دانشگاه تربیت معلم دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

نظریه‌ی کوهن مکالی در حلقه‌های غیرنوتری

تدوین

مینا معبودی

استاد راهنما

دکتر حسین ذاکری

بهمن ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

اظهارنامه

پایان نامه‌ی حاضر در شش فصل براساس مقاله‌ی زیر تنظیم شده است.

چکیده

در راستای مطالعه مفهوم تقریبا کوهن مکالی بودن روی حلقه های غیرنوتری تعمیم هایی از مفهوم کوهن مکالی ارائه می گردد. در گام نخست مفهوم کوهن مکالی بودن روی حلقه‌های غیرنوتری معرفی شده و مورد بررسی قرار می گیرد. پس از بدست آوردن نتایجی در این زمینه و در راستای حل حدسی منسوب به گلز، تعمیمی از نتیجه‌ای معروف از هاچستر و ایگون درباره کوهن مکالی بودن حلقه های پایا داده می شود.

واژه های کلیدی: حلقه‌ی کوهن مکالی، نمره‌ی یک ایده‌آل، ارتفاع یک ایده‌آل، حلقه‌ی غیرنوتری، حلقه‌ی پایا.

رده‌بندی موضوعی : 13H10 ,13A50 ,13C15 ,13C14.

مقدمه

در سراسراین پایان نامه حلقه‌ها جابجایی و یکدار فرض شده‌اند. حلقه‌های کوهن مکالی اهمیّت فراوانی در جبر جابجایی دارند. این حلقه‌ها سنگ بنای جبر جابجایی‌اند. امّا مطالعه‌ی این حلقه‌ها محدود به حلقه‌های نوتری است.

لازم به ذکر است که بررسی مفهوم کوهن مکالی روی حلقه‌های غیرنوتری به مطالعه‌ی این مفهوم روی حلقه‌های نوتری کمک شایانی می کند.

جستجوی ساده‌ای در مقالات جبر جابجایی بیان می دارد که قبل از سال ۱۹۹۲ میلادی هیچ ایده‌ای برای مفهوم کوهن مکالی روی حلقه‌های غیرنوتری موجود نبوده است. در این موقع گلز [۱] در [۱۷] بدون ارائه‌ی تعریفی برای این مفهوم روی حلقه‌های غیرنوتری، حدس زد حلقه‌ی پایای حلقه‌ای کوهن مکالی مجدداً کوهن مکالی است. در واقع او می خواست تعریفی مناسب از حلقه‌های غیر نوتری کوهن مکالی ارائه دهد. بعد از دو سال، او در صفحه‌ی ۲۱۹ از [۱۸] تعریفی برای حلقه های غیرنوتری (کوهن مکالی به مفهوم گلز) ارائه کرد. می گوییم $R-$ مدول M کوهن مکالی به مفهوم گلز است هرگاه برای هر ایده‌آل اول p از R داشته باشیم

$$ht_{R_p}(p) = P.grade_{R_p}(pR_p, M_p)$$

که $P.grade_{R_p}(pR_p, M_p)$ نمره‌ی چند جمله‌ای pR_p روی R_p- مدول M_p است. ما این مفهوم را با نماد $Glaz$ نشان می دهیم. در همان مقاله مثالی از یک حلقه‌ی منظم کوهرنت [۲] آورده شد که با تعریف گلز، کوهن مکالی نبود. لذا گلز این سوال را مطرح کرد که چگونه میتوان تعریفی برای مفهوم کوهن مکالی روی حلقه‌های غیرنوتری ارائه کرد که با تعریف در حالت نوتری یکی شود و بعلاوه حلقه‌های منظم کوهرنت کوهن مکالی باشند. در ذیل آنچه مد نظر گلز بوده گردآوری شده است.

حدس ۱ :چگونه میتوان تعریفی برای مفهوم کوهن مکالی روی حلقه‌های غیرنوتری ارائه کرد که گزاره‌های زیر برای آن درست باشد:

(i). تعریف داده شده با تعریف معمولی کوهن مکالی روی حلقه‌های نوتری یکی شود.

---

[۱] Glaz

[۲] coherent regular ring

(ii). با تعریف ارائه شده، حلقه‌های منظم کوهرنت کوهن مکالی شوند.

(iii). فرض کنیم R حلقه‌ای کوهن مکالی و G گروهی متناهی از یکریختی های R چنان باشند که اپراتور رینولد برای آن موجود باشد و بعلاوه R روی حلقه‌ی پایای خود $(R^G := \{x \in R : \sigma(x) = x \quad \forall \sigma \in G\})$ با تولید متناهی باشد. در اینصورت R^G کوهن مکالی شود.

همیلتون [3] در [۲۰] و [۲۱] و [۲۲] به مفهوم حلقه‌ی بورباکی خالص [4] پرداخت. همیلتون در [۲۱] خواصّی برای مفهوم کوهن مکالی روی حلقه‌های غیرنوتری بیان می کند که عبارتند از:

(H1). فرض کنیم R کوهن مکالی است. در اینصورت $R[X_۱, X_۲, \cdots]$ حلقه‌ای کوهن مکالی است و برعکس.

