دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی ، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

برنامه‌ریزی هندسی پوزینمیال با ضرایب و توان‌های بازه‌ای

استاد راهنما

دکتر منصور سراج

استاد مشاور

دکتر حبیبه صادقی

پژوهشگر

زینب موسوی

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: موسوی نام: زینب

عنوان: برنامه‌ریزی هندسی پوزینمیال با ضرایب و توان‌های بازه‌ای

استاد راهنما: دکتر منصور سراج
استاد مشاور: دکتر حبیبه صادقی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۸۸

واژگان کلیدی: برنامه‌ریزی هندسی، پارامترهای بازه‌ای، قضیه دوگانی، بهینه‌سازی

چکیده

برنامه‌ریزی هندسی ابزاری قدرتمند برای حل مسائل متنوع بهینه سازی غیرخطی فراهم می‌آورد. بسیاری از کاربردهای برنامه‌ریزی هندسی در مسائل طراحی مهندسی می‌باشد؛ که اغلب در این مسائل، پارامترهای مسئله، نادقیق هستند. اگر پارامترها در یک مسئله، بازه‌ای باشند؛ در اینصورت مقدار تابع هدف نیز بازه‌ای خواهد بود. هدف این رساله، بدست آوردن مقدار تابع هدف در مسائل برنامه‌ریزی هندسی بازه‌ای است که توان‌های متغیرهای تصمیم در تابع هدف، هزینه‌ها، ضرایب قیود و همچنین منابع (RHS) اعداد بازه‌ای باشند. ابتدا مسئله برنامه‌ریزی هندسی بازه‌ای را به یک زوج برنامه‌ریزی ریاضی دو سطحی تبدیل کرده و سپس براساس قضیه دوگانی، زوج برنامه‌ریزی ریاضی دو سطحی را به یک زوج برنامه‌ریزی هندسی متعارف تبدیل می‌کنیم و کران‌های بالا و پایین مقدار تابع هدف را با حل این زوج برنامه‌ریزی هندسی بدست می‌آوریم.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.
تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.
به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که در پیمودن راه پرفراز و نشیب آموختن یاری‌ام داد تا باردیگر پله‌ای هرچند کوچک از علم و دانش را طی نمایم. اینک که در پرتو الطاف بیکران خداوندیش این تحقیق به پایان رسیده، بر خود لازم می‌دانم از همه‌ی عزیزانی که مرا در انجام آن یاری نموده‌اند، تقدیر و تشکر نمایم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر منصور سراج صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکار خانم دکتر حبیبه صادقی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم که از تمامی اساتید مهربانم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و زمینه را برای پیشرفت اینجانب فراهم آورده‌اند.

در پایان، از پدر و مادر عزیز و مهربانم که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند، سپاسگزارم و بوسه بر دستان پرمهر و محبتشان می‌نهم.

از همسر عزیزم، که با صبر و مهربانی در همه‌ی کارهای علمی پشتیبانم بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم؛ و از بودن‌ها و دل‌گرمی‌های خواهر و برادر عزیزم، که وجود پرمهرشان تکیه‌گاه خودباوری‌هایم است، تشکر می‌کنم.

