دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

مدول های خودتوان تمام و دوگان خودتوان تمام

تدوین

پریسا زارعی زیاری

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

اسفند ۱۳۹۱

به نام خدا

تقدیم به پدر، مادر

و برادرم...

در این عمر گریزنده که گوئی جز خیالی نیست
تو آن جاودان را در جهان خود پدید آور
که هر چیزی فراموش است و آن دم را زوالی نیست
در آن آنی که از خود بگذری وز تنگ خودخواهی
برآری از فراخ روشن فردای انسانی
در آن آنی که دل برهانده از وسواس شیطانی
روانت شعله ای گردد فروسوزد پلیدی را
بدرد موج دود آلود شک و نومیدی را
به سیر سالها باید تدارک دید آن، آن را
چه صیقل ها که باید داد از رنج و طلب، جان را
به راه خویش پای افشردو ایمان داشت پیمان را
تمام هستی انسان گروگان چنین آنی است
که بهر آزمون ارزش ما، طرفه میدانی است
در این میدان اگر پیروز گردی گوهیت گردی
اگر بشکستی آنجا زودتر از مرگ خود مردی

سپاس‌گزاری

از خدایی که در درونم احساس می‌کنم

در آغاز از پدر و مادرم قدردانی می‌نمایم که از ریشه آنها شاخ و برگ می‌گیرم و تکیه‌گاه من در زندگی‌اند و انسانیت را سر لوحه راهم قرار دادند.

پاس خواهم داشت زحمات استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری زاده که بسیاری از سختی ها را برایم آسان نمودند و در طول مدت انجام این پایان نامه از رهنمود های علمی ایشان بهره‌مند شدم.

از اساتید محترم دکتر احمد موسوی و دکتر مریم جهانگیری که داوری این پایان نامه را پذیرفتند و دکتر علیرضا جمالی که در طول دوره آموزش، بی‌دریغ مرا از تجربه و دانش خویش بهره‌مند ساخته‌اند، تشکر می‌کنم.

قدردانی می‌کنم از دوستان عزیزم که در تمامی لحظات در کنارم بودند و خاطرات دلنشینی را در ذهنم نقش بستند؛ به‌ویژه از خانم نگین فرشاد که از راهنمایی‌هایش بسیار استفاده کردم، آقای بهروز ورمزیار که کاستی های دانش مرا برطرف کرد، خانم الهام صراف که حضورش آرامش بخش وجودم بود و از آقای حسن حاجی نژاد، خانم مریم قربانی، آقای صادق حسن زاده و خانم فرحناز صادقی که مرا صمیمانه در مواجهه با مشکلات یاری داده‌اند.

همچنین تشکر می‌کنم از مادربزرگم، برادرم پدرام و نیلوفر که گرما بخش زندگی‌ام هستند.

در پایان " ماهی سیاه کوچولو گفت: شما زیادی فکر می‌کنید، همه اش که نباید فکر کرد، راه که بیفتیم، ترسمان به‌کلی می‌ریزد... . "

پریسا زارعی زیاری

چهارشنبه ۱۶ اسفند ۱۳۹۱ ساعت ۱۰ صبح

چکیده

در این پایان نامه مفهوم مدول‌های خودتوان تمام معرفی می‌شود. نشان داده می‌شود که این مدول‌ها بیشتر خاصیت های اساسی حلقه های منظم فون نویمان را، به ارث می‌برند.

علاوه بر این، مفهوم دوگان مدول‌های خودتوان تمام معرفی و هم‌چنین برخی از خواص این رده از مدول‌ها بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: زیرمدول خودتوان، مدول خودتوان تمام، زیرمدول دوگان خودتوان، زیرمدول دوگان محض، مدول دوگان خودتوان تمام .

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: نخستین ۱۳C۱۳، ثانوی ۱۳C۱۳.

مقدمه

در سرتاسر این پایان نامه R را حلقه جابه‌جایی و یکدار و $\mathbb{Z}$ را حلقه اعداد صحیح در نظر می‌گیریم. هم‌چنین برای زیرمدول N از R−مدول M، $\mathrm{Ann}_R^k(N)$ به‌طوری‌که $k \in \mathbb{N}$ و $E(M)$ به ترتیب مشخص کننده‌ی $\Big(\mathrm{Ann}_R(N)\Big)^k$ و پوشش انژکتیو M هستند.