(H2). اگر به ازای هر ایده‌آل اول p از R، حلقه‌ی R_p کوهن مکالی باشد، آنگاه R کوهن مکالی می باشد وبرعکس.

مهمترین گام در راستای حدس گلز متعلق به همیلتون و مارلی [5] می باشد. آنها تعریفی جدید از کوهن مکالی بودن ارائه کردند که ما آنرا کوهن مکالی به مفهوم همیلتون و مارلی می نامیم. این مفهوم را با نماد HM نمایش می دهیم. تعریف آنها شرایط (i) و (ii) را برآورده میکند. همچنین در حالتی که $dimR \leq ۲$ و مرتبه‌ی گروه G متناهی و دارای وارونی در R باشد، آنها (iii) را ثابت کردند وبرقراری قسمتی از $(H۱)$ و $(H۲)$ را بررسی کردند.

خاطر نشان می کنیم که در حلقه‌های نوتری کوهن مکالی بودن میتواند به گونه‌های متعدد بیان شود. برای مثال فرض کنیم $\sum$ گردایه‌ای ناتهی از ایده‌آلهای حلقه‌ی R باشد. می گوییم R کوهن مکالی به معنای $\sum$ است هرگاه برای هر ایده‌آل $\underline{a} \in \sum$ داشته باشیم:

$$K.grade_R(\underline{a}, R) = ht_R(\underline{a})$$

این مفهوم را بانماد $\sum$ نشان می دهیم. در این پایان نامه ما به گردایه‌ی ایده‌آلهای با تولید متناهی، اول، ماکسیمال توجّهی خاص می کنیم.

میتوان هر یک از تعاریف اشاره شده در بالا را به عنوان یک تعریف اصلی برای کوهن مکالی بودن

[3] Hamilton

[4] Bourbaki unmixed

[5] Marley

حلقه‌های غیرنوتری در نظر گرفت. تعریف های مذکور در حالت غیرنوتری لزوماً هم ارز نیستند، ولی روابطی با هم دارند.

برخی از روابط میان تعریف های مذکور عبارتند از:

$$Max \Leftarrow Spec \Leftrightarrow ideals \Rightarrow Glaz \Rightarrow f.g\,ideals \Rightarrow HM \Leftarrow WB$$

همچنین در حالتی که حلقه کوهرنت است گزاره $Spec \Rightarrow WB$ درست است.

در بخش دوم تعاریف مختلف از نمره ایده‌آلها را ارائه می دهیم. برای راحتی خواننده برخی از خواص آنها را گردآوری کرده‌ایم. به منظور بیان اهدافمان به نظر می رسد که استفاده از نمره کوزول بهتر است. نمره‌ی کوزول ایده‌آل $\underline{a}$ روی $R-$ مدول M را با علامت $K.grade_R(\underline{a}, M)$ نشان می دهیم.

در بخش سوم ارتباط میان تعاریف مختلف حلقه‌های کوهن مکالی غیرنوتری را بررسی می کنیم. این تعاریف شامل تعاریف گلز و همیلتون $-$ مارلی و مفهوم حلقه‌های بورباکی خالص است. فرض کنیم A یک زیر گردایه‌ی غیر تهی از گردایه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای حلقه‌ی R باشد. تعدادی رابطه برای بررسی کوهن مکالی بودن مدولها به مفهوم A ارائه می دهیم(توجّه کنید که $R-$ مدول M به مفهوم A کوهن مکالی گفته میشود اگر تساوی $ht_M(\underline{a}) = K.grade_R(\underline{a}, M)$ برای هر ایده‌آل $\underline{a}$ در A برقرار باشد). این گردایه از ایده‌آلها میتواند گردایه‌ی ایده‌آلهای متناهیاً تولید شده، ایده‌آلهای اول و ایده‌آلهای ماکسیمال و یا گردایه‌ی همه‌ی ایده‌آلها باشد.

لم زیر یک نتیجه کلیدی در این بخش است که اغلب اثبات ها بر اساس آن انجام می گیرد.

لم ۲ :فرض کنیم $\underline{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R و M یک $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در اینصورت $K.grade_R(\underline{a}, M) \leq ht_M(\underline{a})$.

در این پایان نامه برخی از قضایا را با روشی جدید که امیدوارم مورد توجّه خواننده قرار گیرد، اثبات کرده‌ایم که در طول پایان نامه، این مطالب با علامت ** در ابتدای مورد معیّن شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از جبر جابجایی و همولوژی

در سراسر این فصل R، یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

۱.۱ **تعریف.** (الف). فرض کنیم M مدولی روی حلقه‌ی R است. عنصر $x \in R$ را یک عنصر $M-$ منظم می گوییم هرگاه:

$$\forall m \in M \quad , xm = \circ \Rightarrow m = \circ$$

مجموعه عناصر منظم روی M را با علامت $Zd(M)$ نشان می دهیم.

