بسم‌الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

زیرمدول‌های اول وابسته تعمیم‌یافته و رادیکال زیرمدول‌ها

استاد راهنما:
دکتر علیرضا نقی‌پور

استاد مشاور:
دکتر محمدرضا ریسمانچیان

توسط:
نرجس السادات حسینی کاکلکی

خرداد ماه ۱۳۹۰

پیوست شماره ۲

تشکر و قدردانی

حمد بی‌پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایتشان بی‌نظیر و همنوایی با آنان سعادت است.

در پایان این مرحله از تحصیل برخود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های محبت و مهربانی پدر و مادر عزیزم صمیمانه تشکر کنم. از همسر خوب و مهربانم که در طی مراحل این پایان‌نامه همواره پشتوانه و مشوقم بودند و هم‌چنین فرزند عزیزم که صبورانه با من همراهی کرد، کمال تشکر را دارم.

از استاد بزرگوار، جناب آقای **دکتر علیرضا نقی‌پور**، که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پروژه و دیگر مراحل تحصیل هدایت کردند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌کنم.

و جا دارد از استاد بزرگوار، جناب آقای **دکتر محمدرضا ریسمانچیان**، که با راهنمایی‌ها و مساعدت‌های عالمانه خود، راهگشای این پژوهش و دلگرمی مضاعف تحصیل من بودند، سپاسگزاری کنم.

هم‌چنین از استاد محترم و فرهیخته گروه ریاضی، آقای دکتر حسامی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌کنم.

در نهایت، از تمام کسانی که در عرصه‌های مختلف زندگی با کمک‌ها و راهنمایی‌هایشان مرا همراهی کرده‌اند، سپاسگزارم.

نرجس السادات حسینی

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تقدیم به

این مجموعه کوچک و ناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فروکش نخواهد کرد به مهربان‌ترین کسان خویش یعنی خانواده عزیز و ارجمندم به خصوص

پدر و مادر گرامی،

همسر عزیز و فرزند دلبندم

تقدیم می‌دارم.

چکیده

از اواخر سال ۱۹۸۰، یک مسئله چالش‌انگیز، یافتن تجزیه رادیکال زیرمدول N مدول (نویتری) M، روی یک حلقه تعویض‌پذیر R است، که رادیکال N اشتراک زیرمدول‌های اول شامل N می‌باشد. نظر به این‌که مفهوم رادیکال یک زیرمدول در اواخر سال ۱۹۸۰ میلادی بسیار مورد توجه قرار گرفته بود، بسیاری از دانشمندان بر آن شدند تا رادیکال یک زیرمدول را برحسب عناصر و یا برحسب عوامل تجزیه بیان کنند. با توجه به سوابق به‌دست آمده، اعم تلاش‌ها به سوی یافتن یک تجزیه مشابه با فرمول شناخته شده برای عناصر رادیکال یک ایدال I، $\sqrt{I} = \{\ r \in R \mid r^n \in I \ :\ n \in \mathbb{N}_0$ برای برخی $\}$ از حلقه (تعویض‌پذیر و یکدار) R معطوف می‌شد.

در این پایان‌نامه، یک تجزیه رادیکال N روی یک مدول نویتری M را ارائه خواهیم داد، که در موارد ساده محاسبه و در دیگر موارد در سیستم جبری رایانه‌ای انجام می‌پذیرد.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{N}_\circ$	$\mathbb{N} \cup \{\circ\}$
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$M \oplus N$	مجموع مستقیم M و N
$\prod M_i$	حاصل‌ضرب مستقیم M_i ها
$M \otimes_R N$	حاصل‌ضرب تانسوری R−مدول‌های M و N
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایدال‌های اول R
Ker(f)	هسته نگاشت f
$\dim(R)$	بعد حلقه R
$\mathcal{C}(R)$	رسته R−مدول‌ها و R−همریختی‌ها
$\mathrm{Ass}_R(M)$	مجموعه ایدال‌های اول وابسته R−مدول M
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	مجموعه همریختی‌های از M به N
$\mathrm{ann}(M)$	پوچ‌ساز مدول M
$(N : M)$	پوچ‌ساز M/N
$\mathrm{rad}(M)$	رادیکال مدول M
$\mathrm{ass}(I)$	مجموعه ایدال‌های اول وابسته ایدال I از R
$\mathrm{GAP}(N)$	مجموعه ایدال‌های اول وابسته تعمیم‌یافته زیرمدول N
$ht_R(I)$	بلندی ایدال I
$Z(M)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R−مدول M
$\mathrm{Im}(f)$	تصویر نگاشت f

