وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

دوگان برای برنامه‌ریزی صحیح

استاد راهنما
دکتر علیرضا غفاری حدیقه

پژوهشگر
عارفه بیاض

مهر ماه ۱۳۹۰
تبریز - ایران

بسم الله الرّحمن الرّحیم

تقدیم به

پدر بزرگوارم

و مادر فداکارم

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است.

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس گزاری...

سپاس بی‌پایان، جهان آفرینی را سزاست که هستی را پر از اسرار و محصول آن را موجودی اسرارآمیزتر به نام انسان قرار داده است. طبیعت کتاب آفرینش خداست و هر چه درباره آن تحقیق و مطالعه بیشتری انجام گیرد رموز و اسرار آن بیشتر تجلی می‌کند و سلام و صلوات فراوان به ستوده‌ترین فرزندان آدم، حضرت محمد(ص)، که بشریت را به دنیای سعادت و روشنایی جاودان رهبری فرمود.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایتهای بی‌دریغ و مساعدت‌های استاد راهنمایم، جناب آقای دکتر علیرضا غفاری‌حدیقه سپاس گزاری نمایم.

از آقایان دکتر بهروز خیرفام و دکتر محمود شیخ الاسلامی، سپاسگزارم که قبول زحمت فرمودند و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

همچنین تشکر می‌کنم از پدر و مادر عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند و بوسه می‌زنم بر دستان همه‌ی اساتید دوران تحصیلم، که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم، باشد که روزی مایه افتخار آنها باشم. همچنین از دیگر اساتید گران‌مایه گروه ریاضی و نیز کلیه مسئولین دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت معلم آذربایجان، قدردانی می نمایم.

عارفه بیاض

مهر ماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست مخفف‌ها

فهرست الگوریتم‌ها

فهرست نمادها

چکیده

مساله بهینه‌سازی صحیح (IP) یک نوع از مساله بهینه‌سازی است که در آن تمام یا بعضی از متغیرهای تصمیم ملزم به صحیح بودن هستند. روش‌های حلی مانند صفحه برشی، شاخه و کران،... برای مسائل بهینه‌سازی صحیح ارائه شده‌اند که این روش‌ها دارای نقص‌هایی است، یا جواب تقریبی تولید می‌کنند یا زمان اجرای آن‌ها نمایی است و تا به حال هیچ الگوریتم کارایی برای این نوع مسائل ابداع نشده است که زمان اجرای آن‌ها چندجمله‌ای باشد. با توجه به اینکه دوگان یک مساله بهینه‌سازی به لحاظ یافتن کران‌هایی برای مساله اولیه حائز اهمیت است، بهینه‌سازی صحیح نیز نظریه دوگانی دارد و کران‌هایی برای هزینه بهینه تولید می‌کند که در روش شاخه و کران مورد استفاده قرار می‌گیرند. دوگان‌های متعددی برای این نوع مسائل ارائه شده‌اند که در این پایان‌نامه دوگان‌های لاگرانژی و جایگزین ارائه شده برای مسائل بهینه‌سازی صحیح را شرح می‌دهیم و این دو دوگان را با هم مقایسه می‌کنیم. با توجه به مطالعاتی که ریاضی‌دانان سال‌ها در این زمینه انجام داده‌اند این نتایج به‌دست آمده که، کران تولید شده از دوگان جایگزین از کران دوگان لاگرانژی بهتر است اما محاسبات دوگان جایگزین بیشتر است. همچنین قضیه دوگانی ضعیف در هر دو دوگان برقرار است اما قضیه دوگانی قوی در حالت کلی، برای هر دو دوگان برقرار نیست. روابط دیگری بین این دو دوگان وجود دارند که در این پایان‌نامه به تفصیل بیان خواهد شد.

کلمات کلیدی: مساله بهینه‌سازی صحیح، مساله تخفیف‌یافته، دوگان لاگرانژی، دوگان جایگزین.