(ب). رشته $x := x_۱, x_۲ \cdots, x_n$ از اعضای R را یک $M-$ رشته‌ی منظم می گوییم، هرگاه:

$(i$ $\quad x_۱ \notin Zd(M)$

$(ii$ $\quad x_i \notin Zd(\frac{M}{(x_۱,\cdots,x_{i-۱})M})$ برای هر $i = ۲, \cdots, n$

$(iii$ $\quad (x_۱, \cdots, x_n)M \neq M$

اگر رشته‌ی x فقط در شرایط (i) و (ii) صدق کند، آنرا $M-$ رشته‌ی منظم ضعیف نامیم.

۲.۱ **تعریف.** M را مدولی با تولید متناهی روی حلقه‌ی نوتری R و I را ایده‌آلی از R بگیرید بطوریکه $IM \neq M$. فرض کنیم که M یک R مدول بوده و $a_۱, \cdots, a_r$ یک $M-$ رشته باشد. هرگاه به ازای هر i، $a_i \in I$، آنگاه گوییم $a_۱, \cdots, a_r$ یک $M-$ رشته در I است. اگر برای هیچ $b \in I$ دنباله‌ی $a_۱, \cdots, a_r, b$ یک $M-$ رشته نباشد، آنگاه گوییم $a_۱, \cdots, a_r$ یک $M-$ رشته ماکسیمال

در I است. طول تمام $M-$ رشته‌های ماکسیمال در I یکسان است.این طول مشترک را نمره‌ی I روی M می نامیم و آنرا با نماد $grade(I,M)$ نشان می دهیم. اگر $IM = M$، قرار می دهیم $grade(I,M) = \infty$. خاطر نشان می کنیم که‌اگر R نوتری نباشد، آنگاه طول تمامی $M-$ رشته‌های ماکسیمال (ضعیف) در I لزوماً یکسان نیستند. فرض کنید که $(\mathrm{R,m})$ حلقه‌ای موضعی و نوتری و M یک $R-$ مدول با تولید باشد، در این صورت بنابر لم ناکایاما همواره $mM \neq M$. لذا $grade_R(m,M)$ متناهی است .این عدد را با نماد $\mathrm{depth}_R(M)$ نشان می دهیم و آنرا عمق M می نامیم.

۳.۱ **تعریف.** فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. در اینصورت اگر برای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه مانند $N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ از $R-$ مدولهاو $R-$ همریختیها، دنباله‌ی $N \otimes_R M \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow 0$ دقیق باشد، گوییم M یک $R-$ مدول یکدست است.

۴.۱ **تعریف.** اگر R و S حلقه باشند، آنگاه همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ را یکدست گوییم در صورتیکه S یک $R-$ مدول یکدست باشد.

۵.۱ **تعریف.** فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. در اینصورت گوییم M روی $R-$ یکدست باوفاست اگر برای هر $R-$ همریختی مانند $N \longrightarrow N'$ از $R-$ مدولها گزاره‌ی زیر درست باشد: دنباله‌ی $N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ دقیق است اگر و تنها اگر دنباله‌ی $N \otimes_R M \longrightarrow N' \otimes_R M \longrightarrow 0$ دقیق باشد.

۶.۱ **تعریف.** اگر R و S حلقه باشند آنگاه همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ را یکدست باوفا گوییم اگر S یک $R-$ مدول یکدست باوفا باشد.

۷.۱ **تعریف.** فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض پذیرباشد. طیف اوّل R یا به اختصار طیف R را مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای اول R تعریف می کنیم. طیف R را با Spec نمایش می دهیم.

۸.۱ **تعریف.** فرض کنیم $\underline{a}$ یک ایده‌آل سره‌ای از حلقه R باشد. دراینصورت $\mathrm{V}(\underline{a})$ (واریته) را چنین تعریف می کنیم:

$$V(\underline{a}) := \{p \mid \quad p \in Spec(R), \underline{a} \subseteq p\}$$

۹.۱ تعریف. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد محمل M را، که باعلامت $\mathrm{Supp}_R(M)$ نشان می دهیم، چنین تعریف می کنیم:
$$\mathrm{Supp}_R(M) := \{p \in \mathrm{Spec}(R) \quad : M_p \neq 0\}$$

۱۰.۱ تعریف. ایده‌آل $\{r \in R : rM = 0\}$ از R پوچساز M نامیده شده و با $\mathrm{Ann}M$ یا $0 : M$ نمایش داده میشود. می توانیم M را به عنوان یک مدول روی $\frac{A}{\mathrm{Ann}M}$ در نظر بگیریم. اگر $\mathrm{Ann}(M) = 0$ آن گاه گوییم که M یک مدول باوفاست.

۱۱.۱ تعریف. فرض کنیم S یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار و $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در اینصورت S را می توان با تحدید ضرب اسکالر (تحت f) یک $R-$ مدول بدست آورد. حلقه‌ی S همراه با این ساختار $R-$ مدولی را یک $R-$جبر می نامیم.

