بِسْمِ اللّٰهِ الرّحمٰنِ الرّحيمِ

تقدیم به

آستان حقیقت

و

پدر و مادر عزیزم

که با ایثارگری‌هایشان راه زندگی را به من آموختند.

سپاسگزاری

سرسبزترین و لطیف‌ترین سپاس، ستایش و بندگی به درگاه خداوند مهربان که فرصت زدودن جهالت و رسیدن به سپیده دم معرفت و روشنایی را به بنده عطا فرمود.

از زحمات و راهنمایی‌های ارزنده استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی‌پور که در طول انجام این پایان نامه همواره با نقطه نظرات، تجربیات و محبت‌های بی‌دریغ خود اینجانب را یاری فرمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر بوشهریان و دکتر خرمی‌زاده که به عنوان اساتید مشاور از راهنمایی‌های ایشان در طول انجام این پایان نامه استفاده کرده‌ام کمال تشکر را دارم و از تمامی اساتیدی که در محضر آنها علم، ادب و اخلاق آموختم سپاسگذارم.

در پایان تقدیر و تشکری خالصانه از پدر و مادر عزیزم دارم، آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر و امید.

چکیده

برخی از کاربردهای قضایای نقطه ثابت در فضاهای شبه متریک

پژوهش و نگارش:

زهره شکیبا

در این پایان نامه، وجود نقطه ثابت خود نگاشت‌ها را بررسی می‌کنیم و شرایطی را روی خود نگاشت‌های یک فضای شبه متریک (فازی) کامل اعمال می‌کنیم که تحت آن‌ها، خودنگاشت‌ها دارای نقطه ثابت باشند. با استفاده از این نتایج، وجود جواب یک معادله بازگشتی مربوط به الگوریتم مرتب سازی سریع، الگوریتم مرتب سازی درجی و روش تقسیم و حل را ثابت می‌کنیم. همچنین فضای شبه متریک وزن‌دار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نتایج به دست آمده را برای برخی از مدل‌های شبه متریک که در علوم کامپیوتر و فناوری اطلاعات مانند دامنه لغات کاربرد دارند، استفاده می‌کنیم.

در این پایان نامه، مفهوم μ- نقطه ثابت را برای نگاشت‌هایی روی σ-جبرها تعریف می‌کنیم و شرایطی را پیدا می‌کنیم که وجود μ- نقطه ثابت را برای یک خود نگاشت از σ-جبرها تضمین می‌کند. همچنین مفهوم اندازه مخروطی را بیان می‌کنیم و بعضی از خواص

نظریه اندازه‌ها را ثابت می‌کنیم. با استفاده از این نتایج برخی از قضایای نقطه ثابت مخروطی را ثابت می‌کنیم.

فهرست

عنوان صفحه

فصل ۱

فضای شبه متریک

۱ — ۱ مقدمه

خواص فضاهای شبه متریک توسط ریاضی دانان زیادی مورد بررسی قرار گرفته است[۴، ۵]. همچنین افراد زیادی به مطالعه قضایای نقطه ثابت در این فضاها[۱۸، ۲۳] و توسیع آنها از فضای متریک به فضای شبه متریک پرداخته‌اند[٦، ۸، ۷]. از مهمترین این نتایج می‌توان از اصل تغیرات اکلند، که اولین بار توسط ایوار اکلند[1] [۱۱] در سال ۱۹۷۴ ارائه شد، نام برد. این اصل از مهمترین ابزار در حل توابع لیپ‌شیتز، محدب و دیفرانسیل می‌باشد[٦۲، ۵۰، ۲۴].

در بخش دوم، برخی از خواص فضاهای شبه متریک غیر ارشمیدسی را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، یادآوری می‌کنیم. در بخش سوم این فصل، برخی از مفاهیم فضاهای شبه متریک که در ادامه مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، به بیان برخی از نتایج اصل تغیرات اکلند می‌پردازیم. در نهایت در بخش پنجم، شرایطی روی خود نگاشت‌های یک فضای شبه متریک که تحت آن شرایط، خود نگاشت‌ها دارای خاصیت نقطه ثابت هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالب این فصل از مقاله[۳۸] گرفته شده است.

۱ — ۲ فضاهای شبه متریک غیر ارشمیدسی

این بخش را با تعریف فضای متریک غیر ارشمیدسی آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱: فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. $d : X \times X \to [0, \infty)$ را یک متر

[1] Ivar Ekeland

غیر ارشمیدسی گوییم هرگاه در خواص زیر صدق کند.

(الف) $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$؛

(ب) $d(x,y) = d(y,x)$؛

(ج) $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.

در این حالت، (X,d) را یک فضای متریک غیرارشمیدسی گوییم.

تعریف ۲.۱: فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to [0,\infty)$ را یک شبه متر غیر ارشمیدسی گوییم اگر به ازای هر $x, y, z \in X$.