n–اُمین مدول همولوژی همبافت X	$H_n(X)$
$\mathfrak{p}$–بستار زیرمدول N	$cl_{\mathfrak{p}}(N)$
بعد یکنواخت R–مدول M	$u(M)$

پیشگفتار

با توجه به اهمیت مفهوم رادیکال یک زیرمدول در این اواخر، بسیاری از تلاش‌ها به یافتن تجزیه رادیکال یک زیرمدول معطوف شد. می‌توان از این دست به موارد زیر اشاره کرد. مک‌کاسلند[۱] و موور [۲] [۱۱] در سال ۱۹۸۶ میلادی موفق به محاسبه رادیکال یک زیرمدول N از $R-$مدول ضربی و متناهی- تولید M شدند و در سال ۱۹۹۱ [۱۲] ثابت کردند که اگر R، یک حوزه ایدال‌های اصلی و N یک زیرمدول $R-$مدول متناهی- تولید M باشد، آن‌گاه $\mathrm{rad}(N) =< E(N) >$، که

$$E(N) = \{x \in M | \exists\ a \in M, r \in R : x = ra\ ,\ r^n a \in N, n \in \mathbb{N}_\circ \text{ برای برخی}\}.$$

به عبارت دیگر R در " فرمول رادیکال" صدق می‌کند اگر برای هر زیرمدول N از $R-$مدول M، رادیکال N، زیرمدول تولید شده به وسیله $E(N)$ باشد. اما متاسفانه همه مدول‌ها در فرمول رادیکال صدق نمی‌کنند. هم‌چنین مارسلو [۳] و رودریگز [۴] [۸] در سال ۲۰۰۰ میلادی روشی را برای محاسبه رادیکال زیرمدول N مدول آزاد F ارائه دادند. [۴] و [۵] نیز منابع دیگری هستند جهت ارائه روش محاسبه رادیکال زیرمدول N مدول خاص M.

سرانجام با ایده گرفتن از [۱۴]، در سال ۲۰۰۸ میلادی مک‌کاسلند و اسمیت [5] [۱۸] یک تجزیه رادیکال یک زیرمدول N یک $R-$مدول نویتری M، به صورت زیر ارائه دادند، که رادیکال N اشتراک متناهی زیرمدول‌های اول شامل N است.

[1] R. L. McCasland

[2] M. E. Moore

[3] A. Marcelo

[4] C. Rodriguez

[5] P. F. Smith

$$\mathrm{rad}(N)=\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{ass}(\mathrm{rad}(N))} cl_{\mathfrak{p}}(N+\mathfrak{p}M).$$

یک مزیت چنین نمایشی محاسبه بعد یکنواخت $M/\mathrm{rad}(N)$ می‌باشد (برای جزئیات بیشتر به منبع [۱۶] مراجعه شود). سپس ایدال‌های اول وابسته تعمیم یافته یک زیرمدول N مدول M، را تحت عنوان $\mathrm{GAP}(N)$ تعریف کردند و ثابت کردند که اگر N یک زیرمدول، مدول نویتری M باشد، آن‌گاه $\mathrm{GAP}(N)$ متناهی و $\mathrm{ass}(\mathrm{rad}(N)) \subseteq \mathrm{GAP}(N)$. در نتیجه زیرمدول‌های اول اضافی تجزیه ارائه شده در بالا، حذف و اعضای $\mathrm{GAP}(N)$ که به $\mathrm{ass}(\mathrm{rad}(N))$ متعلق نیستند مشخص می‌شوند. که ما در این پایان‌نامه به آن‌ها خواهیم پرداخت.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف و نتایج مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. بخش ۱.۱ به مقدمه‌ای بر جبر تعویض‌پذیر اختصاص دارد که برخی از نتایج آن بدون اثبات بیان شده است. در ادامه این بخش، جهت درک مفهوم بعد یکنواخت R−مدول دلخواه M مطالبی آورده شده است [۱۶]. بخش ۲.۱ نیز به مقدمه‌ای از جبر هومولوژی اشاره دارد.