۱۲.۱ تعریف. فرض کنیم A و B حلقه باشند. اگر $A \subseteq B$ و $\phi : A \longrightarrow B$ چنان باشد که $\phi(a) = a$ برای هر عنصر $a \in A$، در اینصورت A یک مدول درون بر از B نامیده میشود و این نگاشت را نگاشت درون بر مدول می نامند.

۱۳.۱ تعریف. فرض کنیم I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی تعویضپذیر R باشد دراین صورت $Var(I)$ دست کم یک عضو مینیمال با رابطه‌ی شمول دارد. عضوهای مینیمال $Var(I)$ را ایده‌آلهای اول مینیمال شامل I می نامیم. ایده‌آلهای اول مینیمال ایده‌آل صفر را گاه ایده‌آلهای اول مینیمال R می نامیم.

۱۴.۱ تذکر . فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از A باشد. می دانیم که S^{-1} فانکتور دقیق است پس $S^{-1}A \otimes -$ نیز فانکتور دقیق است. یادآوری می شود که $A-$ مدول M را یکدست نامیم در صورتیکه فانکتور $M \otimes_A - : C(A) \longrightarrow C(A)$ دقیق باشد. بنابراین $S^{-1}A$ یک $A-$ مدول یکدست است. حال با توضیحات فوق $f : A \longrightarrow A_p$ یک همریختی یکدست است.

۱۵.۱ تعریف. فرض کنیم K یک میدان و F زیر میدانی از K باشد و $a \in K$. هرگاه عناصر $f_0, \cdots, f_n \in F$ که همه صفر نیستند، چنان موجود باشند بطوریکه $f_0 + f_1 a + \cdots + f_n a^n = 0$، در

این صورت گوییم a روی F جبری است.

۱.۱۶ **تعریف.** فرض کنیم L زیر میدانی از میدان F باشد K را مجموعه‌ی a های متعلق به F درنظر می گیریم که روی L جبری است K بستار جبری F در L نامیده میشود.

۱.۱۷ **تعریف.** فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی S باشد و $s \in S$ باشد. در اینصورت گوییم s روی R صحیح است اگر $h \in \mathbb{N}$ و $r_0, r_1, \cdots, r_{h-1} \in R$ چنان وجود داشته باشند بطوریکه

$$s^h + r_{h-1}s^{h-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0$$

یعنی s ریشه‌ی چند جمله‌ای تکین متعلق به $R[X]$ باشد. لذا در حالتی که R و S میدان هستند. s روی R صحیح است اگر و تنها اگر روی R جبری باشد.

۱.۱۸ **تعریف.** فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی S باشد. فرض کنیم R' مجموعه‌ی تمام sهای متعلق به S باشد که روی R صحیح هستند. در اینصورت R' زیرحلقه‌ای از S است که R را شامل میشود. R' بستار صحیح R در S نام دارد. اگر $R' = R$ آنگاه گوییم کهR در S بطور صحیح بسته است.

۱.۱۹ **تعریف.** فرض کنیم R دامنه‌ای صحیح با میدان کسرهای $Q(R)$ باشد. F رایک بستار جبری از $Q(R)$ میگیریم. مجموعه‌ی تمام عناصری از F را که ریشه‌ای از یک چند جمله‌ای تکین با ضرایب در R هستند تشکیل داده و آنرا با R^+ نمایش می دهیم. R^+ باخواص جمع و ضربی که از F به ارث می برد تشکیل یک $R-$ جبر می دهد. R^+ را بستار صحیح مطلق R نامگذاری می کنیم. وR^+ در حد یکریختی مستقل از انتخاب F است.

۱.۲۰ **تعریف.** فرض کنیم Q ایده‌آلی از حلقه‌ی جابجایی R باشد. گوییم Q ایده‌آل ابتدایی R است اگر

(i). $Q \subset R$ یعنی Q ایده‌آل سره‌ی R باشد.

(ii). هرگاه $a,b \in R$ و $ab \in Q$ ولی $a \notin Q$، آن گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n \in Q$.

۲۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم Q یک ایده‌آل ابتدایی از حلقه‌ی جابجایی R باشد. در این صورت $p := \sqrt{Q}$ یک ایده‌آل اول از R است و می گوییم Q، $p-$ ابتدایی است.

۲۲.۱ **تعریف.** (دستگاه پارامتری در حلقه‌های نوتری). فرض کنید (R,m) حلقه‌ای موضعی با بعد d باشد. منظور از یک دستگاه پارامتری از R مجموعه‌ای از d عضو R است که ایده‌آل $m-$ ابتدایی تولید می کند. همچنین هر حلقه‌ی موضعی یقیناً دارای حداقل یک دستگاهی از پارامتری است. می گوییم که $a_1,\cdots,a_d$ یک دستگاه پارامتری برای R است اگر $\{a_1,\cdots,a_d\}$ یک دستگاه پارامتری برای R باشد.

۲۳.۱ **تعریف.** دامنه‌ی R با میدان کسرهای K، قلمرو ارزه نامیده میشود اگر برای هر عنصر $x \in K$ داشته باشیم $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$. یک قلمرو ارزه، حلقه‌ای موضعی و بطورصحیح بسته است و هر ایده‌آل متناهیاً تولید شده از آن اصلی است.