(الف) $d(x,y) = d(y,x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$؛

(ب) $d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.

در این حالت، (X,d) را یک فضای شبه متریک غیرارشمیدسی گوییم.

تعریف ۳.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک باشد. در این صورت توابع نامنفی d^{-1} و d^s روی $X \times X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d^{-1}(x,y) = d(y,x) \qquad \text{و} \qquad d^s(x,y) = \max\{d(x,y), d^{-1}(x,y)\}.$$

در ادامه، مثال‌هایی از شبه مترهای غیر ارشمیدسی بیان می‌کنیم.

مثال ۴.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک غیر ارشمیدسی باشد. در این صورت $d^s(x,y)$ یک متر غیر ارشمیدسی در X است؛ زیرا،

(الف) فرض کنیم $d^s(x,y) = 0$. بنابراین $d(x,y) = 0$ و $d^{-1}(x,y) = 0$. چون d^{-1}

و d دو شبه متر غیر ارشمیدسی می‌باشند، $x = y$. بر عکس، فرض کنیم $x = y$. لذا $d^{-1}(x,y) = d(x,y) = 0$. بنابراین $d^s(x,y) = 0$.

(ب) به ازای هر $x, y \in X$ داریم

$$d^s(x,y) = \max\{d^{-1}(y,x), d(y,x)\} = d^s(y,x).$$

(ج) چون d و d^{-1} دو شبه متر غیر ارشمیدسی هستند،

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

و

$$d^{-1}(x,z) \leq \max\{d^{-1}(x,y), d^{-1}(y,z)\}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\max\{d(x,z), d^{-1}(x,z)\} &\leq \max\{d(x,y), d(y,z), d^{-1}(x,y), d^{-1}(y,z)\} \\
&\leq \max\{\max\{d(x,y), d^{-1}(x,y)\}, \\
&\quad \max\{d(y,z), d^{-1}(y,z)\}\} \\
&= \max\{d^s(x,y), d^s(y,z)\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$d^s(x,z) \leq \max\{d^s(x,y), d^s(y,z)\}.$$

پس حکم برقرار است.

مثال ۵.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک غیر ارشمیدسی باشد. در این صورت d^{-1} یک شبه متر غیر ارشمیدسی است؛ زیرا،

(الف) فرض کنیم $d^{-1}(x,y) = 0$. پس $d(y,x) = 0$. چون d شبه متر غیر ارشمیدسی است، داریم $x = y$. برعکس، فرض کنیم، $x = y$. در این صورت $d(y,x) = 0$. پس $d^{-1}(x,y) = 0$.

(ب) چون d یک شبه متر غیرارشمیدسی است،

$$d(z,x) \leq \max\{d(z,y), d(y,x)\}.$$

بنابراین

$$d^{-1}(x,z) \leq \max\{d^{-1}(x,y), d^{-1}(y,z)\}.$$

بنابراین d^{-1} یک شبه متر غیرارشمیدسی است.

تعریف ۶.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک غیر ارشمیدسی باشد. در این صورت

(الف) دنباله $(x_n)_n$ در X را به $x \in X$ همگرا گوییم اگر $d(x,x_n) \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

(ب) دنباله $(x_n)_n$ را کوشی گوییم اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m \geq n_0$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(ج) فضای (X,d) را کامل گوییم اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

(د) فضای (X,d) رادو کامل گوییم اگر فضای (X,d^s) کامل باشد.

۳−۱ مفاهیم فضاهای شبه متریک

در ابتدا مفهوم فضای شبه متریک را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۷.۱: فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ را یک شبه متر گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشند.

(الف) $x = y$ اگر و تنها اگر $d(x, y) = d(y, x) = 0$؛

(ب) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

تعریف ۸.۱: فرض کنیم (X, d) یک فضای شبه متریک و $(x_n)_n$ دنباله‌ای در X باشد. در این صورت

(الف) دنباله $(x_n)_n$ را به x، d−همگرا گوییم اگر $d(x, x_n) \to 0$.

(ب) دنباله $(x_n)_n$ را کوشی چپ گوییم اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $n_\epsilon \leq n < m$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(ج) دنباله $(x_n)_n$ را کوشی راست گوییم اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $n_\epsilon \leq n < m$ داشته باشیم $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

(د) دنباله $(x_n)_n$ را کوشی گوییم اگر هم کوشی چپ و هم کوشی راست باشد.

(ه) فضای شبه متریک (X, d) را d−کامل چپ گوییم اگر هر دنباله کوشی چپ، d−همگرا باشد.

(و) فضای شبه متریک (X, d) را d−کامل راست گوییم اگر هر دنباله کوشی راست، d−همگرا باشد.

(ی) فضای شبه متریک (X,d) را کامل گوییم اگر هم کامل چپ و هم کامل راست باشد.