فرض کنیم M یک R−مدول باشد. M مدول ضربی نامیده می‌شود اگر برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N = IM$([۱۴]).

M مدول دوگان ضربی نامیده می‌شود اگر برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N = (0 :_M I)$.

زیرمدول N از M محض نامیده می‌شود اگر برای هر ایده‌آل I از R، $IN = N \cap IM$.([۴])

علاوه بر این، N دوگان محض نامیده می‌شود اگر برای هر ایده‌آل I از R، $(N :_M I) = N + (0 :_M I)$.([۸])

فرض کنیم N و K دو زیرمدول از M باشند. حاصلضرب N و K را به‌صورت $(N :_R M)(K :_R M)M$ تعریف می‌کنیم و با نماد NK نمایش می‌دهیم. هم‌چنین دوگان حاصلضرب N و K را به‌صورت $(0 :_M \mathrm{Ann}_R(N)\,\mathrm{Ann}_R(K))$ تعریف می‌شود و با نماد $C(NK)$ نمایش داده می‌شود.([۶])

در این پایان نامه ما مفهوم مدول‌های خودتوان تمام، دوگان خودتوان تمام، محض تمام و دوگان محض تمام را معرفی می‌کنیم و برخی اطلاعات سودمند درباره این رده جدید از مدول‌ها را بیان می‌کنیم.

زیرمدول N از M خودتوان (دوگان خودتوان) نامیده می‌شود اگر $N = N^2$ ($N = C(N^2)$). علاوه براین M خودتوان تمام (دوگان خودتوان تمام) نامیده می‌شود اگر هر زیرمدول از M خودتوان (دوگان خودتوان) باشد.

در بخش ۲ این پایان نامه به بیان نتایج دیگری می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که اگر M مدول ضربی و دوگان ضربی باشد به‌طوری‌که M زیرمدول ناصفر پوچ‌توانی نداشته باشد آنگاه M خودتوان تمام است (قضیه ۱۰.۱.۲). هم‌چنین نشان می‌دهیم اگر M یک مدول خودتوان تمام باشد آنگاه M دوگان نیم‌ساده است و هر زیرمدول اول (با تولید متناهی) از M ماکسیمال (دوری) است (قضیه ۱۱.۱.۲، ۱۰.۱.۲، ۲۶.۱.۲).

در بخش ۳ نشان می‌دهیم اگر M یک مدول نیم‌ساده دوگان ضربی باشد، آنگاه M دوگان خودتوان تمام است(قضیه ۹.۱.۳).

در قضیه ۱۵.۱.۳ رده‌بندی سودمندی از زیرمدول‌های دوگان محض از مدول دوگان ضربی را بیان می‌کنیم. در نتیجه ۱۹.۱.۳ ما

رابطه بین مدول‌های خودتوان تمام (محض تمام) با مدول‌های دوگان خودتوان تمام (دوگان محض تمام) را بررسی می‌کنیم.

سرانجام ثابت می‌کنیم اگر M یک مدول با تولید متناهی و دوگان خودتوان تمام باشد آنگاه M نیم‌ساده است.

در تدوین این پایان‌نامه از مقاله زیر استفاده شده است.

H. Ansari-Toroghy and F. Farshadifar, *Fully Idempotent and Coidempotent modules*, Bul. Iranian Math. Soc. 38 (4) (2012) 987-1005.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک R−مدول باشد، در این‌صورت پوچساز M را با $\mathrm{Ann}_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rm = \circ, \forall m \in M\} = (\circ :_R M).$$

تعریف ۲.۱.۱. R−مدول M را باوفا می‌نامیم در صورتی‌که $\mathrm{Ann}_R(M) = \circ$.

لم ۳.۱.۱. [11, 2.5] فرض کنیم M یک R−مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که $M = \mathfrak{a}M$ در این‌صورت $\lambda \in \mathfrak{a}$ وجود دارد به‌طوری‌که $(۱ + \lambda)M = \circ$.

نتیجه ۴.۱.۱. فرض کنیم M یک R−مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که $M = \mathfrak{a}M$ در این‌صورت $R = \mathfrak{a} + \mathrm{Ann}_R(M)$.