۲۴.۱ **لم .** گزاره‌های زیر معادلند:

$(i$ $\quad M = 0$.

$(ii$ برای هر ایده‌آل اول p از R داریم $M_P = 0$.

$(iii$ برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ از R داریم $M_{\underline{m}} = 0$

۲۵.۱ **قضیه.** (قضیه‌ی مقایسه ناپذیری). فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی S و S روی R صحیح باشد. اگر $Q,Q' \in \mathrm{Spec}(S)$ که $Q \subseteq Q'$ و $Q' \cap R = Q \cap R = p$ آنگاه $Q = Q'$.

برهان. ر.ک. [۳۶، قضیه‌ی ۳۳.۱۳] $\square$

۲۶.۱ **قضیه.** (آرتین – ریس).[1] فرض کنیم R حلقه‌ی نوتری و M، $R-$ مدولی متناهی مولد باشد. اگر $N \subset M$ زیر مدول M باشد و I ایده‌آلی از R باشد. آنگاه عدد صحیح مثبت c موجود است

[1] Artin - Rees

بطوری که برای هر $n > c$ داریم: $I^nM \cap N = I^{n-c}(I^cM \cap N)$

برهان. ر.ک. [۳۰، گزاره‌ی ۵.۸]. □

۲۷.۱ قضیه. (قضیه‌ی وقوع). فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی S و S روی R صحیح باشد. $p \in \mathrm{Spec}(R)$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ وجود دارد که $Q \cap R = p$ یعنی Q روی p واقع است.

برهان. ر.ک. [۳٦، قضیه‌ی ۴۳.۱۳] □

۲۸.۱ قضیه. (قضیه‌ی بالابری (صعود)). فرض کنیم R زیر حلقه‌ای از حلقه‌ی جابجایی S بوده و S روی R صحیح باشد. فرض کنیم $m \in \mathbb{N}_0$ و $n \in \mathbb{N}$ و $m < n$.فرض کنیم $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_{n-1} \subset p_n$ زنجیری از ایده آلهای اول R و $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{m-1} \subset Q_m$ زنجیری از ایده آلهای اول S باشد بطوریکه به ازای هر $i = 0, \cdots, m$، $Q_i \cap R = p_i$. در اینصورت ایده آلهای اولی چون $Q_{m+1}, \cdots, Q_n$ از S وجود دارند که

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{n-1} \subset Q_n$$

و به ازای هر $0 \leq i \leq n$، $Q_i \cap R = p_i$.

برهان. ر.ک. [۳٦، قضیه‌ی ۳۸.۱۳]. □

۲۹.۱ قضیه. (قضیه‌ی نزول). فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از دامنه‌ی صحیح S و S روی R صحیح باشد. فرض کنیم که R صحیحاً بسته باشد. فرض کنیم $m \in \mathbb{N}_0$، $n \in \mathbb{N}$ و $m \leq n$. فرض کنیم زنجیری

$$P_0 \supset p_1 \supset \cdots \supset p_{n-1} \supset p_n$$

زنجیری از ایده آلهای اول R و زنجیر

$$Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_{m-1} \supset Q_m$$

زنجیری از ایده‌آلهای اول S باشد که به ازای هر $i = 0, 1, \cdots, m$، $Q_i \cap R = p_i$. در اینصورت زنجیر دوم را می توان با ایده‌آلهای اولی چون $Q_{m+1}, \cdots, Q_n$ از S گسترش داد و زنجیر زیر را بدست آورد

$$Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_{m-1} \supset Q_n$$

بطوریکه به ازای هر $i = 0, \cdots, n$، $Q_i \cap R = p_i$.

برهان. ر.ک. [۳۶، قضیه‌ی ۴۱.۱۳]. □

۳۰.۱ **تعریف.** (میدان بطور جبری بسته). میدان K را جبری بسته گوییم، اگر هر چند جمله‌ای ناثابت از $K[X]$ ریشه‌ای در K داشته باشد. قضیه‌ی اصلی جبر بیان می دارد که میدان مختلط $\mathbb{C}$ جبری بسته است.

۳۱.۱ **تعریف.** اگر A یک حوزه صحیح و بطور صحیح بسته در میدان کسرهایش باشد، آنگاه گوییم A یک حوزه‌ی بطور صحیح بسته است. و اگر برای هر ایده‌آل اول p از A حلقه‌ی A_p یک حوزه‌ی بطور صحیح بسته باشد، آنگاه گوییم A یک حلقه‌ی نرمال است. (حلقه‌ی نرمال اغلب به معنی حوزه‌های بطور صحیح بسته شده استفاده می شود).

۳۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم p ایده‌آل اولی از R است اگر $x \in M$ موجود باشد که p روی $(0 :_R x)$ مینیمال است، آنگاه گوییم ایده‌آل اول p بطور ضعیف به M وابسته است و می نویسیم $p \in WeakAss\, M$.