تعریف ۹.۱: فرض کنیم E زیر مجموعه‌ای از فضای شبه متریک (X,d) باشد.

(الف) $x \in X$ را یک نقطه حدی E گوییم اگر دنباله $(x_n)_n$ در E موجود باشد به طوری‌که

$$d(x, x_n) \to \circ.$$

(ب) E را یک مجموعه بسته گوییم اگر نقاط حدی‌اش را شامل شود.

(ج) E را کراندار گوییم اگر عدد $M > \circ$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x, y \in E$ داشته باشیم $d(x,y) \leq M$.

(د) E را فشرده گوییم اگر هر دنباله کراندار در E دارای یک زیر دنباله همگرا باشد.

تعریف ۱۰.۱: شبه متر d را یک $T_۱$–شبه متر گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ داشته باشیم $d(x,y) > \circ$.

تعریف ۱۱.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک باشد. تابع $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را d–نیم پیوسته پایینی گوییم هرگاه به ازای هر دنباله d–همگرا به $x \in X$ داشته باشیم

$$f(x) \leq \liminf f(x).$$

گزاره ۱۲.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای $T_۱$–شبه متریک و $\psi : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. رابطه "$\leq$" روی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \leq y. \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad d(x,y) \leq \psi(y) - \psi(x)$$

اگر X یک فضای d–کامل راست و تابع ψ از پایین کراندار و d–نیم پیوسته پایینی روی X باشد، آنگاه X دارای عضو مینیمال است.

اثبات. برای اثبات به [۹] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱۳.۱: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریک باشد. تابع $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را محض گوییم، اگر $\{x \in X : f(x) < \infty\} \neq \emptyset$.

قضیه ۱۴.۱: (اصل تغییرات اکلند) فرض کنیم (X,d) یک فضای T_1–شبه متریک و $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک تابع محض از پایین کراندار باشد. برای هر $\epsilon > 0$ فرض کنیم $x_\epsilon \in X$ عنصری باشد به‌طوری‌که

$$f(x_\epsilon) \leq \inf f(X) + \epsilon.$$

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) اگر X یک فضای d–کامل راست و تابع f، d–نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه برای هر $\lambda > 0$ عنصر $z = z_{\epsilon,\lambda} \in X$ وجود دارد به طوری‌که

(۱) $f(z) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(z, x_\epsilon) \leq f(x_\epsilon)$؛

(۲) $d(z, x_\epsilon) \leq \lambda$؛

(۳) به ازای هر $x \in X \setminus z$، $f(z) < f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(x, z)$.

(ب) اگر X یک فضای d^{-1}–کامل راست و تابع f، d^{-1}–نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه برای هر $\lambda > 0$ عنصر $z = z_{\epsilon,\lambda} \in X$ وجود دارد به طوری‌که

(۱′) $f(z) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(x_\epsilon, z) \leq f(x_\epsilon)$؛

(۲′) $d(x_\epsilon, z) \leq \lambda$؛

(۳′) به ازای هر $x \in X \setminus z$، $f(z) < f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(z, x)$.

اثبات: برای اثبات به [۹] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۵.۱: (اصل ضعیف تغیرات اکلند) فرض کنیم (X,d) یک فضای T_1–شبه متریک و $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک تابع از پایین کراندار باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) اگر X یک فضای d–کامل راست و تابع f، d–نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ عنصر وجود دارد $y_\epsilon \in X$ به طوری‌که

(۱) $f(y_\epsilon) \leq \inf f(X) + \epsilon$؛

(۲) به ازای هر $x \in X \setminus y_\epsilon$، $f(y_\epsilon) < f(x) + \epsilon d(x, y_\epsilon)$.

(ب) اگر X یک فضای d^{-1}–کامل راست و تابع f، d^{-1}–نیم پیوسته پایینی باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ عنصر $y_\epsilon \in X$ وجود دارد به قسمی‌که

(′۱) $f(y_\epsilon) \leq \inf f(X) + \epsilon$؛

(′۲) به ازای هر $x \in X \setminus y_\epsilon$، $f(y_\epsilon) < f(x) + \epsilon d(y_\epsilon, x)$.

اثبات: برای اثبات به [۹] مراجعه کنید. □

در ادامه، فرض می‌کنیم $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ و $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابعی باشد که به ازای هر $s \in \mathbb{R}^+$ در شرایط زیر صدق کند.

(الف) $\lim_{n\to\infty} Q^n(s) = 0$؛

(ب) $\lim_{s\to\infty}(s - Q(s)) = \infty$.

