دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

فرمول اثر برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی با شرایط مرزی وابسته به پارامتر ویژه و برای سیستم‌های شرودینگر روی گراف‌ها

استاد راهنما
دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام

استاد مشاور
دکتر فرهاد دستمالچی ساعی

پژوهشگر
مریم عسکری

شهریور ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم

الهی...

ای خالق بی‌مدد و ای واحد بی‌عدد، ای اول بی‌هدایت و ای آخر بی‌نهایت، ای ظاهر بی‌صورت و ای باطن بی‌سیرت، ای حی بی‌ذلت، ای معطی بی‌فطرت و ای بخشنده‌ی بی‌منت، ای داننده‌ی رازها، ای شنونده‌ی آوازها، ای بیننده‌ی نمازها، ای شناسنده‌ی نام‌ها، ای رساننده‌ی گام‌ها، ای مبرا از عوایق، ای مطلع بر حقایق، ای مهربان بر خلایق عذرهای ما بپذیر که تو غنی و ما فقیر و بر عیب‌های ما مگیر که تو قوی و ما حقیر، از بنده خطا آید و ذلت و از تو عطا آید و رحمت.

الهی هر که ترا شناخت و علم مهر تو افراخت هر چه غیر از تو بود بینداخت.

تقدیم به:

پدر و مادرم

شکر و سپاس خدای را که به انسان نعمت تفکر و قدرت اندیشه عطا کرد تا براساس آن از جهل تا کمال دانش و معنویت گام بردارد.
وظیفه‌ی خود می‌دانم از استاد محترم جناب آقای دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام که در کلاس ایشان درس‌ها آموختم و راهنمایی‌های خوبشان ره توشه‌ای برای این کار شد، نهایت تقدیر و تشکر را داشته باشم. همچنین از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر حسین خیری داور جلسه‌ی دفاعیه که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و از استاد مشاورم جناب آقای دکتر فرهاد دستمالچی ساعی که زحمت مشاوره و مطالعه‌ی این کار را تقبل فرمودند، کمال تشکر را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: عسکری نام: مریم

عنوان: فرمول اثر برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی با شرایط مرزی وابسته به پارامتر ویژه و برای سیستم‌های شرودینگر روی گراف‌ها

استاد راهنما : دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام

استاد مشاور : دکتر فرهاد دستمالچی ساعی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۲

کلید واژه‌ها: مسأله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی، شرایط مرزی وابسته به پارامتر ویژه، مقادیر ویژه، بسط‌های مجانبی، فرمول اثر، سیستم‌های شرودینگر، گراف متری، شرایط نوع δ'، قضیه‌ی امبارزومیان

چکیده

برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل با پارامتر ویژه در شرایط مرزی در حالت‌های اسکالر و ماتریسی، یک فرمول اثر منظم مرتبه‌ی اول را به‌دست می‌آوریم. همچنین برای سیستم‌های شرودینگر روی گراف‌های متری با شرایط نوع δ' در رأس مرکزی، ابتدا با کمک قضیه‌ی روشه، بسط مجانبی ریشه‌ی دوم مقادیر ویژه‌ی بزرگ را تا جمله‌ی از مرتبه‌ی $o(1/n)$ به‌دست می‌آوریم. سپس فرمول اثر منظم را برای سیستم‌های مذکور با استفاده از روش‌های مانده در آنالیز مختلط به‌دست می‌آوریم و در آخر این فرمول‌ها را برای به‌دست آوردن یک نتیجه در مسأله‌ی عکس از نوع نتیجه‌ی امبارزومیان به‌کار می‌بریم.