۳۳.۱ **تعریف.** فرض کنیم M مدولی روی حلقه‌ی جابجایی و نوتری R باشد و $p \in \mathrm{Spec}(R)$، گوییم p ایده‌آل اول وابسته به M است اگر $m \in M$ وجود داشته باشد که $(0 : m) = \mathrm{Ann}(m) = p$.

۳۴.۱ **تعریف.** هرگاه هر ایده‌آل با تولید متناهی از R با نمایش متناهی باشد، آنگاه گوییم R حلقه‌ای کوهرنت است.

۳۵.۱ تعریف. R مدول M را یک $R-$ مدول آزاد نامیم در صورتیکه M دارای مولدی مانند $X=\{m_i\}_{i\in I}$ باشد که اگر $\sum_{i\in I} r_i m_i = 0$ آن گاه $r_i = 0$ برای هر $i \in I$. در اینصورت X را پایه‌ای برای M می نامیم. یک مدول آزاد با پایه‌ی متناهی را مدول آزاد متناهی می گوییم.

۳۶.۱ تعریف.

۱) ارتفاع ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را باعلامت $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p})$ نشان می دهیم و تعریف می کنیم :

$\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid$ زنجیری اکید از ایده‌آل های اول R به طول n مختوم به $\mathfrak{p}$ موجود است . $\}$.

(اگر سوپریمم موجود نباشد، قرار می‌دهیم $\mathrm{ht}\mathfrak{p} = \infty$.)

۲) بُعد حلقه R را با علامت $\dim(R)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\dim(R) = \begin{cases} \sup\{\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} & \text{اگر سوپریمم موجود باشد} \\ \infty & \text{اگر سوپریمم موجود نباشد} \end{cases}$$

۳) اگر R نوتری باشد، آنگاه ارتفاع ایده‌آل دلخواه I از R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\mathrm{ht}_R(I) = \min\{\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \ : \ \text{ایده‌آل اول شامل } I \text{ است } \mathfrak{p}\}$$

۳۷.۱ تعریف. فرض کنیم (R,m) حلقه‌ای موضعی باشد در اینصورت اگر $char\ R \neq char\ \frac{R}{m}$ آنگاه گوییم R از مشخصه‌ی مخلوط [۲] است.

۳۸.۱ تذکر. اگر R دامنه‌ای صحیح و موضعی، از مشخصه‌ی مخلوط باشد آنگاه $char\ R = 0, char\ \frac{R}{m} = p$ که در آن p عددی اول است.

۳۹.۱ قضیه. (قضیه‌ی ایده‌آل اصلی کرول). فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی و نوتری و عنصر $a \in R$ وارون ناپذیر باشد. و فرض کنیم p یک ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل اصلی aR از R باشد، در این صورت $htp \leq 1$.

---
[۲] mixed char

برهان. ر.ک. [۳۶، قضیه‌ی ۲.۱۵]. □

۴۰.۱ **قضیه.** (تعمیم قضیه‌ی ایده‌آل اصلی کرول). فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی و نوتری و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد که توسط n عضو تولید شود در اینصورت برای هر ایده‌آل اول مینیمال I چون p، $htp \leq n$.

برهان. ر.ک. [۳۶، قضیه‌ی ۴.۱۵]. □

۴۱.۱ **قضیه.** فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری بوده و p و q ایده‌آل های اول R باشند بقسمی که $p \subsetneq q$ و حداقل یک ایده‌آل اول مانند p' از R موجود باشد که $p \subsetneq p' \subsetneq q$. در اینصورت مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول از R که بین p و q قرار دارد یک مجموعه‌ی نامتناهی است. بویژه $\mathrm{Spec}(R)$ نامتناهی است.

برهان. تناظر یک به یکی بین مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول حلقه‌ی $\frac{R}{p}$ و مجموعه‌ی $\{r \in \mathrm{Spec}(R) : \quad p \subseteq r\}$ برقرار است بنابراین میتوان مطلب را در حلقه‌ی $\frac{R}{p}$ ثابت کرد بنابراین میتوان فرض کرد که R حوزه‌ی صحیح است. بنا به فرض ایده‌آل اولی مانند p' موجود است که $\circ \subsetneq p' \subsetneq p$.
$(\star)$: به برهان خلف فرض کنیم $p_۱, \cdots, p_t$ تمام ایده‌آلهای اول از R باشند که به ازای هر $۱ \leq i \leq t$، $\circ \subsetneq p_i \subsetneq q$ می باشند.
در اینصورت $q \nsubseteq \cup_{i=۱}^{t} p_i$. فرض کنیم $x \in q - \cup_{i=۱}^{t} p_i$ اینک $(x) \subseteq q$ بعلاوه q ایده‌آل اول مینیمال (x) است لذا بنابر قضیه‌ی ایده‌آل اصلی کرول $ht(q) \leq ۱$. از طرف دیگر بنابر $(\star)$، $ht(q) \geq ۲$ که این یک تناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

۴۲.۱ **تعریف.** یک همبافت، زنجیری از مدولها و نگاشت ها مانند

$$A : \qquad \cdots \longrightarrow A_{n+۱} \xrightarrow{d_{n+۱}} A_n \xrightarrow{dn} A_{n-۱} \xrightarrow{d_{n-۱}} \cdots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

می باشد که تساوی $d_n d_{n+۱} = \circ$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$ برقرار است.