زینب موسوی

۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیشگفتار

در حل مسائل برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای دقیق، روشهای کارآمدی وجود دارد. اما ازآنجائیکه در دنیای واقعی، پارامترهای مسئله همواره اعداد دقیق نیستند؛ باید روشهایی را معرفی کرد که قادر به حل این گونه مسائل باشند. در این رساله که برگرفته از [۲۳] می‌باشد، می‌خواهیم روشی جهت حل مسائل برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای بازه‌ای را مورد بررسی قرار دهیم. اما قبل از آن باید با دو مبحث برنامه‌ریزی هندسی و حساب بازه‌ها آشنایی داشته باشیم. ابتدا در فصل اول به معرفی برنامه‌ریزی هندسی می‌پردازیم و در فصل دوم حساب بازه‌ها را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم که اساس کار این رساله می‌باشد، روشی را بررسی می‌کنیم که مقدار هدف بازه‌ای، زمانیکه حداقل یکی از پارامترهای مسئله عدد بازه‌ای باشد را محاسبه می‌کند. با توجه به اینکه اگر حداقل یکی از پارامترهای مسئله عدد بازه‌ای باشد، تابع هدف نیز عدد بازه‌ای خواهد بود. لذا این روش راهکاری جهت محاسبه‌ی تابع هدف بازه‌ای می‌باشد. ابتدا مسئله برنامه‌ریزی هندسی بازه‌ای را به یک زوج برنامه‌ریزی ریاضی دو سطحی تبدیل کرده و سپس براساس قضیه دوگانی، این زوج برنامه‌ریزی ریاضی دوسطحی را به یک زوج برنامه‌ریزی هندسی متعارف تبدیل می‌کند. در پایان با حل این زوج برنامه‌ریزی هندسی و محاسبه‌ی کران‌های بالا و پایین مقدار هدف، مقدار هدف بازه‌ای حاصل می‌شود.

فصل ۱
برنامه ریزی هندسی

۱.۱ مقدمه

برنامه ریزی هندسی، روش نسبتاً جالب و کارا برای رده‌ای از مسائل برنامه ریزی غیرخطی است. این روش با سایر روشهای بهینه‌سازی متفاوت است. زیرا ابتدا مقدار بهینه تابع هدف و سپس مقدار بهینه متغیرها بدست می‌آید. پایه و اساس این روش برای اولین بار در سال ۱۹۶۴ توسط زینر[۱]، دافین[۲] و پترسون[۳] مطرح گردیده و بیشتر اهداف آنها در طراحی مهندسی شکل گرفته است. اساس برنامه ریزی هندسی بر پایه نامساوی حسابی-هندسی می‌باشد؛ لذا در این فصل، ابتدا نامساوی میانگین حسابی-هندسی مطرح گردیده است و سپس برنامه ریزی هندسی (نامقید و مقید) معرفی می‌گردد. در قسمت پایان فصل، شکل کلی مسئله اولیه و دوگان و همچنین قضایای دوگانی بیان می‌شود.

[۱] Zener
[۲] Duffin
[۳] Peterson

۲.۱ تحدب و نامساوی میانگین حسابی-هندسی

تحدب یکی از مباحث غنی ریاضیات است. با استفاده از تحدب می‌توانیم تمام پایه ریاضی برای یک رده مهم از مسائل بهینه سازی بنام برنامه ریزی هندسی را بسازیم.

تعریف ۱.۲.۱. (مجموعه محدب)

مجموعه $C \subseteq R^n$ را مجموعه‌ی محدب گویند هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض x و y در C و برای هر $\lambda \in [۰,۱]$ داشته باشیم

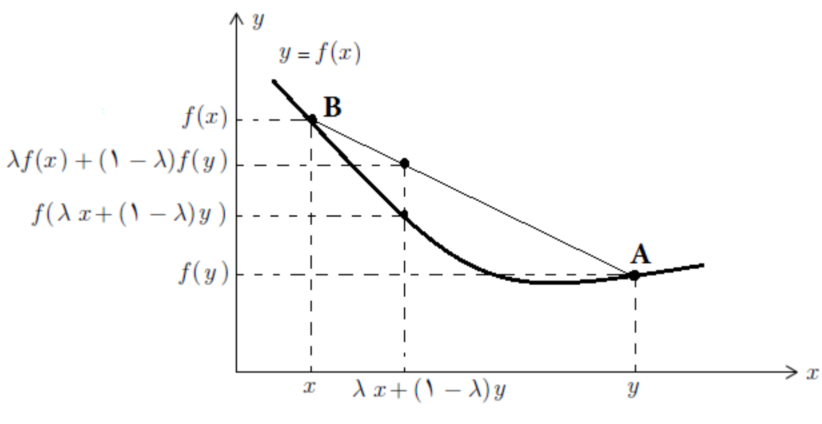
$$(\lambda x + (۱-\lambda)y) \in C$$

تعریف ۲.۲.۱. (تابع محدب)

فرض کنید C مجموعه‌ای محدب، $C \subseteq R^n$ و $f : C \longrightarrow R$ یک تابع باشد. f را تابع محدب گویند اگر به‌ازای هر $x, y \in C$ و برای هر $\lambda \in [۰,۱]$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y) \tag{۱.۱}$$

اگر نامساوی بالا، به‌ازای x و y متمایز و $\lambda \in (۰,۱)$ ، بطور اکید باشند، آنگاه تابع $f(x)$ اکیداً محدب است.