فهرست مطالب

مقدمه

در یک فضای با بعد متناهی یک عملگر دیفرانسیل یک اثر (مجموع مقادیر ویژه) متناهی دارد. در حالی که در یک فضای با بعد نامتناهی، عملگرهای دیفرانسیل معمولی لزوماً یک اثر متناهی ندارند. اما گلفاند[۱] و لویتان[۲] در سال ۱۹۵۳ دریافتند که مجموع $\sum_n (\lambda_n - \mu_n)$ که λ_n و μ_n به ترتیب مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی بدون اختلال و مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی اختلال یافته هستند، معنا و مفهوم عمیقی دارد و با به‌دست آوردن حاصل این مجموع برای عملگر شرودینگر، نظریه‌ی اثر منظم عملگرهای دیفرانسیل را بنیان گذاری کردند [۱۵]. در واقع آن‌ها برای مسأله‌ی

$$-y^{''}(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \ \ , \ \ y^{'}(0) = y^{'}(\pi) = 0$$

فرمول اثر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(x)\ dx\right] = \frac{1}{4}[q(0)+q(\pi)] - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(x)\ dx$$

را به‌دست آوردند که در آن $\{\lambda_n\}$ها، مقادیر ویژه‌ی مسأله هستند.
فرمول اثر یک عملگر دیفرانسیل عمیقاً ساختار طیفی آن را مشخص می‌کند و کاربردهای مهمی در محاسبه‌ی عددی مقادیر ویژه، مسأله‌ی عکس و نظریه‌ی سیستم‌های انتگرال پذیر دارد [۲۰، ۲۶]. به هر حال محاسبه‌ی هر مقدار ویژه برای عملگر دیفرانسیل بسیار مشکل است. مهمترین کاربرد فرمول اثر در حل مسائل عکس [۲۶]، یعنی به‌دست آوردن تابع پتانسیل مجهول با مشخص بودن برخی از داده‌های طیف مربوط به آن است. همچنین می‌توان بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را که منجر به معادلات اشتورم-لیوویل می‌شوند، با محاسبه‌ی مقادیر ویژه و به ویژه مجموع آن‌ها (اثر) مورد بررسی قرار داد.
بعد از مطالعات گلفاند و لویتان چندین ریاضیدان به توسعه‌ی فرمول اثر برای معادلات دیفرانسیل

[۱] Gelfand

[۲] Levitan

مختلف علاقه‌مند شدند. در مورد مسائل اشتورم-لیوویل[۳] اسکالر مطالعات بسیاری وجود دارند که مقادیر ویژه‌ی بزرگ و فرمول اثر منظم را بر حسب ضرایب عملگرها و شرایط مرزی برآورد می‌کنند. به هنگام یک تعمیم از معادله‌ی اشتورم-لیوویل اسکالر اهمیت معادلات اشتورم-لیوویل ماتریسی در مطالعه‌ی فیزیک ذره کشف شد[۲۹]. فرمول اثر برای مسائل اشتورم-لیوویل ماتریسی در [۱۰] و [۱۱] و برای مسائل اشتورم-لیوویل با پارامتر ویژه در شرایط مرزی در [۳]، [۷] و [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اما فرمول اثر برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی با پارامتر ویژه در شرایط مرزی برای اولین بار در سال ۲۰۱۱ در [۲۸] مورد مطالعه قرار گرفته است که در فصل سوم آن را به تفصیل بیان می‌کنیم.

این پایان‌نامه بر اساس مراجع [۱۸]، [۲۸] و [۲۷] به شرح زیر تدوین شده است:

در فصل اول تعاریف و قضیه‌هایی را بیان می‌کنیم که برای فصل‌های بعدی مورد نیازند.

در فصل دوم برای مسأله‌ی اشتورم-لیوویل با پارامتر ویژه در شرایط مرزی، بسط مجانبی مقادیر ویژه را با کمک قضیه‌ی روشه[۴] و فرمول اثر منظم مرتبه‌ی اول را با مقایسه‌ی ضرایب بسط‌های مجانبی تابع مشخصه‌ی مسأله به‌دست می‌آوریم [۱۸].

در فصل سوم، مسأله‌ی بیان شده در فصل اول را به حالت ماتریسی تعمیم می‌دهیم و فرمول اثر آن را با کمک قضیه‌ای در آنالیز مختلط و روش‌های آنالیز مجانبی به‌دست می‌آوریم [۲۸].