لم ۵.۱.۱. [27, 8.24] **(لم ناکایاما)** فرض کنیم M یک R−مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$ و $M = \mathfrak{a}M$، در این‌صورت $M = \circ$.

تعریف ۶.۱.۱. حلقه‌ی R منظم فون نویمان است اگر برای هر $r \in R$، $r' \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $r^۲ r' = r$.

- حلقه R منظم فون نویمان است اگروتنهااگر هر ایده‌آل آن خودتوان باشد. [32, 3.1]

تعریف ۷.۱.۱. $R-$مدول M منظم فون نویمان است اگر هر زیرمدول دوری از M، جمعوند مستقیم از M باشد.

تعریف ۸.۱.۱. R یک حلقه بولی است هرگاه به ازای هر $r \in R$، $r^{۲} = r$.

تعریف ۹.۱.۱. $R-$مدول M را هوپفی (دوگان هوپفی) می‌نامیم هرگاه هر درون‌ریختی پوشا (یک‌به‌یک) از M یکریختی باشد.

- هر مدول آرتینی یک مدول دوگان هوپفی و هر مدول نوتری یک مدول هوپفی است.

تعریف ۱۰.۱.۱. مدول M ساده است اگر $M \neq ۰$ و تنها زیرمدول‌های M، ۰ و M باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱. M یک مدول به‌طور موضعی ساده است اگر برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول ساده باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه R موضعی است در صورتی که تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. [4, P. 106] فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک کلاس از مدول‌ها باشد. مدول M را هم‌مولد به وسیله $\mathcal{A}$ می‌نامیم هرگاه مجموعه اندیس گذاری مانند Λ و $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ در $\mathcal{A}$ و همریختی

$$\varphi : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که φ یک‌به‌یک باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. [7, 2.1.(c)] $R-$مدول M را هم‌مولد متناهی می‌نامیم اگر برای هر گردایه $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از زیرمدول‌های M که $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = ۰$، عدد صحیح مثبت n یافت شود به‌طوری‌که $\bigcap_{i=۱}^{n} M_{\lambda_i} = ۰$.

تعریف ۱۵.۱.۱. [6, P. 2] فرض کنیم N زیرمدول غیر صفر (سره) از $R-$مدول M باشد. N را زیرمدول بزرگ (کوچک) از M می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمدول غیر صفر (سره) L از M، $N \cap L \neq ۰$ $(L + N \neq M)$.

تعریف ۱۶.۱.۱. [30, 1.8] $R-$مدول M را یک مدول توزیع‌پذیر می‌نامیم هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

(۱) برای زیرمدول‌های F، G و H از M،

$$F \cap (G + H) = F \cap G + F \cap H.$$

(۲) برای زیرمدول‌های F، G و H از M،

$$(F + G) \cap (F + H) = F + (G \cap H).$$

(۳) برای هر $m, n \in M$،

$$(m+n)R = mR \cap (m+n)R + nR \cap (m+n)R.$$

قضیه ۱.۱.۱۷. [27, 9.15] فرض کنیم که M یک $R-$مدول باشد.در این‌صورت گزاره های زیر معادل هستند.

(۱) $M = \circ$.

(۲) به ازای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = \circ$. یعنی $\operatorname{Supp}(M) = \phi$.

(۳) به ازای هر $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$، $M_{\mathfrak{m}} = \circ$.

قضیه ۱.۱.۱۸. [27, 9.12 , 9.11] فرض کنیم M یک $R-$مدول و S یک بسته ضربی از R، P و N زیرمدول‌هایی از M، I ایده‌آلی از R و $x \in R$ باشند، در این‌صورت

(۱) $S^{-1}(IM) = (S^{-1}I)(S^{-1}M)$.

(۲) $S^{-1}(xM) = \frac{x}{1} S^{-1}M$.

(۳) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.

(۴) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$.

(۵) $S^{-1}(\frac{M}{N}) \cong \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$.

(۶) اگر P با تولید متناهی باشد آنگاه $S^{-1}(N :_R P) = (S^{-1}N :_{S^{-1}R} S^{-1}P)$.