۴۳.۱ **تعریف.** فرض کنیم $x_۱, \cdots, x_n \in R$ و $۱ \leq k \leq n$. تعریف می کنیم

$$I(k,n) = \{i = (i(۱), \cdots, i(k)) \in \mathbb{N}^k : \qquad ۱ \leq i(۱) \lneqq \cdots \lneqq i(k) \leq n\}$$

توجه شود که $I(k,n)$ دارای $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ عضو است. قرار می دهیم $K_t(x) = \bigoplus_{i=1}^{\binom{n}{t}} R$ و فرض می کنیم $\{e_{i(1)} \wedge \cdots \wedge e_{i(t)} : i \in I(t,n)\}$ پایه‌ای برای $K_t(x)$ باشد. همریختی $d_{t+1}(x) : K_{t+1}(x) \longrightarrow K_t(x)$ موجود است که برای هر $i \in I(t+1,n)$،

$$d_{t+1}(e_{i(1)} \wedge \cdots \wedge e_{i(t+1)}) = \sum_{s=1}^{t+1} (-1)^{s-1} x_{i(s)} e_{i(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i(s)}} \wedge \cdots \wedge e_{i(t+1)}$$

همچنین همریختی $d_1(x) : \bigoplus_{i=1}^{n} R \longrightarrow R$ موجود است که $d_1(e_i) = x_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$.اکنون میتوان بوضوح دید که

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}(x)} K_n(x) \xrightarrow{d_n(x)} \cdots \xrightarrow{d_2(x)} K_1(x) \xrightarrow{d_1(x)} R \xrightarrow{d_0(x)} 0.$$

یک همبافت است. این همبافت را همبافت کوزول R نسبت به $x := x_1, \cdots x_n$ می نامیم و باعلامت $K_\bullet(x)$ نمایش می دهیم و برای هر $0 \leq i \leq n$، $H_i(x)$ رامدول $\frac{\mathrm{Kerd_i(x)}}{\mathrm{Imd_{i+1}(x)}}$ در نظر می گیریم. همبافت

$$0 \longrightarrow K_n(x) \otimes_R M \xrightarrow{d_n(x) \otimes_R Id_M} K_{n-1}(x) \otimes_R M \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_0 \otimes_R M \xrightarrow{d_0(x) \otimes_R Id_M} 0$$

را باعلامت $K_\bullet(x,M)$ نشان می دهیم و $i-$ مین همولوژی مدول این همبافت را با علامت $H_i(K_\bullet(x,M))$ یا با نماد $H_i(x,M)$ نشان خواهیم داد. همبافت $K_\bullet(x,M)$ را همبافت کزول M نسبت به $x_1, \cdots, x_n$ می نامیم. و امّا همبافت

$$0 \longrightarrow Hom_R(K_0(x), M) \xrightarrow{Hom_R(d_1(x), Id_M)} Hom_R(K_1(x), M) \xrightarrow{Hom_R(d_2(x), Id_M)}$$

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_n(x), Id_M)} Hom_R(K_n(x), M) \longrightarrow 0$$

را نیز میتوان ساخت. این همبافت را با علامت $K^\bullet(x,M)$ نشان می دهیم و آنرا دوگان همبافت کزول M نسبت به $x_1, \cdots, x_n$ می نامیم و $i-$ مین همولوژی مدول این همبافت را با علامت $H^i(x,M)$ یا $H^i(K^\bullet(x,M))$ نشان خواهیم داد.

۴۴.۱ تذکر. [۱۰، ۱.۶.۱۰(d)]:فرض کنیم M یک $R-$ مدول و $x_1,\cdots,x_n$ دنباله‌ای از عناصر R باشد. در اینصورت دو همبافت $K_\bullet(x,M)$ و $K^\bullet(x,M)$ ایزومورف هستند بویژه برای هر i، $H^{n-i}(x,M)\cong H_i(x,M)$

۴۵.۱ تعریف. فرض کنیم که $x_1,\cdots,x_n$ عناصری از R باشند و$M_x=S^{-1}M$، که در آن $S=\{x^\alpha:\alpha\geq 0\}$. به ازای هر $1\leq k\leq n$ قرار می دهیم

$$I(k,n)=\{i=(i(1),\cdots,i(k))\in\mathbb{N}^k:1\leq i(1)\lneqq\cdots\lneqq i(k)\leq n\}$$

و$C^\circ(M)=M$ و$C^k(M)=\bigoplus_{i\in I(k,n)}M_{x_{i(1)}\cdots x_{i(k)}}$. حال همبافت $(*)$ بصورت زیر بیان میشود.