در فصل چهارم، همان ایده‌ی به‌کار برده شده در فصل سوم را به منظور یافتن فرمول اثر برای یک سیستم از معادلات اشتورم-لیوویل روی گراف‌های متری، به‌کار می‌بریم. به این ترتیب که برای سیستم‌های شرودینگر[۵] روی گراف‌های متری، ابتدا، بسط مجانبی ریشه‌ی دوم مقادیر ویژه‌ی بزرگ را تا جمله‌ی از مرتبه‌ی $o(1/n)$ به‌دست می‌آوریم و سپس فرمول اثر منظم را به‌دست می‌آوریم و در آخر فرمول اثر به‌دست آمده را برای حل مسائل عکس به‌کار می‌بریم[۲۷] .

---

[۳] Sturm-Liouville

[۴] Roche

[۵] schrodinger

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل مقدمه‌ای بر مسأله‌ی اشتورم-لیوویل را ارائه می‌دهیم و برخی از خواص مسأله‌ی مقدار مرزی اشتورم-لیوویل را بیان می‌کنیم. در ادامه به معرفی نمادهای O و o و تعریف بسط‌های مجانبی می‌پردازیم و سپس مفاهیمی از آنالیز مختلط و آنالیز تابعی را مطرح خواهیم کرد.

۱.۱ مسأله‌ی اشتورم-لیوویل

مسأله‌ی مقدار مرزی

$$Ly = (k(t)y')' - g(t)y = -\lambda\rho(t)y, \qquad a \le t \le b \tag{۱.۱}$$

با شرایط مرزی دلخواه را مسأله‌ی اشتورم-لیوویل می‌نامند که در آن $\rho, g \in C[a,b]$ و $k \in C^1[a,b]$ حقیقی مقدار هستند.

تعریف ۱.۱.۱. مسأله‌ی مقدار اولیه مربوط به معادله (۱.۱) را در نظر می‌گیریم. مقادیری از λ که به ازای آنها مسأله‌ی مقدار اولیه دارای جواب‌های غیر بدیهی باشد، مقادیر ویژه مسأله و جواب‌های متناظر را توابع ویژه می‌نامند. تابع $g(t)$ به تابع پتانسیل، $\rho(t)$ به تابع وزن و مجموعه‌ی مقادیر ویژه به طیف مسأله مشهور هستند. به علاوه ریشه‌های تابع وزن، نقاط برگردان نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. (تعریف مسأله‌ی اشتورم-لیوویل نامعین) فرض کنید $I = [a,b]$ و I_+ مجموعه‌ی t هایی از I باشد که به ازای آن‌ها $\rho(t) > 0$ و I_- مجموعه‌ی t هایی از I که به ازای آن‌ها $\rho(t) < 0$ باشد.

اگر هر یک از مجموعه‌های I_+ و I_- دارای اندازه‌ی لبگ[۱] مثبت باشند، آن‌گاه مسأله‌ی اشتورم-لیوویل را نامعین گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. (تعریف مسأله‌ی اشتورم-لیوویل کلاسیک) منظور از مسأله‌ی اشتورم-لیوویل کلاسیک آن است که تابع وزن $\rho(t)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ تابعی اکیداً مثبت باشد.

حال معادله (۱.۱) را طوری در نظر می‌گیریم که در آن $k(t)$ و $\rho(t)$ مقادیر مثبتی باشند. فرض می‌کنیم که شرایط مرزی

$$L_1y \triangleq \alpha y(a) - \beta y'(a) = 0, \quad L_2y \triangleq \gamma y(b) - \delta y'(b) = 0 \quad (BC) \tag{۲.۱}$$

برقرار باشد که در آن α، β، δ و γ مقادیر ثابتی هستند و همچنین $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ و $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ که این شرایط مرزی را شرایط مرزی مجزا می‌گویند. در حالت کلی شرایط مرزی را به صورت

$$\begin{aligned} M_1y &\triangleq d_{11}y(a) + d_{12}y'(a) - c_{11}y(b) - c_{12}y'(b) = 0 \\ M_2y &\triangleq d_{21}y(a) + d_{22}y'(a) - c_{21}y(b) - c_{22}y'(b) = 0 \qquad (BC_g) \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم. حال ماتریس‌های

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

را تعریف می‌کنیم. چون فرض کرده‌ایم که $M_1y = 0$ و $M_2y = 0$ نتیجه می‌گیریم که $detD \neq 0$ یا $detC \neq 0$ و یا بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود فرض می‌کنیم که $d_{21} = d_{22} = c_{11} = c_{12} = 0$ به طوری که (BC_g) به (BC) تبدیل می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم:

$$k(b)detD = k(a)detC \tag{۳.۱}$$

که این شرط خودالحاق بودن مسأله‌ی (۱.۱) را تضمین می‌کند. اگر $D = C = I_2$ باشد، آن‌گاه شرایط (BC_g) به شرایط مرزی متناوب تبدیل می‌شود و (۳.۱) به $k(a) = k(b)$ تبدیل می‌شود.