(۷) اگر M با تولید متناهی باشد آنگاه $S^{-1}(\operatorname{Ann}_R(M)) = \operatorname{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

گزاره ۱.۱.۱۹. فرض کنیم N و K زیرمدول‌هایی از M باشند به‌طوری‌که $N \subseteq K$ و برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، $N_{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}$، آنگاه $N = K$.

برهان. برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R،

$$(\frac{K}{N})_{\mathfrak{p}} \cong \frac{K_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}} = \circ$$

لذا با توجه به قضیه ۱.۱.۱۷، $\frac{K}{N} = \circ$. بنابراین $K = N$. □

تعریف ۲۰.۱.۱. [15, 1.1.1] فرض کنیم M یک $R-$مدول و I ایده‌آلی از R باشد.

$$\Gamma_I(M) := \{m \in M \mid \exists t \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad I^t m = \circ\} \leqslant M$$

از این رو $\Gamma_I(M) = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} (\circ :_M I^t)$.

گزاره ۲۱.۱.۱. [15, 2.1.4] فرض کنیم E یک $R-$مدول انژکتیو و I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت $\Gamma_I(E)$ یک $R-$مدول انژکتیو است.

تعریف ۲۲.۱.۱. زیرمدول N از M را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمدول سره K از M که $N \subseteq K$ نتیجه شود $N = K$.

گزاره‌ی زیر در فصل سوم کاربرد فراوان دارد.

گزاره ۲۳.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$مدول و N، K و L زیرمدول‌های M و $\mathfrak{a}$ و$\mathfrak{b}$ ایده‌آل هایی از R باشند. گزاره های زیر برقرار هستند.

(۱) $(N :_M \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \Big((N :_M \mathfrak{a}) :_M \mathfrak{b}\Big)$.

(۲) $(\circ :_{\frac{M}{N}} \mathfrak{a}) = \dfrac{(N :_M \mathfrak{a})}{N}$.

(۳) اگر $N \subseteq K$ باشد آنگاه $\mathrm{Ann}_R(K) \subseteq \mathrm{Ann}_R(\dfrac{K}{N})$.

(۴) اگر $M = L + K$ آنگاه $(N :_M \mathfrak{a}) = (N :_L \mathfrak{a}) + (N :_K \mathfrak{a})$.

(۵) $\mathfrak{a}M + \mathfrak{b}M = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})M$.

(۶) $\mathrm{Ann}_R(\dfrac{K}{N}) = (N :_R K)$.

(۷) $(\circ :_R \mathfrak{a}N) = \Big((\circ :_M \mathfrak{a}) :_R N\Big)$.

(۸) $\mathrm{Ann}_R(N + K) = \mathrm{Ann}_R(N) \bigcap \mathrm{Ann}_R(K)$.

(۹) فرض کنیم برای هر i، $\mathfrak{a}_i$ یک ایده‌آل R است. داریم

$$(\circ :_M \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \cap_{i\in I}(\circ :_M \mathfrak{a}_i).$$

برهان. (۱) فرض کنیم $m \in \Big((N:_M \mathfrak{a}):_M \mathfrak{b}\Big)$ پس $m\mathfrak{b} \subseteq (N:_M \mathfrak{a})$. از این رو $m\mathfrak{b}\mathfrak{a} \subseteq N$ در نتیجه $m \in (N:_M \mathfrak{a}\mathfrak{b})$. لذا $\Big((N:_M \mathfrak{a}):_M \mathfrak{b}\Big) \subseteq (N:_M \mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

حال فرض کنیم $m' \in (N:_M \mathfrak{a}\mathfrak{b})$ پس $m'\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq N$ از این رو $m'\mathfrak{b} \subseteq (N:_M \mathfrak{a})$.

در نتیجه $m' \in \Big((N:_M \mathfrak{a}):_M \mathfrak{b}\Big)$. لذا $(N:_M \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq \Big((N:_M \mathfrak{a}):_M \mathfrak{b}\Big)$. بنابراین

$$(N:_M \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \Big((N:_M \mathfrak{a}):_M \mathfrak{b}\Big).$$

(۲) فرض کنیم $x+N \in (\circ :_{\frac{M}{N}} \mathfrak{a})$ پس $\mathfrak{a}(x+N) = \circ$ از این رو $\mathfrak{a}x + N = N$ لذا $\mathfrak{a}x \subseteq N$ در نتیجه $x \in (N:_M \mathfrak{a})$. در این‌صورت $x+N \in \dfrac{(N:_M \mathfrak{a})}{N}$. لذا $(\circ :_{\frac{M}{N}} \mathfrak{a}) \subseteq \dfrac{(N:_M \mathfrak{a})}{N}$.

