ یکسان مانند M باشند. به ویژه گروهی را که ۱ $-$ بار OD$-$ سرشت‌پذیر است به طور خلاصه OD$-$سرشت‌پذیر گوییم.

برای گروه معین M، تعداد کلاس‌های یکریخت از گروههای G به‌طوری که $|G| = |M| = m$ و $\mathrm{D}(G) = \mathrm{D}(M)$، را با $h_{\mathrm{OD}}(M)$ نشان می‌دهیم. واضح است که برای هر گروه متناهی مانند M داریم، $1 \leq h_{\mathrm{OD}}(M) < \infty$، زیرا بنا بر قضیهٔ کیلی $M \hookrightarrow S_m$، یعنی می‌توان M را به عنوان زیرگروه m عضوی از S_m در نظر گرفت. چون تعداد زیرگروههای m عضوی S_m کمترند از تعداد زیر مجموعه‌های m عضوی S_m و می‌دانیم تعداد زیر مجموعه‌های m عضوی S_m برابر است با $\binom{m!}{m}$ از این رو

$$h_{\mathrm{OD}}(M) \leq \binom{m!}{m} < \infty.$$

برای گروه معین M، تعداد کلاس‌های یکریخت از گروههای G به‌طوری که $\Gamma(M) = \Gamma(G)$، را با $h_\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم. گروه M را $\Gamma-$ شناسایی پذیر می‌گوییم هرگاه $h_\Gamma(M) = 1$. همچنین گروه M را

تقریباً $\Gamma-$ شناسایی پذیر می‌گوییم هرگاه $۱ < h_\Gamma(M) < \infty$ و M را $\Gamma-$ غیر قابل شناسایی می‌گوییم هرگاه $h_\Gamma(M) = \infty$.

فرض می‌کنیم M گروهی متناهی باشد. تعداد کلاس‌های غیریکریخت از گروه G، به‌طوری که $\omega(G) = \omega(H)$ را با $h_\omega(M)$ نشان می دهیم. مانند تعریف فوق، می‌گوییم گروه M $\omega-$ شناسایی پذیر است هرگاه $h_\omega(M) = ۱$، تقریباً $\omega-$ شناسایی پذیر است هرگاه $۱ < h_\omega(M) < \infty$ و گروه M را $\omega-$ غیر قابل شناسایی می‌گوییم هرگاه $h_\omega(M) = \infty$.

تعریف ۲.۱ فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت رتبهٔ G را می‌توان به صورت حاصلضرب

$$|G| = m_۱ \times m_۲ \times \cdots \times m_{t(G)}$$

طوری نشان داد که در آن m_i ها اعدادی صحیح و مثبت هستند و داریم $\pi(m_i) = \pi_i$. در این حالت m_i ها را مرتبهٔ مؤلفه‌های همبند گراف اول G و

$$\mathrm{OC}(G) := \{m_۱, m_۲, \ldots, m_{t(G)}\}$$

را مجموعهٔ مرتبه‌های مؤلفه‌ای گروه G می‌نامیم. همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathrm{T}(G) := \{\pi_i(G) \mid i = ۱, ۲, \ldots, \mathrm{t}(G)\}.$$

تعریف ۳.۱ گروه متناهی M را $k-$ بار $\mathrm{OC}-$ سرشت پذیر گوییم هرگاه دقیقاً k گروه متناهی غیریکریخت موجود باشد که دارای مجموعهٔ مرتبه‌های مؤلفه‌ای یکسان مانند M باشد. به ویژه گروهی را که $۱-$ بار $\mathrm{OC}-$ سرشت پذیر است به طور خلاصه $\mathrm{OC}-$ سرشت پذیر گوییم.

در این بخش مفاهیم دیگری را که در این پایان نامه از آنها استفاده شده است معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴.۱ تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_{\circ}(G)=\{p\in\pi(G)|\deg(p)=\circ\},$$

و

$$\Omega_{\circ'}(G)=\{p\in\pi(G)|\deg(p)\neq\circ\}.$$

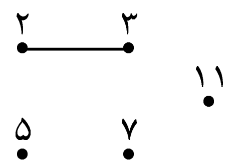
واضح است که $\pi(G)=\Omega_{\circ'}(G)\cup\Omega_{\circ}(G)$ و بدیهی است که این دو مجموعه $\pi(G)$ را افراز می‌کنند و تعداد اعضای $\Omega_{\circ'}(G)$ حداکثر به اندازهٔ تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف اول $\Gamma(G)$ است، در حقیقت $|\Omega_{\circ'}(G)|\leq t(G)$ زیرا p یک مؤلفه همبندی است اگر و تنها اگر $\deg(p)=\circ$. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_n(G)=\{p\in\pi(G)|\deg(p)=n\},$$

به‌طوری که $n=\circ,۱,۲,\ldots,|\pi(G)|-۱$.

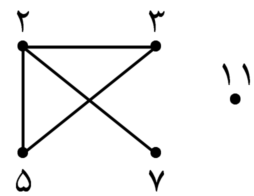
برای آشنایی با تعاریف و نمادها در زیر به ارایه مثالی می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}|M_{۲۲}| &= ۲^{۷}\cdot ۳^{۲}\cdot ۵\cdot ۷\cdot ۱۱\\ D(G) &= (۱,۱,\circ,\circ,\circ)\\ \pi(M_{۲۲}) &= \{۲,۳,۵,۷,۱۱\}\end{aligned}$$



گراف اول گروه سادهٔ $\Gamma(M_{۲۲})$

$$\begin{aligned}|A_{۱۱}| &= ۲^{۷}\cdot ۳^{۴}\cdot ۵\cdot ۷\cdot ۱۱\\ D(G) &= (۳,۳,۳,۳,\circ)\\ \pi(A_{۱۱}) &= \{۲,۳,۵,۷,۱۱\}\end{aligned}$$



گراف اول گروه سادهٔ $\Gamma(A_{۱۱})$