[۱] Lebesgue

قضیه ۴.۱.۱. *فرض می‌کنیم که ϕ_1 و ϕ_2 یک مجموعه‌ی اساسی از جواب‌های $Ly = 0$ باشد. در این صورت با فرض اینکه*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix}$$

مسأله‌ی

$$Ly = 0 \quad , \quad M_1 y = M_2 y = 0$$

دارای جواب غیر بدیهی است اگر و تنها اگر

$$\Delta(\phi_1, \phi_2) \triangleq det(D\Phi(a) - C\Phi(b)) = 0.$$

اگر $\Delta(\phi_1, \phi_2) \neq 0$، آن‌گاه برای هر $f \in C[a, b]$ و برای هر p و q مسأله‌ی

$$Ly = f \quad , \quad M_1 y = p, M_2 y = q$$

جواب منحصر به فرد دارد.

برهان. جواب غیر بدیهی ϕ از $Ly = 0$ وجود دارد اگر و تنها اگر ثابت‌های c_1 و c_2 (که همزمان صفر نیستند) وجود داشته باشند به طوری که $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ و

$$M_i\phi = c_1 M_i\phi_1 + c_2 M_i\phi_2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

دو ثابت غیر صفر c_1 و c_2 وجود دارند اگر و تنها اگر

$$det \begin{bmatrix} M_1\phi_1 & M_1\phi_2 \\ M_2\phi_1 & M_2\phi_2 \end{bmatrix} = \Delta(\phi_1, \phi_2) = 0.$$

اگر $\Delta(\phi_1, \phi_2) \neq 0$ و f، p و q را داشته باشیم، رابطه‌ی

$$\phi_p(t) = \int_a^t \left[\phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_2(t)\phi_1(s)\right] \left[\frac{f(s)}{W(\phi_1, \phi_2)}(s)\right] ds$$

را تعریف می‌کنیم که ϕ_p جواب خصوصی $Ly = f$ است. حال c_1 و c_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \phi_p$$

در شرایط مرزی $M_1\phi = p$ و $M_2\phi = q$ صدق کند. بنابراین داریم:

$$c_1 M_1\phi_1 + c_2 M_1\phi_2 + M_1\phi_p = p,$$
$$c_1 M_2\phi_1 + c_2 M_2\phi_2 + M_2\phi_p = q.$$

چون $\Delta(\phi_1, \phi_2) \neq 0$، مسأله دارای جواب منحصر به فرد است، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1\phi_1 & M_1\phi_2 \\ M_1\phi_1 & M_1\phi_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p - M_1\phi_p \\ q - M_2\phi_p \end{bmatrix}.$$

$\square$

لم ۵.۱.۱. *مسأله‌ی (P_g) خودالحاق است.*

برهان. با توجه به تعریف L و انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} I &\triangleq \int_a^b \big[(Ly)\overline{z} - y(L\overline{z})\big]ds = \int_a^b \big[(ky')'\overline{z} - (k\overline{z}')'y\big]ds \\ &= \big[ky'\overline{z} - k\overline{z}'y\big]_a^b = k(b)det\Phi(b) - k(a)det\Phi(a), \end{aligned}$$

که در آن

$$\Phi = det \begin{bmatrix} \overline{z} & y \\ \overline{z}' & y' \end{bmatrix}.$$

اگر $detC \neq 0$ آن‌گاه چون $\overline{z}$ و $\overline{y}$ در شرایط مرزی صدق می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که $C\Phi(b) = D\Phi(a)$، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} I &= \frac{k(b)}{detC}[detC\Phi(b)] - k(a)det\Phi(a) \\ &= \frac{k(b)}{detC}[detD\Phi(a)] - k(a)det\Phi(a) \\ &= \Big[\frac{k(b)detD}{detC} - k(a)\Big]det\Phi(a) \end{aligned}$$