شکل ۱.۱: تابع محدب

دو قضیه بعدی یک روش کارا برای تعیین توابع محدب به دست می‌دهند.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ بر زیرمجموعه محدب و باز C از R^n پیوسته باشد. اگر مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ بر C ، نامنفی (مثبت) باشد آنگاه $f(x)$ بر C محدب (محدب اکید) است. اثبات این قضیه در [۱] آمده است.*

قضیه ۴.۲.۱. *الف) اگر $f_i(x)\ ,\ i=۱,۲,\cdots,k$ توابعی محدب بر زیرمجموعه محدب C از R^n باشند، آنگاه تابع*

$$f(x)=\sum_{i=۱}^{k} f_i(x)$$

نیز محدب است. بعلاوه، اگر حداقل یکی از $f_i(x)$ ها بر C محدب اکید باشد، آنگاه $f(x)$ نیز محدب اکید است.

ب) اگر $f(x)$ تابعی محدب (محدب اکید) بر زیرمجموعه محدب C از R^n باشد و اگر α عدد مثبتی باشد آنگاه $\alpha f(x)$ نیز بر C محدب (محدب اکید) است.

پ) اگر $f(x)$ تابعی محدب (محدب اکید) بر زیرمجموعه محدب C از R^n باشد و اگر $h(y)\,;y\in R$ ، یک تابع محدب صعودی (صعودی اکید) بر برد $f(x)$ در R باشد آنگاه ترکیب آنها، $h(f(x))$ نیز بر C محدب (محدب اکید) است. اثبات این قضیه در [۱] آمده است.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید $f(x)$ یک تابع محدب تعریف شده بر زیرمجموعه محدب C از R^n باشد. اگر $\lambda_۱,\lambda_۲,\cdots,\lambda_k$ اعداد نامنفی با مجموع یک باشند و اگر $x_۱,x_۲,\cdots,x_k$ نقاطی در C باشند آنگاه*

$$f\left(\sum_{i=۱}^{k}\lambda_i\, x_i\right)\leqslant\ \sum_{i=۱}^{k}\lambda_i\, f(x_i) \qquad (۲.۱)$$

اگر $f(x)$ بر C محدب اکید باشد و همه λ_i ها مثبت باشند آنگاه تساوی در (۲.۱) برقرار است اگر و تنها اگر x_i ها مساوی باشند.

برهان. این قضیه را می‌توان با استفاده از استقرا روی k اثبات کرد. توجه داریم که به ازای $k = ۲$ ، رابطه (۲.۱) همان تعریف تابع محدب است و در این حالت، قسمت دوم قضیه بلافاصله از تحدب اکید نتیجه می‌شود. لذا فقط گام اصلی استقرا را برای $k = ۳$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $x_۱, x_۲, x_۳$ نقاطی در C و $\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳$ اعداد نامنفی با مجموع یک باشند. اگر $\lambda_۳ = ۰$ باشد آنگاه (۲.۱) بلافاصله از تعریف تحدب یا تحدب اکید به دست می‌آید؛ چون $\lambda_۱x_۱ + \lambda_۲x_۲ + \lambda_۳x_۳$ به ترکیب محدب دو نقطه از C تقلیل می‌یابد. بنابراین فرض می‌کنیم $\lambda_۳ \neq ۰$ باشد. در این حالت، چون

$$z = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۲ + \lambda_۳}x_۲ + \frac{\lambda_۳}{\lambda_۲ + \lambda_۳}x_۳$$