پیشگفتار

بهینه‌سازی خطی در طی جنگ جهانی دوم، به منظور کاهش هزینه ارتش خودی و افزایش خسارت دشمن، گسترش یافت. یک ریاضی‌دان روسی به نام کانترویچ [۱] در سال ۱۹۳۹ مساله بهینه‌سازی خطی را ابداع کرد[۲۴]. این موضوع تا سال ۱۹۴۷ به صورت سری بود. روش حلی برای این نوع مسائل، به نام روش سادک توسط دانتزیک [۲] در سال ۱۹۴۷ ارائه شد[۸]و در همان سال نیومن [۳] نظریه دوگانی را مطرح کرد[۳۲]. روش‌های حل دیگری برای مساله بهینه‌سازی خطی به نام روش‌های نقطه درونی توسط کارمارکار [۴] در سال ۱۹۸۴ ارائه شده است [۲۰]. یکی از انواع مسائل بهینه‌سازی، مساله بهینه‌سازی صحیح است که در آن بعضی یا تمامی متغیرهای تصمیم مقید به صحیح بودن هستند. مساله بهینه‌سازی صحیح به دو نوع خطی و غیرخطی تفکیک می‌شود بسته به اینکه تابع هدف و قیود مساله خطی یا غیرخطی باشند.

چند روش حل که برای این نوع مسائل ارائه شده‌اند به شرح زیر است:

۱- روش صفحه‌برشی : یکی از انواع این روش، روش صفحه‌برشی گاموری [5] است. این روش اولین الگوریتم خاتمه‌پذیر است که در سال ۱۹۵۸ توسط گاموری ابداع شده است [۱۷، ۱۸].

---

۱ L.V.Kantorovich
۲ George B.Dantzig
۳ V.Neumann
۴ N.Karmarkar
5 Gomory

۲- روش شاخه و کران : این روش از روند تقسیم و پیشروی برای بررسی مجموعه جواب‌های شدنی صحیح استفاده می‌کند و از کران‌های موجود بر هزینه بهینه استفاده می‌کند تا قسمت‌های معینی از مجموعه جواب‌های شدنی صحیح را بررسی نکند [۵، ۳۶]. روش دیگری مانند روش برنامه‌ریزی پویا که مسائل را به طور دنباله‌ای حل می‌کند وجود دارد [۳، ۴] . اما همه‌ی الگوریتم‌های موجود دو نقص دارند:
یا زمان اجرای آن‌ها نمایی است یا این‌که فقط یک جواب تقریبی به وجود می‌آورند. همان‌طور که می‌دانید نظریه دوگانی در بهینه‌سازی خطی نقش مرکزی دارد. دوگان یک مساله بهینه‌سازی خطی به لحاظ یافتن کران‌هایی برای مساله اولیه حائز اهمیت است. بهینه‌سازی صحیح نیز یک نظریه دوگانی دارد و کران‌هایی برای تابع هدف تولید می‌کند، که در روش شاخه و کران مورد استفاده قرار می‌گیرند. دوگان‌های متعددی برای این نوع مسائل ارائه شده‌اند که در این قسمت به معرفی برخی از این دوگان‌ها می‌پردازیم. دوگان‌های ارائه شده برای مسائل بهینه‌سازی صحیح به شرح زیر است:

۱- دوگان لاگرانژی [۱۱، ۱۲، ۱۴].

۲- دوگان جایگزین [۱۵، ۳۰].

۳- دوگان ابرجمعی [۷، ۳۷].

در این پایان‌نامه دوگان لاگرانژی و دوگان جایگزین را شرح می‌دهیم و ارتباط بین این دو دوگان را بیان می‌کنیم.

دوگان لاگرانژی :

ویژگی‌های اصلی نظریه دوگان لاگرانژی برای مسائل بهینه‌سازی صحیح، اولین بار توسط اورت [۶] در سال ۱۹۶۳ بیان شده‌است [۱۱]. روش‌های لاگرانژی برای بهینه‌سازی صحیح خطی، به طور گسترده از سال ۱۹۷۴ تا ۱۹۸۱ توسط بل [۷] و شاپیرو[۸][۶]، فیشر [۹][۱۲]،

[۶] Everett
[۷] Bell
[۸] Shapiro
[۹] Fisher

فیشر و شاپیرو [۱۳] و ژئوفرین [10][۱۴] مطالعه شده است. یک بررسی از کاربرد روش لاگرانژی در بهینه‌سازی صحیح در [۳۳] بیان شده است. ویژگی‌های تخفیف‌یافته لاگرانژی برای قیدهای خطی مسائل بهینه‌سازی صحیح محدب در [۹] بررسی شده است. استفاده از روش زیرگرادیان برای حل مسائل بهینه‌سازی صحیح در [۱۹] ارائه شده است. همچنین روش‌های زیرگرادیان برای کمینه‌سازی مسائل محدب ناهموار در [۳۴] بیان شده است.