و با توجه به (۳.۱) نتیجه می‌شود که $I = 0$. اگر $detC = detD = 0$ بدون اینکه به کلیت مسأله خللی وارد شود مسأله‌ی (P_g) به مسأله‌ی (P) تبدیل می‌شود، بنابراین $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ و همچنین داریم:

$$\begin{bmatrix} \alpha\overline{z}(a) - \beta\overline{z}'(a) \\ \alpha y(a) - \beta y'(a) \end{bmatrix} = \Phi(a)^T \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $det\Phi(a) = 0$. به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که $det\Phi(b) = 0$ و بنابراین $I = 0$. $\square$

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه‌ی $\{\psi_m\}$ از توابع $\psi_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ متعامد نسبت به تابع وزن $\rho(t) \in \mathbb{R}^+$ نامیده می‌شوند هرگاه داشته باشیم:

$$\langle \psi_m, \psi_k \rangle_\rho = \int_a^b \psi_m(t)\overline{\psi_k}(t)\rho(t)dt = 0, \quad m \neq k$$

واضح است که چون $<.,.>_\rho$ یک ضرب داخلی روی $\mathbb{C}[a,b]$ تعریف می‌کند، اگر $m = k$ باشد، آن‌گاه $\langle \psi_m, \psi_k \rangle_\rho$ مقداری مثبت است. اگر $\langle \psi_m, \psi_k \rangle_\rho = 1$ باشد، آن‌گاه به ازای هر m، $\{\psi_m\}$ را نرمال شده می‌نامند.

قضیه ۷.۱.۱. *برای مسأله (P_g) روابط زیر برقرار هستند:*
۱) تمام مقادیر ویژه، حقیقی مقدار هستند.
۲) توابع ویژه‌ی ϕ_m و ϕ_n متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز λ_m و λ_n متعامدند به عبارت دیگر داریم:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho = 0.$$

در نتیجه تمام مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی (P)، ساده هستند.

برهان. چون $L\phi_m = -\lambda_m\phi_m\rho$ و $L\phi_n = -\lambda_n\phi_n\rho$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_m\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho &= \langle \lambda_m\rho\phi_m, \phi_n \rangle = -\langle L\phi_m, \phi_n \rangle \\ &= -\langle \phi_m, L\phi_n \rangle = \langle \phi_m, \lambda_m\rho\phi_n \rangle = \overline{\lambda_n}\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho.\end{aligned}$$

برای اثبات قسمت (۱) فرض کنیم که $m = n$ باشد. چون $\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho \neq 0$ داریم $\lambda_m = \overline{\lambda_n}$. بنابراین λ_m، مقداری حقیقی است. برای اثبات قسمت (۲) فرض کنیم که $m \neq n$ باشد. چون $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$ داریم:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho = 0.$$

اما اگر $\lambda_m \neq \lambda_n$، نتیجه می‌گیریم که $\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho = 0$. □

قضیه ۸.۱.۱. *در مسأله (P) تعداد مقادیر ویژه نامتناهی است و داریم: $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ و هنگامی که $m \to \infty$، $\lambda_m \to \infty$. هر مقدار ویژه‌ی λ_m ساده است، توابع ویژه‌ی ϕ_m دقیقاً m صفر در بازه‌ی $a < t < b$ دارند و صفرهای ϕ_m در بین صفرهای ϕ_{m+1} قرار دارند.*

برهان. به صفحه‌ی ۱۲۵ از [۲۳] رجوع کنید. □

۲.۱ نمادهای O و o

فرض می‌کنیم $f(z)$ و $g(z)$ با متغیر مختلط z روی دامنه D باشند و حدشان هنگامی که $z \to z_0$ در D موجود باشد. نمادهای O و o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۲.۱. گوییم $f(z) = O(g(z))$ هنگامی $z \to z_0$، هرگاه ثابت‌های مثبتی چون K و δ موجود باشند به طوری که برای $0 < |z - z_0| < \delta$ داشته باشیم: $|f| \leq K|g|$.
همچنین گوییم $f(z) = o(g(z))$ هنگامی $z \to z_0$، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، داشته باشیم $|f| \leq \epsilon|g|$، هنگامی که z متعلق به یک δ -همسایگی کوچک از z_0 باشد.

