دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان:

بررسی یک روش جدید برای محاسبه مقادیر تکین تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر پرویز سرگلزایی

تحقیق و نگارش:

فاطمه پریزاد لائین

بهمن ماه ۹۰

تقدیم به

من خوب می‌دانم که زیستن در عصر محمد پیامبر(ص) و درک علی(ع) و دیدن آن همه عشق ناب به خداوند، چه لذتی دارد، اما دوران دیگری نیز هست، دوران امتحان‌های سخت، دورانی که در آن خوب زیستن بسیار دشوار است، حتی درک راه درست نیز دشوار است، چه برسد به اینکه در آن مسیر حرکت کنی. اما اگر باز هم به روز ازل برگردم، من این دوران دشوار را انتخاب می کنم، چرا که شما در این دوران هستی.

اگر بر من تنها یک شکر واجب باشد همین بس که در عصر شما، در دوران ولایت شما زندگی می‌کنم.

سراپا غرق اشتباه و گناهم، اما می‌دانم که به بهای عشقم خریده می‌شوم.

تقدیم به مولایم

حضرت مهدی (عج)

و تقدیم به دو گوهر ناب زندگی‌ام

پدر و مادرم

سپاسگزاری

شکر و سپاس خدای بزرگ و مهربان را که توفیق عنایت فرمود تا گامی دیگر از زندگی را نیز با موفقیت به اتمام برسانم.

بدون شک این پایان‌نامه مرهون تلاش و مساعدت فرزانگانی است که در این مجال بر خود لازم می‌دانم از این عزیزان تشکر نمایم.

در ابتدا تشکر و قدردانی خود را به استاد عزیز و بزرگوارم جناب آقای دکتر سرگلزایی تقدیم می‌نمایم که در این مدت حمایت و راهنمایی‌هایشان را از بنده دریغ ننمودند.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سهیلی نهایت تشکر و قدردانی را دارم که در طول دوره کارشناسی ارشد، چه از لحاظ علمی و چه اخلاقی از ایشان بسیار آموخته‌ام.

از دکتر میکائیل هوشتنباش بابت راهنمایی‌های مؤثرشان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از خانم دکتر فرحناز مهنا که با راهنمایی‌هایشان در مبحث پردازش تصویر راه گشای بنده بوده‌اند سپاسگزارم.

در ادامه از دوستان عزیزم راضیه وحیدی نیا، نجمه اسلامی، نرگس موسوی‌نژاد، فائزه دهقانی، مهدیه دهقانی، زهره فیروزی، شهربانو شرافتمند، فاطمه بلوچ، مرجان سعیدی، زهرا حسینی، فاطمه زاده پاریزی، فاطمه زهرا هدایتی، مریم انصاری، راحله برادران، سارا اشتهار و آمنه توماج که با لطف و شکیبایی بی‌دریغ خود مرا در پیمودن این مسیر تنها نگذاشتند و تمام کسانی که در این مدت خاطرات به یاد ماندنی را در ذهنم رقم زدند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم و از خداوند مهربان برای همه عزیزان سعادت، سلامت و سربلندی را خواستارم.

فاطمه پریزاد

چکیده

تجزیه مقدار تکین تعمیم یافته از اساسی‌ترین تجزیه‌های جبرخطی عددی است و مهمترین ابزار در مسائل نظری و عملی بسیاری از قبیل کمترین مربعات کل تعمیم یافته، پردازش سیگنال و ... می‌باشد.

در این پایان‌نامه روش زیر فضا از نوع ژاکوبی—دیویدسون برای مسأله مقدار تکین تعمیم یافته بررسی می‌شود. این روش، روشی برای مسائلی با ماتریس‌های تنک بزرگ می‌باشد که با محاسبه تکراری، تعدادی از مقادیر وبردارهای تکین تعمیم یافته را به‌دست می‌دهد. ایده اصلی در این روش به فرمول‌بندی ماتریس افزوده تجزیه مقدار تکین تعمیم یافته به صورت یک مسأله مقدار ویژه ساخت یافته می‌باشد و سپس همانند دیگر روش‌های نوع زیر فضا، مسأله به زیر فضایی با بعد کمتر تصویر می‌شود و در آن تقریبی برای مقدار تکین تعمیم یافته پیدا می‌شود. سپس زیر فضا با حل تقریبی معادله تصحیح نوع ژاکوبی—دیویدسون بسط می‌یابد و دوباره در زیر فضای جدید، تقریب بهتری برای مقدار تکین تعمیم یافته مورد نظر پیدا می‌شود. این عمل استخراج زیر فضا نامیده می‌شود. در این روش چندین نوع استخراج مختلف ارائه شده است.
این روند ادامه می‌یابد تا یک تقریب قابل قبول برای مقدار تکین تعمیم یافته حاصل شود. نتایج عددی، کارایی روش و درستی مباحث نظری را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: تجزیه مقدار تکین تعمیم یافته، ژاکوبی—دیویدسون، نیوتن شتاب یافته نادقیق.