حال فرض کنیم $x'+N \in \dfrac{(N:_M \mathfrak{a})}{N}$ پس $x' \in (N:_M \mathfrak{a})$ از این رو $\mathfrak{a}x' \subseteq N$ در نتیجه $\mathfrak{a}x'+N = N$ در این‌صورت $\mathfrak{a}(x'+N) = \circ$ لذا $x'+N \in (\circ :_{\frac{M}{N}} \mathfrak{a})$ پس $\dfrac{(N:_M \mathfrak{a})}{N} \subseteq (\circ :_{\frac{M}{N}} \mathfrak{a})$. بنابراین

$$(\circ :_{\frac{M}{N}} \mathfrak{a}) = \frac{(N:_M \mathfrak{a})}{N}\ .$$

(۳) فرض کنیم $r \in \mathrm{Ann}_R(K)$ پس $rK = \circ$ داریم

$$r(\frac{K}{N}) = \frac{rK+N}{N} = \frac{\circ + N}{N} = \circ$$

بنابراین $r \in \mathrm{Ann}_R(\dfrac{K}{N})$.

(۴) فرض کنیم $x \in (N:_M \mathfrak{a})$ پس $x\mathfrak{a} \subseteq N$ از طرفی $x \in M$ در نتیجه $\ell \in L$ و $k' \in K$ وجود دارند به‌طوری‌که $x = \ell + k'$. در این‌صورت $x\mathfrak{a} = \ell\mathfrak{a} + k'\mathfrak{a} \subseteq N$ داریم $\ell\mathfrak{a} \subseteq \ell\mathfrak{a} + k'\mathfrak{a} \subseteq N$ پس $\ell \in (N:_L \mathfrak{a})$ و مشابهاً $k' \in (N:_K \mathfrak{a})$. بنابراین $x \in (N:_L \mathfrak{a}) + (N:_K \mathfrak{a})$ لذا $(N:_M \mathfrak{a}) \subseteq (N:_L \mathfrak{a}) + (N:_K \mathfrak{a})$.

حال فرض کنیم $x' \in (N:_L \mathfrak{a}) + (N:_K \mathfrak{a})$ پس $\ell_۱ \in (N:_L \mathfrak{a})$ و $k'_۱ \in (N:_K \mathfrak{a})$ وجود دارند به‌طوری‌که $x' = \ell_۱ + k'_۱$. داریم

$$x'\mathfrak{a} = \ell_۱\mathfrak{a} + k'_۱\mathfrak{a} \subseteq N + N = N$$

لذا $x' \in (N:_M \mathfrak{a})$ در نتیجه $(N:_L \mathfrak{a}) + (N:_K \mathfrak{a}) \subseteq (N:_M \mathfrak{a})$. بنابراین

$$(N:_M \mathfrak{a}) = (N:_L \mathfrak{a}) + (N:_K \mathfrak{a}).$$

(۵) می‌دانیم $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ پس $\mathfrak{a}M \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})M$ مشابهاً $\mathfrak{b}M \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})M$ لذا $\mathfrak{a}M+\mathfrak{b}M \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})M$.

حال فرض کنیم $x \in (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})M$ در این‌صورت $x=\sum_{i=1}^{t}(a_i+b_i)m_i$ به‌طوری‌که $a_i \in \mathfrak{a}$، $b_i \in \mathfrak{b}$ و $m_i \in M$ داریم

$$x=\sum_{i=1}^{t}(a_i+b_i)m_i=\sum_{i=1}^{t}a_im_i+\sum_{i=1}^{t}b_im_i \in \mathfrak{a}M+\mathfrak{b}M$$

بنابراین $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})M \subseteq \mathfrak{a}M+\mathfrak{b}M$.

(۶) آسان است.