واضح است که در صورت بی‌کران بودن D، z_0 می‌تواند برابر بی‌نهایت نیز شود. در مسائل آنالیز مجانبی z_0 اکثراً برابر صفر یا بی‌نهایت گرفته می‌شود در غیر این صورت واضح است که این حالت می‌تواند با تغییر متغیر $\zeta = z - z_0$ ایجاد شود. تا زمانی که $g(z)$ در یک همسایگی از z_0 صفر نشود (مگر احتمالاً در z_0) رابطه‌ی $f = o(g)$ نتیجه می‌دهد که $\frac{f}{g} \to 0$، هنگامی که $z \to \infty$ ، در حالی که رابطه‌ی $f = O(g)$ نتیجه می‌دهد که $\frac{f}{g}$ کران‌دار است.
واضح است که اگر $f(z) = o(g(z))$ هنگامی که $z \to z_0$، آنگاه $f(z) = O(g(z))$ هنگامی که $z \to z_0$. اما از آنجایی که مفهوم O اطلاعات دقیقی از تابع را در نقطه‌ی مورد نظر می‌دهد، لذا در آنالیز مجانبی مفهوم O از مفهوم o مهم‌تر است. برای مثال اگر $f(z) \to 0$ هنگامی که $z \to 0$، مفهوم O بیان می‌دارد که $f(z)$ با چه سرعتی به صفر میل می‌کند، در حالی که مفهوم o صرفاً مشخص می‌کند که $f(z) \to 0$. برای روشن شدن این مطلب مثال زیر را در نظر می‌گیریم.
از اینکه $\sin z = z + O(z^3)$ هنگامی که $z \to 0$ نتیجه می‌گیریم $z - \sin z$ دقیقاً مثل z^3 به صفر میل می‌کند، در حالی که برای $n = 1, 2$، $\sin z = z + o(z^n)$ هنگامی که $z \to 0$، نتیجه می‌دهد که $z - \sin z$ به ترتیب سریعتر از z و z^2 به صفر میل می‌کند.
توجه به این نکته نیز لازم است که مرتبه یک تابع الزاماً از توان ساده نیست برای مثال $z^2 \log z + z^3 = O(z^2 \log z)$ هنگامی که $z \to 0$. دامنه D نقش بسیار مهمی در روابط مرتبه و در کل در آنالیز مجانبی ایفا می‌کند. برای مثال تابع $f(z) = 2z + z\cos z$ به ازای z های حقیقی توسط z و $3z$ کران‌دار می‌شود لذا برای z حقیقی داریم $f(z) = O(z)$ هنگامی که $z \to \infty$. اما اگر z را موهومی محض با رابطه‌ی $z = iy$ در نظر بگیریم آن‌گاه هنگامی که z در امتداد محور موهومی به بی‌نهایت میل می‌کند، $f(z) = O(ye^y)$.

۱.۲.۱ روابط جبری O و o

هنگامی که $z \to z_0$ آن‌گاه $o(f(z)) \pm o(f(z)) = o(f(z))$.
همچنین اگر $c \geq 0$ باشد، آن‌گاه
۱) $o(cf(z)) = o(f(z))$
۲) $O(cf(z)) = O(f(z))$
۳) $f(z).o(g(z)) = o(f(z)g(z))$
۴) $o(o(f(z))) = o(f(z))$
و همچنین اگر $f(z) = O(g(z))$ باشد، آن‌گاه
۱) $O(o(f(z))) = o(O(f(z))) = o(g(z))$
۲) $O(f(z))O(g(z)) = O(f(z)g(z))$
۳) $O(f(z))o(g(z)) = o(f(z))o(g(z)) = o(f(z)g(z))$.

۳.۱ بسط‌های مجانبی

تعریف ۱.۳.۱. (تعریف دنباله‌ی مجانبی): یک دنباله‌ی متناهی یا نامتناهی از توابع $\{\phi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی مجانبی گوییم هنگامی که $z \to z_0$، هرگاه به ازای هر n داشته باشیم:

$$\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z)) \tag{۴.۱}$$

به طوری که $\lim_{z \to z_0} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = 0$.