دوگان جایگزین :

دوگان جایگزین ابتدا برای مسائل بهینه‌سازی پیوسته توسط لئونبرگر [11] در سال ۱۹۶۸ [۳۰] و گرینبرگ [12] و پیرسکلا [13] در سال ۱۹۷۰ [۱۵] مطرح شده است. همچنین دوگان جایگزین برای بهینه‌سازی صحیح خطی در [۱۶، ۲۲، ۲۳] به کار رفته است. می‌توان روش‌های جستجوی دوگان جایگزین برای بهینه‌سازی صحیح خطی را در [۱۰، ۳۵] یافت. یک روش همگرا برای جستجوی دوگان بر پایه زیرگرادیان نیز در [۲۵] بیان شده است. روابطی بین دوگان لاگرانژی و دوگان جایگزین وجود دارند که توسط کاروان [14] در سال ۱۹۷۹ مطرح شده است [۲۱]. در این پایان‌نامه از کتاب‌ها و مقالات متعددی استفاده شده است به ویژه از مراجع [۲۶، ۵، ۲۱] به طور مستقیم استفاده شده است.

فصل اول این پایان‌نامه شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی است. در فصل دوم دوگان لاگرانژی را شرح می‌دهیم و دوگان جایگزین را در فصل سوم بیان می‌کنیم. در فصل چهارم به برخی روابط بین دوگان‌های لاگرانژی و جایگزین اشاره می‌کنیم. فصل پنجم نتایج و کارهایی که در تکمیل این پایان‌نامه می‌توان انجام داد را بیان می‌کنیم.

[10] Geoffrion
[11] Luenberger
[12] Greenberg
[13] Pierskalla
[14] Mark H. Karwan

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ بهینه‌سازی خطی

در این بخش بهینه‌سازی خطی (LP) را معرفی می‌کنیم. بهینه‌سازی خطی، کمینه‌سازی (یا بیشینه‌سازی) یک تابع هدف خطی با قیدهایی به صورت معادله و یا نامعادله خطی است. یک مساله بهینه‌سازی خطی استاندارد اولیه به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad (LP)$$

به طوری‌که $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $c, x \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$.

لازم به ذکر است که $m < n$ و ماتریس A از رتبه کامل است. به ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل گفته می‌شود هرگاه $\operatorname{rank}(A) = \min\{m, n\}$. هر بردار $x \geq 0$ را که در قید $Ax = b$ صدق کند یک جواب شدنی گویند. مجموعه همه‌ی جواب‌های شدنی را مجموعه‌ی شدنی یا ناحیه شدنی و تابع $c^T x$ را تابع هدف یا تابع هزینه می‌نامند. یک جواب شدنی x^* را که تابع هدف را کمینه کند، یک جواب بهینه و $c^T x^*$ را هزینه بهینه گویند.

اگر در یک مساله‌ی بهینه‌سازی خطی، محدودیت‌ها ناسازگار باشند، به‌طوری‌که مساله جواب شدنی نداشته باشد (یا ناحیه‌ی شدنی تهی باشد)، در این صورت مساله نشدنی نامیده می‌شود. همچنین در حالتی که تابع هدف یک مساله بهینه‌سازی خطی روی ناحیه شدنی متناظر بی‌کران باشد، مساله بی‌کران و در غیر این صورت، کران‌دار نامیده می‌شود.

به طور کلی، همه حالت‌های ممکن که در مسائل بهینه‌سازی خطی پیش می‌آیند، در زیر خلاصه می‌شود:

۱. وجود جواب بهینه منحصربه فرد: جواب بهینه وجود دارد و منحصر به فرد است.

۲. وجود جواب بهینه متناهی دگرین : مجموعه جواب‌های بهینه نامتناهی اما مقدار بهینه تابع هدف متناهی است.