پیشگفتار

جبرخطی عددی اغلب در دل بسیاری از علوم محاسباتی و مسائل مهندسی نظیر انتقال حرارت، دینامیک سیالات، پردازش سیگنال، مهندسی زیست شناسی، آمار، نظریه کنترل و ... قرار دارد. چون نتایج یک چنین کارهای محاسباتی شدیداً بستگی به الگوریتم‌های پیشرفته برای حل مسائل جبرخطی عددی گوناگون دارد، از این رو در دو دهه‌ی اخیر کارهای محاسباتی از همان اهمیت کارهای نظری و تجربی برخوردار گشته‌اند. از جمله مسائل مهم در جبرخطی عددی، مسائل مقدار ویژه و مقدار تکین و تعمیم‌های آنها می‌باشد. در این پایان نامه روشی از نوع روش‌های ژاکوبی—دیویدسون [۱] برای مسأله مقدار تکین تعمیم یافته [۱۸]، بررسی می‌شود.

برای به‌دست آوردن یک یا چند مقدار ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن، چندین روش تکراری وجود دارد: روش توانی، روش لانزوس [۲]، روش آرنولدی [۳]، روش دیویدسون [۴] و... . ژاکوبی [۵] در مقاله‌ای در سال ۱۸۴۶ [۲۳]، برای تقریب مقادیر ویژه روشی را که اساساً ترکیبی از ۱) تکرارهای ژاکوبی ۲) تکرارهای گوس—ژاکوبی ۳) روش $JOCC$ [۶] می‌باشد، پیشنهاد کرد. او این ترکیب را به صورت یک واحد مستقل بیان کرد. روش ژاکوبی—دیویدسون یک ترکیب از رویکرد $JOCC$ و روش دیویدسون [۸] می‌باشد که در حدود ۱۵ سال قبل توسط اسلیپن [۷] و ون در ورست [۸] ([۳۴] را ببینید) معرفی شد. روش فوق به عنوان یکی از بهترین حل کننده‌های مقدار ویژه مخصوصاً برای مقادیر ویژه درونی طیف مقادیر ویژه می‌باشد. در کاربردهای بسیاری نیازی به شناخت تمام طیف نیست، بلکه تعداد کمی مقدار ویژه انتخابی، معمولاً تعداد کمی از بزرگترین و یا کوچکترین مقادیر ویژه کافی خواهند بود. در روش ژاکوبی—دیویدسون نیز، هدف یافتن بخشی از مقادیر طیف، برای نمونه بزرگترین و یا کوچکترین مقادیر ویژه و یا مقادیر ویژه نزدیک به یک هدف خاص می‌باشد. هر چند روش برای کل مقادیر طیف نیز قابل استفاده می‌باشد. این روش علاوه بر ماتریس‌های متقارن، برای مسائل نامتقارن و همچنین برای ماتریس‌های مختلط و غیر نرمال نیز قابل اجرا است.

---

[۱] Jacobi-Davidson

[۲] Lanczos

[۳] Arnoldi

[۴] Davidson

[۵] Jacobi

[۶] Jacobi's orthogonal component correction

[۷] Sleijpen

[۸] Van der Vorst

روش ژاکوبی—دیویدسون یک روش از نوع روش‌های زیر فضاست که جواب‌های تقریبی معادلات تصحیح مشخص را برای بسط فضاهای جستجو استفاده می‌کند. روش‌های نوع ژاکوبی—دیویدسون جستجو را به یک جهت جدید برای زیر فضا محدود می‌کنند که متعامد یا پادمتعامد با آخرین بردار ریتز انتخاب شده باشد. این روش‌ها به طور موفقیت آمیزی برای مسأله مقدار ویژه[۲۰, ۳۴]، مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته[۳۶] و برای مسأله مقدار تکین[۱۷] بکار رفته‌اند. در این پایان نامه نشان داده می‌شود که روش نوع ژاکوبی—دیویدسون را می‌توان برای مسأله مقدار تکین تعمیم یافته بکار برد.