تعریف (۴.۱) بر این اساس است که هیچ صفری از $\phi_n(z)$ مگر احتمالاً خود z_0 در یک همسایگی از z_0 وجود نداشته باشد.
به طور مثال دنباله‌ی توابع $\{e^z z^{-a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ به طوری که $a_{n+1} > a_n$ باشد، یک دنباله‌ی مجانبی است هنگامی که $z \to \infty$ زیرا :

$$\frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = \frac{e^z z^{-a_{n+1}}}{e^z z^{-a_n}} = z^{-(a_{n+1}-a_n)} \to 0.$$

با توجه به روابط جبری مرتبه و رابطه‌ی (۴.۱) می‌توان دنباله‌های مجانبی جدیدی را از ترکیب دنباله‌های مجانبی به‌دست آورد. با انتگرال‌گیری از یک دنباله‌ی مجانبی، یک دنباله‌ی مجانبی به‌دست خواهد آمد اما مشتق یک دنباله‌ی مجانبی لزوماً یک دنباله‌ی مجانبی نخواهد بود.

تعریف ۲.۳.۱. (تعریف بسط مجانبی): اگر $\{\phi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ هنگامی که $z \to z_0$ یک دنباله‌ی مجانبی از توابع باشد گوییم $\sum_{n=1} a_n\phi_n(z)$ که در آن a_nها مقادیر ثابتی هستند، یک بسط مجانبی یا یک تقریب مجانبی از تابع $f(z)$ است، اگر برای هر N داشته باشیم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n\phi_n(z) + o(\phi_N(z)). \qquad (۵.۱)$$

رابطه‌ی (۵.۱) تعریف پوانکاره[۲] از یک بسط مجانبی می‌باشد. بسط مجانبی تابع $f(z)$ تنها روی دامنه‌هایی معتبر است که دنباله‌ی $\{\phi_n(z)\}$ روی آن‌ها یک دنباله‌ی مجانبی باشد.
رابطه‌ی (۵.۱) را می‌توانیم به صورت

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n\phi_n(z) + O(\phi_N(z)) \qquad (۶.۱)$$

بازنویسی کنیم که در آن خطا، از مرتبه‌ی اولین جمله‌ای است که حذف شده است و در آن N مقدار دلخواهی است. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(z)$ یک بسط مجانبی برای تابع $f(z)$ باشد هنگامی که $z \to z_0$، آن‌گاه می‌توان گفت:

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(z) \qquad (۷.۱)$$

از رابطه‌ی (۷.۱) نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(z)$ به عنوان یک سری همگرا وجود دارد و این رابطه تنها نشان می‌دهد که رابطه‌ی (۵.۱) به ازای هر N، وجود دارد. البته ممکن است یک بسط مجانبی همگرا باشد که در این حالت کاربرد کمتری نسبت به حالت واگرایی دارد. چون اگر سری مجانبی واگرا باشد به ازای هر z، ، تنها تعداد کمی از جملات برای دادن تقریب دقیقی از تابع مورد نیازند اما در حالتی که سری مجانبی همگرا باشد این طور نیست. اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آن‌گاه سری تیلور در z_0 یک بسط مجانبی همگرا می‌باشد. اگر بسط مجانبی $f(z)$ برای یک دنباله‌ی مجانبی $\{\phi_n(z)\}$ وجود داشته باشد، بسط مجانبی منحصر به فرد است و a_n ها را با توجه به حدهای زیر

[۲] Poincare

به‌دست می‌آوریم:

$$a_1 = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\phi_1(z)}$$
$$a_2 = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - a_1\phi_1(z)}{\phi_2(z)}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \lim_{z\to z_0} \{\frac{f(z) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n\phi_n(z)}{\phi_N(z)}\}.$$

تعریف ۳.۳.۱. (تعریف جمله‌ی غالب یا پیشرو در بسط مجانبی): اولین جمله‌ی غیر صفر در بسط مجانبی $\sum_{n=1} a_n\phi_n(z)$ را جمله‌ی غالب یا جمله‌ی پیشرو در این بسط می‌نامیم.