ترکیب محدب دو نقطه از C است و چون $\lambda_۱x_۱ + (\lambda_۲ + \lambda_۳)z$ نیز ترکیب محدب دو نقطه از C است، پس

$$\begin{aligned}
f(\lambda_۱x_۱ + \lambda_۲x_۲ + \lambda_۳x_۳) &= f(\lambda_۱x_۱ + (\lambda_۲ + \lambda_۳)z) \\
&\leqslant \lambda_۱f(x_۱) + (\lambda_۲ + \lambda_۳)f(z) \\
&= \lambda_۱f(x_۱) + (\lambda_۲ + \lambda_۳)f\left(\frac{\lambda_۲}{\lambda_۲ + \lambda_۳}x_۲ + \frac{\lambda_۳}{\lambda_۲ + \lambda_۳}x_۳\right) \\
&\leqslant \lambda_۱f(x_۱) + (\lambda_۲ + \lambda_۳)\left(\frac{\lambda_۲}{\lambda_۲ + \lambda_۳}f(x_۲) + \frac{\lambda_۳}{\lambda_۲ + \lambda_۳}f(x_۳)\right) \\
&= \lambda_۱f(x_۱) + \lambda_۲f(x_۲) + \lambda_۳f(x_۳)
\end{aligned}$$

بنابراین قسمت اول قضیه، به ازای $k = ۳$ برقرار است.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، ملاحظه می‌کنیم که اگر $f(x)$ محدب اکید باشد، آنگاه تساوی در اولین نامساوی فوق برقرار است اگر و تنها اگر

$$x_۱ = z = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۲ + \lambda_۳}x_۲ + \frac{\lambda_۳}{\lambda_۲ + \lambda_۳}x_۳$$

و تساوی در نامساوی دوم برقرار است اگر و تنها اگر $x_۲ = x_۳$ باشد. پس

$$f(\lambda_۱x_۱ + \lambda_۲x_۲ + \lambda_۳x_۳) = \lambda_۱f(x_۱) + \lambda_۲f(x_۲) + \lambda_۳f(x_۳)$$

اگر و تنها اگر $x_۱ = x_۲ = x_۳$ برقرار باشد. □

نامساویها در اکثر زمینه‌های ریاضیات مهم هستند و برنامه ریزی غیرخطی از این امر مستثنی نیست. بعضی از نامساویهای مهم را می‌توان با انتخاب توابع محدب مناسبی به دست آورد. یکی از این نامساویها، نامساوی حسابی-هندسی نامیده می‌شود؛ این نامساوی ابزار خیلی مفیدی برای حل مسایل بهینه سازی عملی معینی است که حل آنها با استفاده از روشهای متکی بر ریاضیات عمومی مشکل می‌باشد. درواقع، این نامساوی پایه ریاضی روند حل یک مسأله بهینه سازی بنام برنامه ریزی هندسی است.

قضیه ۶.۲.۱. ***(نامساوی میانگین حسابی-هندسی)***

اگر $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ اعداد حقیقی مثبت و $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ اعداد مثبتی با مجموع یک باشند آنگاه

$$\prod_{i=۱}^{n} x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \, x_i \qquad (۳.۱)$$

برقرار می‌باشد.

تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n$ باشند.

حاصلضرب سمت چپ نامساوی (۳.۱) را میانگین هندسی وزنی از $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ با وزنهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ نامیده و حاصلجمع سمت راست این نامساوی را میانگین حسابی وزنی $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ با وزنهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ می‌نامیم.