۱.۱ مقدمه‌ای بر جبر تعویض‌پذیر

در این بخش R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است.

یادآوری: فرض کنیم I و J ایدال‌های حلقه R باشند. در این‌صورت

۱) مجموعه همه ایدال‌های اول R = $\mathrm{Spec}(R)$؛

۲) $\mathrm{V}(I) = \{ \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p} \ \}$؛

۳) $\sqrt{I} = \{ \ r \in R \mid r^n \in I \ : \ n \in \mathbb{N}$ برای برخی $\}$؛

۴) $(I :_R J) = \{ \ r \in R \mid rJ \subseteq I \ \}$؛

۵) برای هر $s \in R$ $(I :_R s) = \{ \ r \in R \mid rs \in I \ \}$ و $(0 :_R s) = \mathrm{ann}(s)$.

۱.۱.۱ تجزیه اولیه

برای اثبات گزاره، لم و قضایای استفاده شده در این بخش به منبع [۲۰] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم Q یک ایدال سره حلقه تعویض‌پذیر R باشد. گوییم Q ایدال اولیه است، اگر $ab \in Q$ $(a, b \in R)$، آن‌گاه داشته باشیم $a \in Q$ یا $b \in \sqrt{Q}$.

واضح است که هر ایدال اول حلقه R، یک ایدال اولیه R است.
یادآوری می‌کنیم که J ایدال اول مینیمال I است، هرگاه J یک ایدال اول R شامل I باشد و اگر K یک ایدال اول از R باشد که $I \subseteq K \subseteq J$، آن‌گاه $K = J$.

لم ۱.۱.۱ فرض کنیم Q یک ایدال اولیه حلقه R باشد. در این‌صورت $\sqrt{Q} =: \mathfrak{p}$ یک ایدال اول R است و گوییم Q، $\mathfrak{p}$−اولیه است. به‌علاوه $\mathfrak{p}$ کوچکترین ایدال اول R شامل Q می‌باشد. به عبارت دیگر، هر ایدال اول R که شامل Q باشد باید شامل $\mathfrak{p}$ نیز باشد. بنابراین $\mathfrak{p}$ ایدال اول مینیمال Q است.

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال حلقه R باشد. اگر $\sqrt{I}$ ایدال ماکسیمال باشد، آن‌گاه I اولیه است.

گزاره ۲.۱.۱ در یک حلقه نویتری R هر ایدال اولیه، شامل یک توان از رادیکالش است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال سره حلقه تعویض‌پذیر R باشد. یک تجزیه اولیه I، اشتراک متناهی ایدال‌های اولیه Q_i از R مانند $I = \bigcap_{i=۱}^{n} Q_i$ است، که برای هر i $(۱ \leq i \leq n)$، $\mathfrak{p}_i := \sqrt{Q_i}$. یک تجزیه اولیه I نرمال نامیده می‌شود، هرگاه برای $i \neq j$، $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ و برای هر j $(۱ \leq j \leq n)$، $\bigcap_{i \neq j} Q_i \nsubseteq Q_j$.
گوییم I ایدال تجزیه‌پذیر R است، هرگاه I تجزیه اولیه داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال تجزیه‌پذیر حلقه تعویض‌پذیر R و $I = \bigcap_{i=۱}^{n} Q_i$، یک تجزیه اولیه نرمال I باشد به‌طوری‌که برای هر i $(۱ \leq i \leq n)$، Q_i، $\mathfrak{p}_i-$ اولیه است. در این‌صورت مجموعه $\{\mathfrak{p}_۱, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$، مجموعه ایدال‌های اول وابسته I نامیده می‌شود و با $\mathrm{ass}(I)$ یا $\mathrm{ass}_R(I)$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۳.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال تجزیه‌پذیر حلقه تعویض‌پذیر R باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. در این‌صورت $\mathfrak{p}$ یک ایدال اول مینیمال I است اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}$ یک عضو مینیمال $\mathrm{ass}(I)$ باشد. به‌خصوص همه ایدال‌های اول مینیمال I متعلق به $\mathrm{ass}(I)$ می‌باشند. بنابراین I تنها تعداد متناهی ایدال اول مینیمال دارد و اگر $\mathfrak{p}_۱ \in \mathrm{Spec}(R)$ به‌طوری‌که $I \subseteq \mathfrak{p}_۱$، آن‌گاه $\mathfrak{p}_۲ \in \mathrm{ass}(I)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathfrak{p}_۱ \subseteq \mathfrak{p}_۲$.