۳. وجود جواب بهینه نامتناهی : ناحیه شدنی بی‌کران و مقدار بهینه نامتناهی است.

۴. عدم وجود جواب شدنی: ناحیه شدنی تهی است.

تعریف ۱.۱. به مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ یک **چندوجهی** گفته می‌شود که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b برداری در $\mathbb{R}^m$ است. به ویژه، مجموعه‌ای به صورت

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq ۰\}$$

نیز یک چندوجهی است که به آن چندوجهی استاندارد می‌گوییم. بنابراین مجموعه شدنی یک مساله بهینه‌سازی خطی، یک چندوجهی است.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X یک چندوجهی است. بردار $x \in X$ را یک **نقطه راسی** X می‌گوییم هرگاه نتوان بردارهای y و z در X ، هر دو متمایز از x ، و عدد $\lambda \in (۰, ۱)$ را یافت به طوری که $x = \lambda y + (۱ - \lambda)z$.

چندوجهی $X \subset \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که با قیدهای معادله و نامعادله زیر تعریف شده است :

$$\begin{aligned} \left(a^i\right)^T x \geq b_i \quad &, \quad i \in M_۱ \\ \left(a^i\right)^T x \leq b_i \quad &, \quad i \in M_۲ \\ \left(a^i\right)^T x = b_i \quad &, \quad i \in M_۳ \end{aligned}$$

که $M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ مجموعه‌هایی متناهی از اندیس‌ها هستند که برای $i \in M_k$ و $k = ۱, ۲, ۳$ ، a^i برداری در $\mathbb{R}^n$ و b_i یک عدد است.

تعریف ۳.۱. اگر بردار x^* در $\left(a^i\right)^T x = b_i$ به‌ازای بعضی i در $M_۱, M_۲, M_۳$ صدق کند، آن‌گاه قید متناظر را در x^* **موثر** یا **فعال** می‌گوییم.

اگر n قیدموثر در x^* وجود داشته باشد آن‌گاه x^* در یک دستگاه n معادله و n مجهول مشخص صدق می‌کند. این دستگاه یک جواب منحصربه فرد دارد اگر و تنها اگر n معادله آن مستقل‌خطی باشند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید چندوجهی X با قیدهای معادله و نامعادله تعریف شده و x^* عضوی از $\mathbb{R}^n$ است. بردار x^* را یک **جواب پایه‌ای** می‌گوییم هرگاه، همه قیدهای معادله فعال باشند و در بین قیدهایی که در x^* فعال هستند n قید مستقل‌خطی وجود داشته باشد. اگر x^* یک جواب پایه‌ای باشد که در همه قیدها صدق کند، آن‌گاه آن را یک **جواب شدنی پایه‌ای** می‌گوییم.

قضیه ۱.۱. [۵] *فرض کنید X یک چندوجهی ناتهی است و $x^* \in X$. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:*

الف- x^* یک راس چندوجهی است.

ب- x^* یک جواب شدنی پایه‌ای چندوجهی است.

نتیجه ۱.۱. *تعداد متناهی قید نامعادله و معادله خطی در نظر بگیرید. در این صورت فقط تعداد متناهی جواب پایه‌ای یا شدنی پایه‌ای وجود دارد.*

برهان. دستگاهی شامل $(m+n)$ قید نامعادله و معادله خطی برحسب $x \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. در هر جواب پایه‌ای، n قید مستقل خطی فعال وجود دارد. چون هر n قید مستقل خطی فعال، یک نقطه منحصربه فرد را تولید می‌کند، پس جواب‌های پایه‌ای متمایز، باید متناظر با مجموعه‌های مختلفی شامل n قید مستقل خطی فعال باشند. بنابراین تعداد جواب‌های پایه‌ای از بالا کراندار به تعداد راه‌های انتخاب n قید از $(m+n)$ قید است که یک عدد متناهی است. □

تعریف ۵.۱. فرض کنید X یک چندوجهی باشد و $x \in X$. بردار $d \in \mathbb{R}^n$ را یک **جهت شدنی** در x می‌گوییم هرگاه عدد مثبتی مانند θ وجود داشته باشد به طوری‌که $x + \theta d \in X$.