برهان. این قضیه را می‌توان با در نظر گرفتن خواص تحدب ثابت کرد. ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = -lnx; \; x > ۰$$

طبق قضیه ۳.۲.۱ ، چون $f''(x) = \frac{۱}{x^۲} > ۰$ لذا $f(x)$ تابعی محدب اکید است. بنابراین،

اگر $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ و همچنین $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ اعداد مثبتی باشند؛ بطوریکه

$$\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n = ۱$$

آنگاه قضیه ۵.۲.۱ نتیجه می‌دهد که

$$-ln\left(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\ x_i\right) = f\left(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\ x_i\right) \leqslant \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\ f(x_i) = -\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i ln x_i$$

نامساوی فوق هم‌ارز با

$$ln\left(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\ x_i\right) \geqslant \sum_{i=۱}^{n} ln(x_i^{\lambda_i}) = ln\left(\prod_{i=۱}^{n} x_i^{\lambda_i}\right)$$

می‌باشد. چون تابع لگاریتم، صعودی اکید است؛ بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i\ x_i \geqslant \prod_{i=۱}^{n} x_i^{\lambda_i}$$

تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار می‌باشد که همه x_i ها مساوی باشند. □

۳.۱ برنامه ریزی هندسی نامقید

برنامه ریزی هندسی درمورد مسائل مینیمم‌سازی مسأله اولیه و ماکزیمم‌سازی دوگان بحث می‌کند. قضیه دوگانی تناظری یک به یک بین خواص مسأله برنامه اولیه و برنامه دوگان است. برنامه ریزی هندسی را به دو صورت نامقید و مقید بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. مونمیال[۴](تک‌جمله‌ای مثبت)

فرض کنید $t_۱, t_۲, \cdots, t_m$ متغیرهای حقیقی مثبت باشند و $t = (t_۱, \cdots, t_m)$ برداری با مؤلفه‌های t_j ، تابع حقیقی مقدار $u(t)$ تعریف شده روی R^m ، یک مونمیال نامیده می‌شود هرگاه $u(t)$ بصورت

$$u(t) = C\ t_۱^{\alpha_۱}\ t_۲^{\alpha_۲}\ \cdots\ t_m^{\alpha_m}$$

[۴] Monomial

باشد، بطوریکه $C > ۰$ و α_j ، $j = ۱, \cdots, m$ اعداد حقیقی دلخواه می‌باشند.

بعنوان مثال؛ اگر x , y , z متغیرهای حقیقی مثبت باشند، در این صورت عبارات (توابع) زیر مونمیال‌اند.

$$۲\,x\,,\ ۰/۲۳\,,\ ۲z\sqrt{\frac{x}{y}}$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $t_۱, t_۲, \cdots, t_m$ متغیرهای حقیقی مثبت باشند و $t = (t_۱, \cdots, t_m)$ برداری با مؤلفه‌های t_i ، تابع حقیقی مقدار $g(t)$ تعریف شده روی R^m ، یک پوزینمیال[۵] نامیده می‌شود هرگاه $g(t)$ بصورت

$$g(t) = \sum_{i=۱}^{n} c_i \prod_{j=۱}^{m} t_j^{\alpha_{ij}}$$

باشد، بطوریکه c_i ها ثابتهای مثبت و α_{ij} ها اعداد حقیقی دلخواه می‌باشند.

بعنوان مثال

$$(\frac{۱}{۲})t_۱^{\frac{۱}{۳}}\ t_۲^{-\frac{۱}{۳}}\ t_۳ + (\frac{۲}{۳})t_۱^{\frac{۱}{۲}}\ t_۲^{-\frac{۲}{۳}}$$

یک پوزینمیال برای $t_۱, t_۲, t_۳ > ۰$ می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱. سیگنومیال[۶]

تابعی به شکل پوزینمیال، بطوریکه ضرایب c_i می‌توانند منفی باشند را سیگنومیال نامند. همچنین برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، یک نوع برنامه‌ریزی هندسی تعمیم یافته است؛ که تابع هدف و قیود می‌توانند سیگنومیال باشند.

بعنوان مثال

$$(\frac{۱}{۲})\ t_۱\ t_۲^{-۱} - t_۱ - ۵\ t_۲^{-۱}$$

یک سیگنومیال برای $t_۱, t_۲, t_۳ > ۰$ می‌باشد.

[۵] ترکیب دو کلمه *positive* (مثبت) و *polynomial* (چندجمله‌ای) است.