در فصل اول، مفاهیم و تعاریف و قضایایی که در این پایان نامه از اهمیت بیشتری برخوردار بوده‌اند را آورده‌ایم. در فصل دوم به معرفی تجزیه مقدار تکین(SVD[۹]) می‌پردازیم. خواص آن را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان آن را در فشرده‌سازی تصویر بکار برد. سپس انواع تعمیم‌های آن را مطرح کرده و به تفصیل تجزیه مقدار تکین تعمیم یافته($GSVD$[۱۰]) را شرح می‌دهیم. نظریه آشفتگی در آن را بررسی می‌کنیم و خلاصه‌ای از مهمترین روش‌های ارائه شده برای $GSVD$ را بیان می‌کنیم. و در انتهای فصل نیز توضیح مختصری درباره روش‌های زیر فضا گفته می‌شود. در فصل سوم به بررسی روش زیر فضا نوع ژاکوبی—دیویدسون برای مسأله مقدار تکین تعمیم یافته ($JDGSVD$[۱۱]) می‌پردازیم که با روش ژاکوبی—دیویدسون برای مسأله مقدار تکین ($JDSVD$[۱۲]، [۱۷, ۱۹]) در ارتباط است و آن نیز بنوبه خود از روش ژاکوبی—دیویدسون برای مسأله مقدار ویژه [۳۴] الهام گرفته شده است. نتایج عددی در فصل ۴ آورده می‌شود.

[۹] Singular value decomposition

[۱۰] Generalized singular value decomposition

[۱۱] Jacobi-Davidson type method for the GSVD

[۱۲] Jacobi-Davidson type method for the SVD

فهرست مندرجات

فهرست نمودارها

فهرست جداول

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱ــ۱ مقدمه

در این فصل، به بیان و یادآوری قضایا، تعاریف و مفاهیمی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند می‌پردازیم. لازم به ذکر است که در سرتاسر این پایان‌نامه، اعداد، بردارها و ماتریس‌ها حقیقی فرض شده‌اند، مگر خلاف آن گفته شود.

۱ــ۲ بردارها

تعریف ۱.۲.۱ (استقلال خطی): فرض کنید S فضایی برداری بر میدان F باشد. بردارهای $s_1, ..., s_n \in S$ را بر F وابسته خطی یا به‌طور ساده وابسته نامیم، هرگاه اسکالرهایی مانند $a_1, ..., a_n \in F$ که همگی همزمان صفر نیستند یافت شود به‌طوری‌که

$$a_1 s_1 + ... + a_n s_n = 0.$$

در غیر این صورت بردارها را مستقل خطی بر F، یا به طور ساده مستقل می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ (متعامد بودن بردارها): زاویه بین دو بردار u و v از رابطه زیر به‌دست می آید:

$$cos(\theta) = \frac{u^T v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

که $u^T v$ حاصلضرب داخلی دو بردار u و v است.

دو بردار u و v متعامد هستند اگر $\theta = 90$، یعنی $u^T v = 0$. از نماد $\perp$ برای نمایش متعامد بودن استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ (زیر فضا): فرض کنید S یک مجموعه از بردارهای واقع در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه S یک زیر فضا از $\mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود اگر برای $s_1, s_2 \in S$ و اسکالرهای دلخواه c_1 و c_2 داشته باشیم $c_1 s_1 + c_2 s_2 \in S$.

تعریف ۴.۲.۱ (پایه): هر مجموعه از n بردار مستقل خطی از S با بعد $dim[S] = n$ یک پایه از زیر فضا را تشکیل می‌دهد.

تعریف ۵.۲.۱ (ابرصفحه): یک ابرصفحه H، یک مجموعه به صورت $\{x : \; Px = k\}$است که در آن P یک بردار ناصفر در ^{n} است و k یک اسکالر می‌باشد.

۱ـ۳ ماتریس‌ها

تعریف ۱.۳.۱: ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را

– متقارن گوییم اگر $A^T = A$.