$$0\xrightarrow{\delta^{-1}}M\xrightarrow{\delta^\circ}\bigoplus_{i=1}^n M_{x_i}\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\delta^{k-1}}\bigoplus_{i\in I(k,n)}M_{x_{i(1)},\cdots,i(k)}\longrightarrow$$

$$\cdots\longrightarrow M_{x_1\cdots x_n}\xrightarrow{\delta^n}0$$

خواننده می تواند برای توضیح بیشتر به [۹، گزاره‌ی ۵.۱.۵] مراجعه کند. توجّه شود که δ° با ضابطه‌ی $\delta^\circ(\alpha)=(\frac{\alpha}{1},\cdots,\frac{\alpha}{1})$ تعریف میشود. به منظور آشنایی بیشتر خواننده ضابطه‌ی δ^1 را نیز می آوریم.توجه شود که

$$\delta^1:C^1\longrightarrow C^2$$

که در آن می دانیم که

$$C^2=M_{x_1x_2}\bigoplus M_{x_1x_3}\bigoplus\cdots\bigoplus M_{x_1x_n}\bigoplus M_{x_2x_3}\cdots\bigoplus M_{x_{n-1}x_n}$$

$$\delta^1(\frac{\alpha_1}{x_1^{t_1}},\cdots,\frac{\alpha_n}{x_n^{t_n}})=(\frac{x_1^{t_2}\alpha_2}{(x_1x_2)^{t_2}}-\frac{x_2^{t_1}\alpha_1}{(x_1x_2)^{t_1}},\cdots$$

$$,\frac{x_{n-1}^{t_n}\alpha_n}{(x_{n-1}x_n)^{t_n}}-\frac{x_n^{t_{n-1}}\alpha_{n-1}}{(x_{n-1}x_n)^{t_{n-1}}})$$

تعریف شده است. همبافت $(*)$ را با علامت $C^\bullet(M)$ نشان می دهیم و آنرا همبافت چک می نامیم.

۴۶.۱ تعریف. اگر R مدول چپ X چنان باشد که به ازای هر رشته‌ی دقیق

$$\circ \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \circ$$

رشته

$$\circ \longrightarrow Hom_R(X,M') \overset{Hom_R(id_X,f)}{\longrightarrow} Hom_R(X,M) \overset{Hom_R(id_X,g)}{\longrightarrow} Hom_R(X,M'') \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد، گوییم که $R-$ مدول X یک $R-$ مدول تصویری است.

۴۷.۱ تعریف. R مدول M را با نمایش متناهی گوییم در صورتیکه مدولهای آزاد متناهی مانند $F_۱$ و $F_\circ$ و $R-$ همریختی های $F_\circ \longrightarrow M$ و $F_۱ \longrightarrow F_\circ$ موجود باشند بطوریکه رشته‌ی $\circ \longrightarrow M \longrightarrow F_\circ \longrightarrow F_۱$ دقیق است. لازم به یادآوری است که اگر R نوتری باشد آنگاه هر $R-$ مدول با تولید متناهی، بانمایش متناهی است.

۴۸.۱ تعریف. فرض کنیم R حلقه‌ای جابجایی و یکدار و M یک $R-$ مدول و $\underline{a}$ ایده‌آلی از R باشد. تعریف می کنیم:

$$\Gamma_{\underline{a}}(M) = \{m \in M : \underline{a}^n m = \circ \quad \exists n \in \mathbb{N}\}$$

واضح است که $\Gamma_{\underline{a}}(M)$ زیر مدول M است. ($\Gamma_{\underline{a}}(M)$ را صفرمین کوهومولوژی موضعی نسبت به $\underline{a}$ می نامند). واضح است که $\Gamma_{\underline{a}}(M) = \bigcup_{n=۱}^{\infty}(\circ :_M \underline{a}^n)$. فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک $R-$ همریختی باشد. اگر $m \in \Gamma_{\underline{a}}(M)$ آن گاه برای برخی $n \in \mathbb{N}$ داریم $\underline{a}^n m = \circ$ و لذا $\underline{a}^n f(m) = \circ$. در نتیجه $f(m) \in \Gamma_{\underline{a}}(N)$. بنابراین $\Gamma(f)$ (تحدید f بر $\Gamma_{\underline{a}}(M)$) یک $R-$ همریختی از $\Gamma_{\underline{a}}(M)$ به $\Gamma_{\underline{a}}(N)$ است. توجّه شود که اگر f یک به یک باشد آنگاه $\Gamma_{\underline{a}}(f) : \Gamma_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\underline{a}}(N)$ نیز یک به یک است. اگر $\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ رشته‌ی دقیق باشد آنگاه

$$\circ \longrightarrow \Gamma_{\underline{a}}(M) \overset{\Gamma_{\underline{a}}(f)}{\longrightarrow} \Gamma_{\underline{a}}(N) \overset{\Gamma_{\underline{a}}(g)}{\longrightarrow} \Gamma_{\underline{a}}(P)$$

نیز دقیق است.

حال فرض کنیم $T :_R \varepsilon \longrightarrow_{R'} \varepsilon$ فانکتوری همورد و جمعی باشد. فانکتور مشتق شده‌ی راست T را