تعریف ۱.۱۶: فرض کنیم X یک فضای شبه متریک باشد. تابع $f : X \to X$ را یک انقباض تعمیم یافته گوییم اگر اعداد $p, q \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به طوری‌که برای هر $x, y \in X$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$d(f^p x, f^q y) \leq Q(M(x, y)),$$

که در آن

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \max\{d(f^i x, f^j y), d(f^i x, f^{i'} x), \\ & d(f^j y, f^{j'} y) : 0 \leq i, i' \leq p, 0 \leq j, j' \leq q\}. \end{aligned}$$

لم ۱.۱۷: فرض کنیم $p \in \mathbb{N}$ و $t \in \mathbb{R}^+$. اگر $(a_n)_n\infty$ یک دنباله نامنفی باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ در نامساوی زیر صدق کند

$$a_{n+p} \leq Q(\max\{t, a_{n+i} : 0 \leq i \leq p - 1\}),$$

آنگاه $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq Q(t)$.

اثبات: برای اثبات به [۲۲] مراجعه کنید. $\square$

لم ۱.۱۸: فرض کنیم T یک انقباض تعمیم یافته روی فضای شبه متریک (X, d) باشد. در این صورت برای هر $x, y \in X$، دنباله‌های $(T^n x)_n$ و $(T^n y)_n$ کوشی هستند.

اثبات: برای اثبات به [۲۲] مراجعه کنید. $\square$

۱ــ۴ برخی از نتایج اصل تغیرات اکلند

این بخش را با قضیه زیر آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱۹.۱: (نقطه ثابت کاریستی[۲]–کرک[۳]) فرض کنیم (X,d) یک فضای T_1–شبه متریک باشد. نگاشت $f: X \to X$ و تابع $\varphi: X \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

(الف) اگر X یک فضای d–کامل راست، تابع φ از پایین کراندار و d–نیم پیوسته پایینی باشد و نگاشت f به ازای هر $x \in X$ در شرط زیر صدق کند

$$d(f(x),x) \leq \phi(x) - \phi(f(x)), \qquad (۱-۱)$$

آنگاه تابع f دارای یک نقطه ثابت در X است.

(ب) اگر X یک فضای d^{-1}–کامل راست، تابع φ از پایین کراندر و d–نیم پیوسته پایینی باشد و نگاشت f به ازای هر $x \in X$ در شرط زیر صدق کند

$$d(x,f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x)),$$

آنگاه تابع f دارای یک نقطه ثابت در X است.

اثبات: (الف) رابطه زیر را روی X به ازای هر $u,v \in X$ تعریف می‌کنیم.

$$d(u,v) \leq \phi(v) - \phi(u) \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad u \leq v.$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱–۱) به ازای هر $x \in X$ داریم $f(x) \leq x$. حال تابع f با توجه به گزاره ۱۲.۱ یک عضو مینیمال مانند z متعلق به مجموعه $(X,\leq)$ دارد. پس بنا به رابطه (۱–۱) داریم $f(z) \leq z$. با توجه به مینیمال بودن z داریم $f(z) = z$. پس تابع f دارای یک نقطه ثابت است.

(ب) برای اثبات قسمت (ب)، کافی است توجه کنیم که دو رابطه زیر با هم، هم‌ارز می‌باشند.

$$d^{-1}(f(x),x) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x)) \qquad \text{و} \qquad d(x,f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x)).$$

---
[۲] Caristi
[۳] Kirk

بنابراین طبق قسمت قبل تابع f دارای یک نقطه ثابت است. $\square$

گردایه تمام زیر مجموعه‌های X را با نماد $P(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. عنصر $x_\circ \in X$ را یک نقطه ثابت برای تابع چند مقداری $F : X \to P(X)$ گوییم هرگاه $F(x_\circ) = \{x_\circ\}$.

قضیه ۲۱.۱: فرض کنیم (X, d) یک فضای T_1–شبه متریک، $F : X \to P(X)$ یک نگاشت چند مقداری باشد به قسمی‌که به ازای هر $x \in X$، $F(x) \neq \emptyset$. همچنین فرض کنیم $\varphi : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) اگر X یک فضای d–کامل راست، φ از پایین کراندار و d–نیم پیوسته پایینی باشد و نگاشت F به ازای هر $x \in X$ و $y \in F(x)$ در شرط

$$d(y, x) \leq \varphi(x) - \varphi(y) \qquad (۲-۱)$$

صدق کند، آنگاه f یک نقطه ثابت در X دارد.

(ب) اگر X یک فضای d^{-1}–کامل راست، φ از پایین کراندار و d^{-1}–نیم پیوسته پایینی باشد و نگاشت F به ازای هر $x \in X$ و $y \in F(x)$ در شرط

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

صدق کند، آنگاه f یک نقطه ثابت در X دارد.

اثبات: (الف) در اصل تغیرات اکلند قرار می‌دهیم $\lambda = \epsilon = ۱$. در این صورت عضو $x_\circ \in X$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $y \in X \setminus \{x_\circ\}$،

$$\varphi(x_\circ) < \varphi(y) + d(y, x_\circ).$$