[۶] Signomial

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $g(t)$ پوزینمیال از m متغیر مثبت $t=(t_1,\cdots,t_m)$ باشد. دراین صورت برنامه

$$\begin{aligned} &min \quad g(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{\alpha_{ij}} \\ &s.t \quad t_j>0 \ , \ j=1,2,\cdots,m \end{aligned}$$

یک برنامه ریزی هندسی نامقید نامیده می‌شود.

۱.۳.۱ روش حل مسأله برنامه‌ریزی هندسی نامقید

هدف برنامه ریزی هندسی نامقید، حل برنامه ریزی هندسی اولیه زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} &min \quad g(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{\alpha_{ij}} \\ &s.t \quad t_j>0 \ , \ j=1,2,\cdots,m \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

منظور از یک جواب برای برنامه ریزی هندسی اولیه (۴.۱) یک مینیمم کننده سراسری $g(t)$ مانند t^* در مجموعه بردارها با مؤلفه‌های مثبت می‌باشد.

حل برنامه‌ریزی هندسی اولیه را باتوجه به این مطلب آغاز می‌کنیم که $g(t)$ را می‌توان بصورت

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{\alpha_{ij}}}{\lambda_i}\right)$$

نوشت که در آن λ_i ها اعداد مثبت هستند (شرط مثبت بودن). اگر قید

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{(شرط نرمال بودن)}$$

را اضافه نماییم آنگاه می‌توانیم نامساوی میانگین حسابی-هندسی را برای شکل جدید $g(t)$ بکار برده و بدست آوریم

$$g(t) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{\alpha_{ij}}}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i} \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} t_j^{\alpha_{ij}\lambda_i} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{m} t_j^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i}$$

بنابراین با تحمیل شرط اضافی

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i = 0; \quad j = 1, 2, \cdots, m \qquad \text{(شرط متعامد)}$$

خواهیم داشت

$$g(t) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i}$$

در نتیجه با قرار دادن

$$v(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i}$$

به ازای هر $t \in R^m$ با مؤلفه‌های مثبت و هر $\lambda \in R^n$ صادق در شرایط مثبت بودن، نرمال بودن و تعامد داریم

$$g(t) \geqslant v(\lambda)$$

لذا دوگان برنامه هندسی را می‌توان بصورت ذیل بیان کرد.

$$max \quad v(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\lambda_i}\right)^{\lambda_i}$$

$$s.t$$

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \cdots,\ \lambda_n \geqslant 0 \qquad \text{(شرط مثبت بودن)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad \text{(شرط نرمال بودن)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i = 0 \ ; \quad \forall j \qquad \text{(شرط تعامد)}$$

بردار $\lambda \in R^n$ را که در شرایط مثبت بودن، نرمال بودن و تعامد صدق می‌کند؛ یک بردار شدنی برای برنامه هندسی دوگان می‌گوییم. همچنین، منظور از یک جواب برای برنامه دوگان، برداری مانند $\lambda^* \in R^n$ است که یک ماکزیمم کننده سراسری $v(\lambda)$ روی مجموعه بردارهای شدنی برنامه هندسی دوگان می‌باشد.

تعریف ۵.۳.۱. اگر مجموعه بردارهای شدنی برنامه هندسی دوگان، تهی نباشد آنگاه برنامه دوگان را سازگار گوییم.

قضیه ۶.۳.۱. *اگر $t^* = (t_1^*, \cdots, t_m^*)$ یک جواب برای برنامه هندسی اولیه باشد آنگاه برنامه هندسی دوگان متناظر سازگار است. بعلاوه، بردار $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*)$ تعریف شده با*

$$\lambda_i^* = \frac{u_i(t^*)}{g(t^*)} \ ; \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5.1}$$