تعریف ۶.۱. یک **شعاع** ، مجموعه‌ی نقاط به شکل $\{x^\circ + \lambda d : \lambda \geq \circ\}$ است که در آن d یک بردار ناصفر ، x° راس شعاع و d جهت شعاع است.

جهت راسی یک مجموعه، جهتی از مجموعه است که نتوان آن را به صورت ترکیب خطی مثبتی از دو جهت شدنی متمایز در X نوشت. به هر شعاعی در یک مجموعه محدب که جهت آن راسی است، شعاع راسی گفته می‌شود.

قضیه ۲.۱. (قضیه نمایش)[۱] *فرض کنید $X = \{x : Ax \leq b, x \geq \circ\}$ یک چندوجهی ناتهی است. پس مجموعه نقاط راسی ناتهی و دارای تعداد متناهی بردار، مانند $x^۱, ..., x^k$ است. علاوه بر این، مجموعه جهت‌های راسی تهی است اگر و تنها اگر X کراندار باشد. اگر X بی‌کران باشد، آن‌گاه مجموعه جهت‌های راسی ناتهی است و دارای تعداد متناهی بردار، مانند $d^۱, ..., d^l$ است. علاوه بر این، $\overline{x} \in X$ اگر و تنها اگر آن را بتوان به صورت ترکیب محدبی از $x^۱, ..., x^k$ و ترکیب نامنفی از $d^۱, ..., d^l$ نوشت. یعنی $\overline{x} \in X$ اگر و تنها اگر*

$$\overline{x} = \sum_{j=۱}^{k} \lambda_j x^j + \sum_{i=۱}^{l} \mu_i d^i,$$

$$\sum_{j=۱}^{k} \lambda_j = ۱,$$

$$\lambda_j \geq \circ, \quad j = ۱, ..., k \qquad , \mu_i \geq \circ, \quad i = ۱, ..., l.$$

۲.۱ نظریه دوگانی

در این بخش، با یک مساله بهینه‌سازی خطی اولیه شروع می‌کنیم و مساله بهینه‌سازی خطی دیگری را، که به آن مساله دوگان گویند، می‌سازیم. نظریه دوگانی، به ارتباط بین این دو مساله می‌پردازد و ساختار درونی بهینه‌سازی خطی را روشن می‌سازد.

مساله اولیه بهینه‌سازی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \qquad (LP)$$

دوگان این مساله به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y + z = c, \\ & z \geq 0, \end{aligned} \qquad (D)$$

که در آن‌ها $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $c, x, z \in \mathbb{R}^n$ و $b, y \in \mathbb{R}^m$. در مساله دوگان (D)، هر بردار (y, z) را که $z \geq 0$ و در قید $A^T y + z = c$ صدق کند یک جواب شدنی دوگان می‌نامند.

قضیه‌ی بعدی که قضیه‌ی دوگانی ضعیف نامیده شده است، اولین خاصیت دوگانی را بیان می‌کند.

قضیه ۳.۱. [۳۶] *اگر بردار x یک جواب شدنی برای مساله (LP) و بردار (y, z) یک جواب شدنی برای مساله (D) باشد، آن‌گاه $b^T y \leq c^T x$.*

طبق قضیه ۳.۱، هر جواب شدنی دوگان، یک کران پایین برای هزینه بهینه مساله‌ی اولیه است. به عدد حقیقی مثبتی که از تفاضل $c^T x$ و $b^T y$، برای هر جواب شدنی اولیه x و هر جواب شدنی دوگان (y, z) به‌دست می‌آید، **شکاف دوگانی** گفته می‌شود.

در ادامه، دومین خاصیت دوگانی را با عنوان قضیه‌ی دوگانی قوی بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۱. [۳۶] *اگر مساله‌ی (LP) جواب بهینه داشته باشد، آن‌گاه مساله‌ی (D) هم جواب بهینه دارد و مقدارهای بهین تابع هدف هر دو مساله با هم برابرند.*

در مساله‌ی بهینه‌سازی خطی، مجموعه جواب‌های بهینه تهی است اگر و تنها اگر مساله نشدنی و یا بی‌کران باشد. نتایج بعدی از قضیه‌ی دوگانی قوی استنتاج می‌شود.