(۷) فرض کنیم $r \in (0 :_R \mathfrak{a}N)$ پس $r\mathfrak{a}N=0$ لذا $rN \in (0 :_M \mathfrak{a})$ در این‌صورت $r \in \Big((0 :_M \mathfrak{a}) :_R N\Big)$. حال فرض کنیم $r' \in \Big((0 :_M \mathfrak{a}) :_R N\Big)$ در نتیجه $r'N \subseteq (0 :_M \mathfrak{a})$ لذا $r'N\mathfrak{a}=0$ و از این رو $r' \in (0 :_R N\mathfrak{a})$. بنابراین

$$.\,(0 :_R \mathfrak{a}N)=\Big((0 :_M \mathfrak{a}) :_R N\Big)$$

(۸) فرض کنیم $r \in \operatorname{Ann}_R(N+K)$ پس $r(N+K)=0$ از طرفی $N \subseteq N+K$ و در نتیجه $rN \subseteq r(N+K)=0$ لذا $r \in \operatorname{Ann}_R(N)$. مشابهاً $r \in \operatorname{Ann}_R(K)$ بنابراین $r \in \operatorname{Ann}_R(N)\cap\operatorname{Ann}_R(K)$. پس $\operatorname{Ann}_R(N+K) \subseteq \operatorname{Ann}_R(N)\cap\operatorname{Ann}_R(K)$.

حال فرض کنیم $r' \in \operatorname{Ann}_R(N)\cap\operatorname{Ann}_R(K)$ در نتیجه $r'N=r'K=0$ لذا $r'(N+K)=0$ پس $r' \in \operatorname{Ann}_R(N+K)$. در این‌صورت $\operatorname{Ann}_R(N)\cap\operatorname{Ann}_R(K) \subseteq \operatorname{Ann}_R(N+K)$.

(۹) فرض کنیم $m \in (0 :_M \sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i)$ پس $\sum_{i\in I}m\mathfrak{a}_i=m\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i=0$ حال $\mathfrak{a}_i \subseteq \sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ در نتیجه $m\mathfrak{a}_i \subseteq \sum_{i\in I}m\mathfrak{a}_i$ لذا $m\mathfrak{a}_i=0$ از این رو برای هر i، $m \in (0 :_M \mathfrak{a}_i)$ پس $m \in \bigcap_{i\in I}(0 :_M \mathfrak{a}_i)$.

حال فرض کنیم $m' \in \bigcap_{i\in I}(0 :_M \mathfrak{a}_i)$. در نتیجه برای هر $i \in I$، $m' \in (0 :_M \mathfrak{a}_i)$ پس برای هر $i \in I$، $m'\mathfrak{a}_i=0$ لذا $\sum_{i\in I}m'\mathfrak{a}_i=0$ از این رو $m'\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i=0$ در نتیجه $m' \in (0 :_M \sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i)$ بنابراین

$$(0 :_M \sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i)=\bigcap_{i\in I}(0 :_M \mathfrak{a}_i).$$

□

۲.۱ پوشش انژکتیو

تعریف ۱.۲.۱. R−مدول E را توسیع R−مدول M می‌نامیم هرگاه M زیرمدولی از E باشد. اگر M زیرمدول سره E باشد، E توسیع سره از M نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم که R−مدول E یک توسیع R−مدول ناصفر M باشد. در این‌صورت E را توسیع اساسی M می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر E' از E، $E' \cap M \neq 0$.

به عبارت دیگر به ازای هر عضو غیر صفر $x \in E$، عضوی مانند $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که rx یک عضو غیر صفر از M باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم که R−مدول E یک توسیع R−مدول ناصفر M باشد. در این‌صورت E را یک توسیع اساسی ماکسیمال از M می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

(۱) E یک توسیع اساسی M باشد.

(۲) اگر E' یک توسیع محض از E باشد، آنگاه E' توسیع اساسی M نباشد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم که R−مدول E یک توسیع R−مدول ناصفر M باشد. در این‌صورت E را یک توسیع انژکتیو مینیمال از M می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

(۱) E یک R−مدول انژکتیو باشد.

(۲) اگر E' یک زیرمدول محض E و شامل M باشد، آنگاه E' انژکتیو نباشد.