تبصره ۱.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال تجزیه‌پذیر حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در گزاره قبل دیدیم که اعضای مینیمال $\mathrm{ass}(I)$ دقیقاً ایدال‌های اول مینیمال I هستند. این ایدال‌های اول، ایدال‌های مینیمال نامیده می‌شوند. اول‌های وابسته باقی‌مانده I، اول‌های وابسته I هستند که مینیمال نیستند و اول‌های اضافی I نامیده می‌شوند.
واضح است که یک ایدال تجزیه‌پذیر حلقه تعویض‌پذیر R لزوماً اول اضافی ندارد. یک ایدال اولیه Q از R تجزیه‌پذیر است و $Q = Q$ یک تجزیه اولیه نرمال Q می‌باشد. بنابراین $\sqrt{Q}$ تنها اول وابسته Q است.

گزاره ۴.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال سره حلقه تعویض‌پذیر و نویتری R باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. در این‌صورت $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(I)$ اگر و تنها اگر $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{p} = (I : r)$ اگر و تنها اگر $\lambda \in \frac{R}{I}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}_R(\lambda) = (0 :_R \lambda)$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال سره حلقه تعویض‌پذیر R باشد. گوییم I تحویل‌ناپذیر است اگر I نتواند به عنوان اشتراک دو ایدال اکیداً بزرگتر بیان شود، یعنی اگر I_1 و I_2 دو ایدال R باشند و $I = I_1 \cap I_2$، آن‌گاه $I = I_1$ یا $I = I_2$.

قضیه ۱.۱.۱ در یک حلقه نویتری هر ایدال، تجزیه اولیه نرمال دارد.

۲.۱.۱ موضعی‌سازی

تعریف **۵.۱.۱** فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی R باشد. بدین معنا که $1 \in S$ و S ضربی بسته باشد. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی $R \times S$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists s' \in S \quad : \quad (at - bs)s' = 0 \quad (a, b \in R, s, t \in S).$$

رده هم‌ارزی (a, s) را با نماد a/s نشان می‌دهیم. مجموعه همه رده‌های هم‌ارزی تحت رابطه $\sim$ را با نماد $S^{-1}R$ نشان داده و عمل جمع و ضرب روی آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{(at+bs)}{st} \quad , \quad (\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}) = \frac{ab}{st} \quad (a, b \in R, s, t \in S).$$

با اعمال فوق $S^{-1}R$ یک حلقه یکدار است.

تعریف **۶.۱.۱** فرض کنیم M یک R–مدول و S زیرمجموعه بسته ضربی باشد. مشابه فرآیند تعریف قبل عمل کرده و $S^{-1}M$ را تعریف می‌کنیم. $S^{-1}M$ با عمل جمع یک گروه آبلی و با عمل ضرب زیر یک $S^{-1}R$–مدول خواهد بود.

$$(\frac{r}{s})(\frac{m}{t}) = \frac{rm}{st} \quad (r \in R, m \in M, s, t \in S)$$

نمادگذاری: فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایدال اول R باشد. در این‌صورت $S = R \setminus \mathfrak{p}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی است. در این حالت $S^{-1}R$، $S^{-1}M$ و $S^{-1}f$ به ترتیب با $R_\mathfrak{p}$، $M_\mathfrak{p}$ و $f_\mathfrak{p}$ نشان داده می‌شوند.