(که در آن $u_i(t) = c_i t_1^{\alpha_{i1}}, t_2^{\alpha_{i2}}, \cdots, t_m^{\alpha_{im}}$ جمله i ام $g(t)$ است.) یک جواب برای برنامه هندسی دوگان می‌باشد و نامساوی اولیه ـ دوگان با تساوی برقرار است، یعنی

$$g(t^*) = v(\lambda^*)$$

برهان. یک جمله جزئی تابع $g(t)$ بصورت

$$u_i(t) = c_i t_1^{\alpha_{i1}}, t_2^{\alpha_{i2}}, \cdots, t_m^{\alpha_{im}}$$

را در نظر می‌گیریم. مشتق نسبی $u_i(t)$ نسبت به t_j یک تأثیر خیلی ساده بر $u_i(t)$ دارد. بطور ساده $u_i(t)$ در α_{ij} ضرب شده و یک واحد از نمای t_j کاسته می‌شود. معنی عبارت فوق آن است که معادله

$$t_j \frac{\partial u_i}{\partial t_j} = \alpha_{ij} u_i$$

برقرار است. چون $t^* = (t_۱^*, \cdots, t_m^*)$ یک مینیمم کننده سراسری $g(t)$ است. بنابراین

$$\circ = \frac{\partial g}{\partial t_j}(t^*) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial t_j}(t^*) \;\; ; \qquad j = ۱, ۲, \cdots, m.$$

درنتیجه، بنابرپارگراف اول اثبات، داریم

$$\circ = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_{ij} u_i(t^*) \;\; ; \qquad j = ۱, ۲, \cdots, m.$$

چون $g(t^*) > \circ$ ، پس با تقسیم طرفین تساوی آخر بر $g(t^*)$ خواهیم داشت

$$\circ = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_{ij} (\frac{u_i(t^*)}{g(t^*)}) \;\; ; \qquad j = ۱, ۲, \cdots, m$$

با قرار دادن

$$\lambda_i^* = \frac{u_i(t^*)}{g(t^*)}; \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

در رابطه اخیر، بردار $\lambda^* = (\lambda_۱^*, \cdots, \lambda_n^*)$ در شرط تعامد برای برنامه هندسی دوگان صدق می‌کند. همچنین، چون $\lambda_i^* > \circ$ به ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ ، پس شرط مثبت بودن نیز برقرار است. بعلاوه

$$\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^* = \sum_{i=۱}^{n} \frac{u_i(t^*)}{g(t^*)} = \frac{g(t^*)}{g(t^*)} = ۱$$

بنابراین شرط نرمال بودن نیز برقرار می‌باشد. پس بردار λ^* برای برنامه دوگان شدنی است.

لذا برنامه هندسی دوگان سازگار می‌باشد. توجه داریم که

$$\begin{aligned} g(t^*) &= (g(t^*))^{\lambda_1^* + \cdots + \lambda_n^*} \\ &= (g(t^*))^{\lambda_1^*} \ (g(t^*))^{\lambda_2^*} \cdots \ (g(t^*))^{\lambda_n^*} \\ &= \left(\frac{u_1(t^*)}{\lambda_1^*}\right)^{\lambda_1^*} \ \left(\frac{u_2(t^*)}{\lambda_2^*}\right)^{\lambda_2^*} \ \cdots \left(\frac{u_n(t^*)}{\lambda_n^*}\right)^{\lambda_n^*} \\ &= \left(\frac{c_1}{\lambda_1^*}\right)^{\lambda_1^*} \cdots \left(\frac{c_n}{\lambda_n^*}\right)^{\lambda_n^*} \\ &= v(\lambda^*) \end{aligned}$$

پس نامساوی اولیه -دوگان با تساوی برقرار است. این نشان می‌دهد که λ^* یک جواب برای برنامه هندسی دوگان است. چون

$$\lambda_i^* = \frac{u_i(t^*)}{g(t^*)}; \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6.1}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

مثال ۷.۳.۱. برنامه هندسی ذیل را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} min \quad & g(t) = \frac{1}{t_1 \ t_2} + 10 \ t_1 \ t_2 \ t_3^{-1} + 20 \ t_2 \ t_3 + t_1 \ t_3 \\ s.t \quad & t_1 \ , \ t_2 \ , \ t_3 > 0 \end{aligned}$$