گزاره ۵.۲.۱. [2.21 , 2.20 ,28] R−مدولی مانند E موجود است که یک توسیع R−مدول ناصفر M می‌باشد و در شرایط معادل زیر صدق می‌کند.

(۱) E یک توسیع اساسی انژکتیو M است.

(۲) E یک توسیع اساسی ماکسیمال M است.

(۳) E یک توسیع انژکتیو مینیمال M است.

به‌علاوه اگر E و E' در شرایط معادل فوق صدق کنند، آنگاه $E \cong E'$.

ملاحظه ۶.۲.۱. $R-$مدول E مذکور در گزاره‌ی ۵.۲.۱ را با علامت $E_R(M)$ و یا در صورت مشخص بودن حلقه با نماد $E(M)$ نمایش می‌دهیم و آن را پوشش انژکتیو M می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد، در این‌صورت G را بخش‌پذیر می‌نامیم در صورتی که برای هر g از G و هر $n \neq ۰$ از $\mathbb{Z}$، g' از G وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g = ng'$.

نتیجه ۸.۲.۱. [26, 3.35] فرض کنید R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد، در این‌صورت E یک $R-$مدول انژکتیو است اگر و تنها اگر E بخش‌پذیر باشد.

مثال ۹.۲.۱. برای هر عدد اول p، $\mathbb{Z}-$مدول $\mathbb{Z}_p$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ که

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{r}{p^i} + \mathbb{Z} \mid i \in \mathbb{N}_۰, r \in \mathbb{Z}\}.$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول انژکتیو است. برای این منظور نشان می‌دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ بخش‌پذیر است. فرض کنیم $۰ \neq r \in \mathbb{Z}$ و $\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

حالت اول اگر $p \nmid r$ پس $(r,p) = ۱$ در نتیجه $(r, p^i) = ۱$ پس $s, t \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به‌طوری‌که $rs + p^i t = ۱$. حال

$$\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} = \frac{a(rs + p^i t)}{p^i} + \mathbb{Z} = \frac{ars}{p^i} + at + \mathbb{Z} = \frac{ars}{p^i} + \mathbb{Z} = r(\frac{as}{p^i} + \mathbb{Z})$$

لذا در این حالت $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ بخش‌پذیر است.

حالت دوم اگر $p \mid r$ پس $\ell \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به‌طوری‌که $r = p\ell$ از این رو $r = p^{\ell'}.h$ به‌طوری‌که $(p,h) = ۱$ و $\ell' \geq ۱$. حال بنا بر حالت اول نتیجه می‌شود $h\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ لذا داریم $r\mathbb{Z}_{p^\infty} = p^{\ell'}.h.\mathbb{Z}_{p^\infty} = p^{\ell'}.\mathbb{Z}_{p^\infty}$. نشان می‌دهیم $p^{\ell'}.\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. فرض کنیم $\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. در نتیجه

$$\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} = \frac{ap^{\ell'}}{p^i p^{\ell'}} + \mathbb{Z} = p^{\ell'}\Big((\frac{a}{p^{i+\ell'}}) + \mathbb{Z}\Big)$$

لذا $\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \in p^{\ell'}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ بنابراین $p^{\ell'}\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ پس $r\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ در نتیجه در این حالت نیز $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ بخش‌پذیر است. بنابراین $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ انژکتیو است. حال نشان می‌دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ توسیع اساسی $\mathbb{Z}_p$ است. می‌دانیم $\mathbb{Z}_p \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ حال همریختی $f : \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ با ضابطه $f(i + p\mathbb{Z}) = \frac{i}{p} + \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. بنابراین $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \cong \operatorname{Im} f \leqslant \mathbb{Z}_{p^\infty}$ از طرفی $\operatorname{Im} f = \langle \frac{۱}{p} + \mathbb{Z} \rangle$. نشان می‌دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک توسیع اساسی $\langle \frac{۱}{p} + \mathbb{Z} \rangle$ است. در این‌صورت $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ توسیع اساسی $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ است. فرض کنیم $\mathbb{Z}_{p^\infty} \ni \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \neq ۰$ به طوری که $(a,p) = ۱$ داریم

$$p^{i-1}(\frac{a}{p^i}+\mathbb{Z})=\frac{a}{p}+\mathbb{Z}\in\langle\frac{1}{p}+\mathbb{Z}\rangle$$

□

۳.۱ مدول‌های ضربی و دوگان ضربی

تعریف ۱.۳.۱. مدول M را ضربی می‌نامیم در صورتی‌که برای هر زیرمدول N از M ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N = IM$.