– خود توان گوییم اگر $A^2 = A$.

– بالا مثلثی گوییم اگر $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

– پایین مثلثی گوییم اگر $\forall i < j, a_{ij} = 0$.

– قطری گوییم اگر $\forall i \neq j, a_{ij} = 0$.

– نرمال گوییم اگر $AA^* = A^*A$ که $A^* = (\bar{A})^T$.

– معین مثبت گوییم اگر برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $x^TAx > 0$.

یاد آوری: اگر A، B، C و D ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب باشند آنگاه

۱) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

۲) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}$

تعریف ۲.۳.۱ (رتبه ماتریس): حداکثر تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی ماتریس $A_{m\times n}$ را رتبه آن نامیده و با $rank(A)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۳.۱ (رتبه کامل): ماتریس $A_{m\times n}$ را رتبه کامل گوییم اگر $rank(A) = min\{m,n\}$. در غیر این صورت آن را رتبه ناقص گوییم.

تعریف ۴.۳.۱ (برد و فضای پوچ): برای هر ماتریس از مرتبه $m \times n$ دو زیر فضای وابسته مهم وجود دارد: برد A که توسط $R(A)$ و فضای پوچ A که توسط $N(A)$ نمایش داده می‌شوند به قسمی که:

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m |\ b = Ax,\ \ x \in \mathbb{R}^n\},$$
$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ Ax = 0\}.$$

تعریف ۵.۳.۱ (مکمل متعامد یا متمم متعامد): فرض کنید S زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت مکمل متعامد S که با $S^\perp$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S^\perp = \{y \in R^n |\ y^Tx = 0,\ \forall x \in S\}.$$

تعریف ۶.۳.۱ (پایه یکا متعامد): مجموعه بردارهای $v_1, ..., v_m$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد هستند اگر

$$v_i^Tv_j = 0, \qquad i \neq j.$$

به‌علاوه اگر $v_i^T v_i = ۱$، به ازای هر i، آنگاه آن‌ها یکا متعامد هستند. یک پایه برای یک زیرفضا که یکا متعامد نیز باشد، یک پایه یکا متعامد برای زیر فضا نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۳.۱ (ماتریس متعامد): یک ماتریس مربعی O متعامد است اگر

$$O^T O = O O^T = I.$$

ماتریس‌های متعامد نقش مهمی در محاسبات ماتریسی دارند. دو خاصیت زیر از ماتریس‌های متعامد در محاسبات عددی کاربردهای زیادی دارد:

۱) معکوس یک ماتریس متعامد O دقیقاً ترانهاده آن است، یعنی: $O^{-۱} = O^T$.

۲) حاصلضرب دو ماتریس متعامد یک ماتریس متعامد است.

تعریف ۸.۳.۱ (تصویر): در جبرخطی عددی، یک تصویر، یک تبدیل خطی P از یک فضای برداری به خودش است به‌طوری‌که $P^۲ = P$.

تعریف ۹.۳.۱ (تصویر متعامد): فرض کنید S یک زیر فضا از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه ماتریس P از مرتبه $n \times n$ که دارای خواص زیر باشد:

۱) $R(P) = S$

۲) $P^T = P$ (P متقارن است)

۳) $P^۲ = P$ (P خود توان است)،

تصویر متعامد بر روی S، یا به طور ساده ماتریس تصویر نامیده می‌شود. تصویر متعامد بر روی یک زیر فضا منحصربه‌فرد است. توجه داریم که یک تصویر متعامد لزوماً متعامد نیست.

ماتریس V را به صورت $V = (v_۱, ..., v_k)$ تعریف کنید که در آن $v_۱, ..., v_k$ یک پایه یکا متعامد برای یک زیر فضای S باشند، آنگاه

$$P = VV^T$$

تصویر متعامد منحصربه‌فرد بر روی S است. توجه کنید که V منحصربه‌فرد نیست اما P منحصربه فرد است. اگر P یک عملگر تصویر متعامد بر روی S باشد آنگاه $I - P$ یک عملگر تصویر متعامد بر روی $S^\perp$ خواهد بود که I ماتریس واحد از همان مرتبه P است [۷].