در تعداد زیادی از مثال‌های کاربردی دنباله‌ی مجانبی را نمی‌توانیم به‌دست آوریم اما به‌دست آوردن جمله‌ی غالب ساده است و غالباً تنها این جمله مورد نیاز است.

۴.۱ مفاهیمی از آنالیز مختلط

تعریف ۱.۴.۱. تابع $f(z)$ را در نقطه‌ی z_0 تحلیلی گوییم هرگاه f در یک همسایگی از نقطه‌ی z_0 مشتق پذیر باشد و همچنین تابع f در ناحیه‌ی D تحلیلی گفته می‌شود هرگاه در هر نقطه از D مشتق پذیر باشد.

تعریف ۲.۴.۱. نقطه‌ی z_0 را نقطه‌ی تکین تابع f می‌نامند هرگاه f در z_0 تحلیلی نباشد ولی در نقطه‌ای در هر همسایگی z_0 تحلیلی باشد. نقطه‌ی تکین z_0 را منفرد می‌گویند هرگاه علاوه بر این، همسایگی محذوفی از z_0 موجود باشد که f در سراسر آن تحلیلی باشد.

قضیه ۳.۴.۱. *(قضیه‌ی کوشی) اگر f تابعی تحلیلی در درون و روی مسیر بسته‌ی C باشد، آنگاه*
$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

برهان. به صفحه‌ی ۲۵۰ از [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۴.۴.۱. *(قضیه‌ی انتگرال کوشی) اگر تابع f در داخل و روی مسیر بسته‌ی C تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه در درون C باشد، آنگاه*
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$

برهان. به صفحه‌ی ۲۷۳ از [۱] رجوع کنید. □

قضیه ۵.۴.۱. *(تعمیم قضیه‌ی انتگرال کوشی) اگر تابع f در داخل و روی مسیر بسته‌ی C تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه در درون C باشد، آنگاه*

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

برهان. به صفحه‌ی ۲۸۳ از [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۶.۴.۱. سری توابع $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ را که شامل توان‌های مثبت، صفر و منفی از $(z-z_0)$ باشد، یک سری لوران به مرکز z_0 و ضرایب a_n می‌نامیم. سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ و $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ را به ترتیب قسمت‌های عادی و اصلی سری لوران می‌نامیم.

(ناحیه‌ی همگرایی یک سری لوران): یک سری لوران در یک نقطه همگراست، هرگاه قسمتهای عادی و اصلی آن هر دو در آن نقطه همگرا باشند.
فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ و $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ به ترتیب قسمت‌های عادی و اصلی یک سری لوران باشند. اگر $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}}$ شعاع همگرایی قسمت عادی و $R = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}$ آن‌گاه قسمت عادی در داخل دایره‌ی $|z-z_0| = r$ و قسمت اصلی در خارج دایره‌ی $|z-z_0| = R$ همگرا هستند. بنابراین سری لوران وقتی که $R < r$ باشد، همگراست. در این حالت سری لوران در ناحیه‌ی حلقوی $D = \{z|\ R < |z-z_0| < r\}$ همگرا و در هر زیر مجموعه‌ی بسته‌ی آن همگرای یکنواخت است. از آنجا که قسمت عادی سری لوران در داخل دایره‌ی $|z-z_0| = r$ و قسمت اصلی آن در خارج دایره‌ی $|z-z_0| = R$ معرف توابع تحلیلی‌اند، پس سری لوران در ناحیه‌ی حلقوی D معرف یک تابع تحلیلی است.

تعریف ۷.۴.۱. می‌گوییم تابع مختلط f روی ناحیه‌ی حلقوی $D = \{z|\ 0 \le R < |z-z_0| < r\}$ بسط لوران دارد هرگاه سری لورانی چون $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ وجود داشته باشد به طوری که روی D همگرا به f باشد، یعنی

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\ ,\quad z\in D$$

قضیه ۸.۴.۱. *بسط لوران f حول ناحیه‌ی حلقوی $D = \{z|\ 0 \le R < |z-z_0| < r\}$ در صورت وجود یکتاست.*

برهان. به صفحه‌ی ۳۶۰ از [۱] رجوع کنید. □