- M یک $R-$مدول ضربی است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول N از M داشته باشیم $N = (N :_R M)M$.
- هر مدول دوری ضربی است.

لم ۲.۳.۱. [14, 2] فرض کنیم R یک حلقه باشد.

(۱) فرض کنیم S یک بسته ضربی از R و M یک $R-$مدول ضربی باشد. در این‌صورت $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R-$مدول ضربی است.

(۲) $R-$مدول با تولید متناهی M ضربی است اگروتنهااگر برای هر ایده‌آل اول (ماکسیمال) $\mathfrak{p}$ از R، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}-$مدول ضربی باشد.

قضیه ۳.۳.۱. [18, 3.1] فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار و M یک $R-$مدول ضربی باوفا باشد. گزاره های زیر معادل هستند.

(۱) M با تولید متناهی است.

(۲) اگر A و B ایده‌آل هایی از R باشند به‌طوری‌که $AM \subseteq BM$ آنگاه $A \subseteq B$ است.

(۳) برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل منحصربه‌فرد I از R وجود دارد به‌طوری‌که $N = IM$ است.

(۴) برای هر ایده‌آل سره A از R، $M \neq AM$.

(۵) برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{p}$ از R، $M \neq \mathfrak{p}M$.

گزاره ۴.۳.۱. [18, 1.7] $R-$مدول M ضربی است اگروتنهااگر

(۱) برای هر گردایه‌ی غیر تهی از ایده‌آل های $I_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ از R،

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda}[I_\lambda + \mathrm{Ann}_R(M)])M.$$

(۲) برای هر زیرمدول N از M و ایده‌آل A از R که $N \subseteq AM$، ایده‌آل B وجود دارد به‌طوری‌که $B \subseteq A$ و $N \subseteq BM$.

قضیه ۵.۳.۱. [6, 3.6] فرض کنیم M یک $R-$مدول و N، H و K زیرمدول‌هایی از M باشند. گزاره های زیر برقرار است.

(۱) $HN + HK \subseteq H(N+K)$ و اگر M یک $R-$مدول ضربی باشد، تساوی برقرار است.

(۲) $C(H(N\cap K)) \subseteq C(HN)\cap C(HK)$ و اگر M یک $R-$مدول دوگان ضربی باشد، تساوی برقرار است.

قضیه ۶.۳.۱. [18, 2.5] فرض کنیم M یک $R-$مدول ضربی ناصفر باشد. آنگاه

(۱) هر زیرمدول سره از M مشمول در یک زیرمدول ماکسیمال از M می‌باشد.

(۲) K یک زیرمدول ماکسیمال از M است اگروتنهااگر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{p}$ از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $K = \mathfrak{p}M \neq M$.

گزاره ۷.۳.۱. اگر M یک $R-$مدول ضربی و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$ و $M = \mathfrak{a}M$ آنگاه $M = 0$.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم $M \neq 0$ پس $0 \neq x \in M$ وجود دارد. حال از آنجا که Rx زیرمدول M و M ضربی است پس ایده‌آل I از R وجود دارد به‌طوری‌که $Rx = IM$. بنابراین

$$Rx = IM = I\mathfrak{a}M = \mathfrak{a}(IM) = \mathfrak{a}Rx = \mathfrak{a}x$$

پس $x \in \mathfrak{a}x$ پس $t \in \mathfrak{a} \subseteq J(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = tx$ در نتیجه $(1-t)x = 0$ اما $t \in J(R)$ و $1 - tr$ برای هر $r \in R$ وارون‌پذیر است. پس $x = 0$ و این تناقض است. □

تعریف ۸.۳.۱. مدول M را دوگان ضربی می‌نامیم، در صورتی‌که برای هر زیرمدول N از M ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N = (0 :_M I)$.

• فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. در این‌صورت M دوگان ضربی است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول N از M داشته باشیم $N = (0 :_M \mathrm{Ann}_R(N))$ [5, 3.7].