تعریف ۱۰.۳.۱ (تصویر مایل): تصویری که متعامد نباشد یک تصویر مایل نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۳.۱ (نرم بردار): تابع $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق می‌کند را یک نرم بردار یا به طور

ساده نرم بر $\mathbb{R}^n$ می‌نامند اگر:

۱) به ازای هر $x \neq 0$ آنگاه $\|x\| > 0$، و $\|x\| = 0$ اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۱۲.۳.۱ (نرم ماتریس): برای هر ماتریس $A_{m\times n}$، نرم ماتریسی A به صورت تابع $\|.\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ که دارای خواص زیر است تعریف می‌شود:

۱) اگر $A \neq 0$ آنگاه $\|A\| > 0$، و $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$.

۲) به ازای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$.

۳) $\|\mathrm{A} + \mathrm{B}\| \leq \|\mathrm{A}\| + \|B\|$.

تعریف ۱۳.۳.۱ (P—نرم): ماتریس A و نرم $\|.\|$ مفروضند. عدد نامنفی $\|A\|_P$ که به صورت زیر تعریف می‌شود و هر سه خاصیت نرم ماتریس را دارا می‌باشد،

$$\|A\|_P = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_P}{\|x\|_P},$$

P—نرم ماتریس A می‌نامند.

تعریف ۱۴.۳.۱ (نرم فروبینیوس): نرم فروبینیوس، نرم ماتریسی مهم دیگری است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\|A\|_F^2 = trace(A^T A). \qquad (1-1)$$

تعریف ۱۵.۳.۱: با فرض اینکه B رتبه کامل باشد، $\|x\|^2_{(B^TB)^{-1}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|^2_{(B^TB)^{-1}} = x^T(B^TB)^{-1}x. \qquad (1-2)$$

تعریف ۱۶.۳.۱: با الهام گرفتن از (۱ − ۱) و (۱ − ۲)، در اینجا $\|Z\|^2_{(B^TB)^{-1},F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|Z\|^2_{(B^TB)^{-1},F} = trace(Z^T(B^TB)^{-1}Z). \qquad (1-3)$$

مثال ۱۷.۳.۱ (نرم طیفی) : اگر در تعریف $P-$نرم، به جای P، عدد ۲ قرار داده شود، نرم حاصل را نرم طیفی (نرم ۲ ماتریس) A می‌نامند:

$$\|A\|_{۲} = \max_{x\neq ۰} \frac{\|Ax\|_{۲}}{\|x\|_{۲}}.$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\|A\|_{۲} = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

قضیه ۱۸.۳.۱ : اگر O یک ماتریس متعامد باشد آنگاه برای هر ماتریس $A \neq ۰$ داریم:

الف) $\|O\|_{۲} = ۱$؛ یعنی نرم طیفی یک ماتریس متعامد برابر ۱ است.

ب) $\|AO\|_{۲} = \|A\|_{۲}$

ج) $\|AO\|_F = \|A\|_F$.

برهان: [۷] را ببینید.

این قضیه بیان می‌کند که نرم‌های طیفی و فروبینیوس تحت ضرب ماتریسی تغییر ناپذیر باقی می‌مانند. این سه خاصیت نرم ماتریس‌های متعامد، در محاسبات ماتریسی دارای اهمیت ویژه هستند.

۱—۴ مقادیر و بردارهای ویژه

تعریف ۱.۴.۱ (مقادیر و بردارهای ویژه): فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. آنگاه λ یک مقدار ویژه A است اگر یک بردار مخالف صفر x یافت شود به‌قسمی که

$$Ax = \lambda x$$

یا

$$(A - \lambda I)x = ۰.$$

بردار x را یک بردار ویژه راست (یا فقط یک بردار ویژه) A وابسته به مقدار ویژه λ و (λ, x) یک جفت ویژه A می‌نامند. بردار y ارائه شده توسط

$$y^T A = \lambda y^T$$

یک بردار ویژه چپ ماتریس A وابسته به مقدار ویژه λ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۴.۱ (طیف A): مجموعه مقادیر ویژه یک ماتریس A، طیف A نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱ (شعاع طیفی): شعاع طیفی A برابر با

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, \quad i = ۱, ..., n$$

است که در آن $\lambda_۱, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه A هستند.

تعریف ۴.۴.۱ (مسأله مقدار ویژه): مسأله‌ی شامل پیدا کردن جواب‌های غیر بدیهی $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in \mathbb{C} - \{۰\}$ برای

$$Ax = \lambda x,$$

یک مسأله مقدار ویژه نامیده می‌شود که A یک ماتریس مختلط $n \times n$ است.

تعریف ۵.۴.۱ (مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته): مسأله‌ای شامل پیدا کردن یک مقدار ویژه $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in \mathbb{C} - \{۰\}$ از

$$Ax = \lambda Bx$$

که x یک بردار ویژه (راست) می‌باشد را مسأله مقدار ویژه تعمیم یافته می‌نامند. همچنین بردار $y \neq ۰$ صادق در

$$y^* A = \lambda y^* B,$$

یک بردار ویژه چپ نامیده می‌شود.

به آسانی ملاحظه می‌شود که λ یک ریشه معادله زیر است، که معادله مشخصه نامیده می‌شود:

$$det(A - \lambda B) = ۰.$$

تعریف ۶.۴.۱ (مداد ماتریسی): ماتریس $(A - \lambda B)$، یک مداد ماتریسی نامیده می‌شود و برای راحتی توسط (A, B) نمایش داده می‌شود. جفت (A, B) منظم است اگر $det(A - \lambda B)$ متحد با صفر نباشد. در غیر این صورت منفرد نامیده می‌شود.

در مورد علت استفاده از نام « مداد» در تعریف فوق به مراجع [۷] و [۳۲] مراجعه کنید.

تعریف ۷.۴.۱ (ماتریس ناقص): ماتریسی که کمتر از n بردار ویژه داشته باشد ماتریس ناقص نامیده

می‌شود.

تعریف ۸.۴.۱ (عدد وضعیت): عدد وضعیت ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

این عدد نشان دهنده حساسیت یک مسأله می‌باشد.

تعریف ۹.۴.۱ (عدد وضعیت مقدار ویژه): اگر λ یک مقدار ویژه یک ماتریس غیر ناقص باشد، آنگاه عدد $\frac{1}{|y_i^T x_i|}$ که در آن y_i و x_i به ترتیب بردارهای ویژه چپ و راست ماتریس با طول یکه می‌باشند، عدد وضعیت λ نامیده می‌شود.

۱—۵ مروری بر مفاهیم تخصصی مورد نیاز فصل ۳

تعریف ۱.۵.۱ (روش تکراری): روش تکراری روشی است که جواب یک مسأله را با شروع یک تقریب اولیه از جواب، بعد از تعدادی تکرار به صورت تقریبی محاسبه می‌کند. معمولاً هنگامی که روند تکرار پیش می‌رود تقریب به جواب نزدیک‌تر می‌شود. روش‌های ژاکوبی، گاوس سایدل، فوق تخفیف متوالی، روش‌های تکراری برای حل مسائل دستگاه‌های خطی هستند. روش توانی، روش توانی معکوس و روش QR مثال‌هایی از روش‌های تکراری برای حل مسائل ویژه هستند.

تعریف ۲.۵.۱ (ماتریس تنک): ماتریس تنک یک ماتریس با تعداد زیادی عناصر صفر را گویند. تنک بودن یک مزیت برای مسائل بزرگ می‌باشد. یک ماتریس تنک می‌تواند به طور مناسب در یک کامپیوتر ذخیره شود. الگوریتم‌هایی که خاصیت تنکی را حفظ کنند، الگوریتم‌های مطلوبی هستند.

تعریف ۳.۵.۱ (مسأله بد وضع): مسأله‌ای که تغییری کوچک در داده‌های ورودی موجب یک تغییر با معنا در جواب شود، مسأله بدوضع نامیده می‌شود و بالطبع، مسأله‌ای که جواب آن در برابر اختلال‌های کوچک در ورودی حساس نباشد، مسأله‌ای خوش وضع نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۵.۱ (پیش‌شرط‌سازی): عملیاتی که برای بهبود عدد وضعیت یک ماتریس انجام می‌شود، پیش‌شرط‌سازی نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۵.۱ (خارج قسمت ریلی): ماتریس A را در نظر بگیرید. خارج قسمت $\frac{x^T A x}{x^T x}$ خارج قسمت ریلی بردار x نامیده می‌شود. اگر x تقریبی از یک بردار ویژه باشد، آنگاه خارج قسمت ریلی، تقریبی از مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه‌ای است که x تقریب آن می‌باشد.