برای هر ایدال اول $\mathfrak{p}$ از R، ایدال‌های اول $R_\mathfrak{p}$ با ایدال‌های اول $\mathfrak{q}$ از R مشمول در $\mathfrak{p}$ در تناظر یک‌به‌یک قرار دارند و با $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ نشان داده می‌شوند. به‌علاوه $R_\mathfrak{p}$ یک حلقه موضعی با تنها ایدال ماکسیمال $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ است. لذا $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ یک میدان است که از این پس آن را با نماد $k(\mathfrak{p})$ نشان خواهیم داد.

قضیه **۲.۱.۱** فرض کنیم S زیرمجموعه بسته ضربی R باشد. در این‌صورت

۱) اگر $f : M \to N$ یک همریختی R–مدولی باشد، آن‌گاه $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ با ضابطه $m/s \mapsto f(m)/s$ یک همریختی $S^{-1}R$–مدولی است.

۲) تابعگون $-S^{-1}$ دقیق است.

خاصیت P حلقه R (یا R–مدول M) خاصیت موضعی نامیده می‌شود اگر عبارت زیر صحیح باشد.

R (یا M) P را دارد $\Leftrightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ (یا $M_{\mathfrak{p}}$) برای هر ایدال اول $\mathfrak{p}$ از R، P را داشته باشد.

۳.۱.۱ نظریه بعد

تعریف **۷.۱.۱** فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر نابدیهی باشد. به ازای هر عدد صحیح $n \in \mathbb{N}_0$، $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ را یک زنجیر از ایدال‌های اول R می‌نامیم و n را طول زنجیر در نظر می‌گیریم. بعد کرول (بعد) R را با $\dim(R)$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$\dim(R) = \sup\{n \mid \exists\ \mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)\ :\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n\}.$$

فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایدال اول R باشد، بلندی $\mathfrak{p}$ را با $ht_R(\mathfrak{p})$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$ht_R(\mathfrak{p}) = \sup\{n \mid \exists\ \mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)\ :\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\ \}.$$

فرض کنیم I یک ایدال حلقه R باشد، بلندی I را با $ht(I)$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$ht(I) = \inf\{ht(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R), I \subseteq \mathfrak{p}\} = \inf\{ht(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\}.$$

برای هر ایدال اول $\mathfrak{p}$ حلقه R، $ht(\mathfrak{p}) \leq \dim(R)$ و $\dim(R) = \sup\{ht(\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\}$ و $ht(\mathfrak{p}) = \dim(R_\mathfrak{p})$.

در یک حلقه موضعی R با ایدال ماکسیمال $\mathfrak{m}$، داریم $ht(\mathfrak{m}) = \dim(R)$. اگر $S \subset R$ یک زیرمجموعه بسته‌ضربی باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ به‌طوری‌که $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$، آن‌گاه $ht_{S^{-1}R}(S^{-1}\mathfrak{p}) = ht_R(\mathfrak{p})$.

تعریف **۸.۱.۱** محمل R−مدول M را با نماد $\operatorname{supp}(M)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{supp}(M) = \{ \ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0 \ \}.$$

بعد R−مدول M را با نماد $\dim_R(M)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim(M) = \sup\{t \in \mathbb{N}_0 \mid \text{زنجیری از ایدال‌های اول } R \text{ به طول } t \text{ در } \operatorname{supp}(M) \text{ موجود است}\}.$$

در صورتی که چنین زنجیری موجود نباشد قرار می‌دهیم $\dim(M) = \infty$.

۴.۱.۱ ایدال‌های اول وابسته در رسته مدول‌ها

در این بخش R نمایش یک حلقه تعویض‌پذیر می‌باشد. جهت اثبات گزاره، لم و قضایای این بخش به منابع [۲]، [۹] و [۲۰] رجوع کنید.

یادآوری می کنیم که اگر N یک زیرمدول R−مدول M باشد، $(N : M)$ نمایش ایدال $\{ \ r \in R \mid rM \subseteq N \ \}$ است.

تعریف **۹.۱.۱** فرض کنیم M یک R−مدول باشد. یک ایدال اول $\mathfrak{p}$ از R، اول وابسته‌ی M نامیده می‌شود، هرگاه $\mathfrak{p}$ برای برخی $x \in M$ با $\operatorname{ann}(x)$ مساوی باشد. مجموعه اول‌های وابسته M را با $\operatorname{Ass}(M)$ یا $\operatorname{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهند.