بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين إياك نعبد وإياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين أنعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه فیزیک

جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک

ایجاد درگاه‌های دو کیوبیتی SWAP و CNOT در یک کاواک با استفاده از روش گذار بی دررو

دانشجو:

محمد عطاطلب

استاد راهنما:

دکتر مهدی امنیت طلب

دکتر رسول خدابخش

استاد مشاور: **دکتر آرش ثباتیان**

شهریور ۱۳۸۹

پایان نامه آقای محمد عطاطلب به تاریخ ۸۹/۷/۱۴ و شماره

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۹ (به حروف نوزده تمام)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر مهدی اهمیت طلب و دکتر رسول خدابخش

۲- استاد مشاور: دکتر آرش ثباتیان

۳- داور خارجی: دکتر اکبر جعفری

۴- داور داخلی: دکتر محمد طالبیان

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

شکل (۴-۳): شکل عملگرهای مبادله و عملگر کپی. در این شکل بیت‌های ورودی وبیت‌های خروجی و نحوه‌ی تغیرات آنها نشان داده شده است.

شکل (۴-۴): مدار درگاه HA و جدول تغییرات بیت‌های ورودی نشان داده شده است.

شکل(۴-۵): شکل مداری درگاه FA وجدول متناظر با بیت‌های ورودی و خروجی رسم شده است.

شکل (۴-۶): در این شکل درگاه‌های NOT، AND، OR و XOR که با استفاده از درگاه NAND ساخته شده رسم شده است.

شکل (۴-۷): شکل ماتریسی درگاه‌های واحد I، هادامارد H، پائولی X,Y,Z و فاز S نشان داده شده است.

شکل(۴-۸): شکل مداری و ماتریسی درگاه‌های دو کیوبیتی CNOT، SWAP، CZ و در حالت کلی CU در این شکل نشان داده شده است.

شکل(۴-۹): در این شکل، مداری که از ترکیب درگاه تک کیوبیتی هادامارد و درگاه دو کیوبیتی CNOT ساخته شده است نشان داده شده است. بیت‌های ورودی، a,b که $a,b=\{0,1\}$ است. بیت‌های خروجی حالت‌های بل هستند که در جدول نشان داده شده‌اند.

شکل(۵-۱): طرح یک اتم چهار ترازی که با پالس‌های لیزری و میدان کوانتومی مد کاواک که به ترتیب با خطوط خط چین و تو پر نشان داده‌ایم، به هم جفت شده‌اند.

شکل(۵-۲): الگوی جفت شدگی سیستم اتم- اتم- کاواک در زیر فضای S_7 از فضای هیلبرت کل سیستم.

شکل(۵-۳): الگوی جفت شدگی سیستم مورد نظر در زیر فضای S_{16} از فضای هیلبرت کل سیستم.

شکل(۵-۴): انتقال جمعیت در مرحله اول برای ایجاد درگاه SWAP را نشان می‌دهد .که جمعیت از حالت اولیه $|10\rangle|0\rangle$ به حالت $|a0\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود. این شکل بر اساس شکل (۵-۲) (زیر فضای S_7) رسم شده است [illegible] جمعیت از کجا به کجا و بر اساس چه پالس‌هایی منتقل می‌شود.

شکل(۵-۵): انتقال جمعیت در مرحله دوم برای ایجاد درگاه SWAP. جمعیت از حالت اولیه $|01\rangle|0\rangle$ به طور کامل و بی‌دررو تحت تاثیر پالس‌های غیر شهودی Ω_0^2 و Ω_0^1 به حالت $|10\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود.

شکل(۵-۶): انتقال جمعیت در مرحله سوم برای ایجاد درگاه SWAP. جمعیت از حالت اولیه $|a1\rangle|0\rangle$ به طور کامل و بی‌دررو به حالت $|1a\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود.

شکل(۵-۷): انتقال جمعیت در مرحله چهارم برای ایجاد درگاه SWAP را نشان می‌دهد .که جمعیت از حالت اولیه $|1a\rangle|0\rangle$ به حالت $|01\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود.

شکل(۵-۸): (۱) نمودار تحول زمانی پالس‌ها. (۲) نمودار تحول زمانی جمعیت حالت $|00\rangle|0\rangle$ که در زیرفضای S_{16}اتفاق می‌افتد. (۳) نمودار تحول زمانی جمعیت حالت $|01\rangle|0\rangle$ در زیر فضای S_7اتفاق می‌افتد. (۴) نمودار تحول زمانی جمعیت حالت $|10\rangle|0\rangle$ در زیر فضای S_7اتفاق می‌افتد. پارامترهای به کار رفته در رسم تمامی این نمودارها به صورت $\Omega_0=20T^{-1},\tau=1.2T,g=25T^{-1}$ می‌باشند که شرط گذار بی‌دررو را برآورده می‌کنند.

شکل(۵-۹): طرح یک اتم پنج ترازی که با پالس‌های لیزری و میدان کوانتومی مد کاواک که به ترتیب با خطوط خط چین و تو پر نشان داده‌ایم، به هم جفت شده‌اند. $\Omega_{a(sti)}$ و $\Omega_{1(sti)}$ پالس‌های کمکی بوده که با بکارگیری آنها و حالت برانگیخته کمکی $|u\rangle$ می‌توان جمعیت اتم را بین حالت‌های $|a\rangle$ و $|1\rangle$ جابجا کرد

شکل(۵-۱۰): الگوی جفت شدگی سیستم اتم- اتم- کاواک در زیر فضای S_7 از فضای هیلبرت کل سیستم.

شکل(۵-۱۱): الگوی جفت شدگی سیستم مورد نظر در زیر فضای S_{16} از فضای هیلبرت کل سیستم.

شکل(۵-۱۲): طرحواره‌ی رسم شده، انتقال جمعیت در مرحله اول برای ایجاد درگاه CNOT2 را نشان می‌دهد. دایره تو خالی، جمعیت اولیه و دایره تو پر، جمعیت نهایی اتم اول را نشان می‌دهد. حالت اتم دوم و حالت مد کاواک که صفر فوتون اولیه دارد، هیچ تغییری نمی‌کند و فقط حالت اتم اول را از حالت $|1\rangle$ به $|a\rangle$ تغییر داده‌ایم.

شکل(۵-۱۳): انتقال جمعیت در مرحله دوم برای ایجاد درگاه CNOT2 را نشان می‌دهد .که جمعیت از حالت اولیه $|01\rangle|0\rangle$ به حالت $|1a\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود. این شکل بر اساس شکل (۵-۱۰) (زیر فضای S_7) رسم شده است تا نشان دهد جمعیت از کجا به کجا و بر اساس چه پالس‌هایی منتقل می‌شود.

شکل(۵-۱٤): انتقال جمعیت در مرحله سوم برای ایجاد درگاه CNOT2. این شکل نشان می‌دهد که جمعیت از حالت اولیه $|a1\rangle|0\rangle$ به حالت نهایی $|10\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود. پالس Ω_0^2 باید قبل از پالس Ω_a^1 بیاید

شکل(۵-۱۵): انتقال جمعیت در مرحله چهارم برای ایجاد درگاه CNOT2. جمعیت از حالت اولیه $|1a\rangle|0\rangle$ به طور کامل و بی‌دررو به حالت $|a1\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود.

شکل(۵-۱٦): انتقال جمعیت در مرحله پنجم برای ایجاد درگاه CNOT2. جمعیت از حالت اولیه $|10\rangle|0\rangle$ به طور کامل و بی‌دررو تحت تاثیر پالس‌های غیر شهودی Ω_0^1 و Ω_0^2 به حالت $|01\rangle|0\rangle$ منتقل می‌شود.

شکل(۵-۱۷): انتقال جمعیت در مرحله ششم برای ایجاد درگاه CNOT2. جمعیت اتم اول از حالت اولیه $|a\rangle$ به حالت $|1\rangle$ منتقل می‌شود.

شکل (۵-۱۸): (۱) نمودار ترتیب و تحول زمانی پالس‌ها. (۲) نمودار تحول زمانی جمعیت تراز $|00\rangle|0\rangle$ که در زیر فضای S_{16} اتفاق می‌افتد. (۳) نمودار تحول زمانی جمعیت حالت $|11\rangle|0\rangle$ که توسط پالس‌های لیزری کمکی $\Omega^1_{1(sti)}$ و $\Omega^1_{a(sti)}$ در زیر فضای S_7 اتفاق می‌افتد. (٤) نمودار تحول زمانی جمعیت حالت $|01\rangle|0\rangle$که در زیر فضای S_7 اتفاق می‌افتد. (۵) نمودار تحول زمانی جمعیت حالت $|10\rangle|0\rangle$ که ابتدا توسط پالس‌های کمکی $\Omega^1_{1(sti)}$ و $\Omega^2_{a(sti)}$ اعمال شده بر اتم اول، از زیر فضای S_7 وارد زیر فضای S_{16} شده، و سپس تحول زمانی آن در S_{16} از طریق حالت $|a0\rangle|0\rangle$ ادامه می‌یابد. پارامترهای به کار رفته در رسم تمامی این نمودارها به صورت $\Omega_0 = 20T^{-1}, \tau = 1.2T, g = 25T^{-1}$ می‌باشند که شرط گذار بی‌دررو را برآورده می‌کنند.

چکیده

گذار بی‌دررو تحریکی رامان STIRAP یکی از روش‌های ساده و مؤثر برای انتقال جمعیت در سیستم‌های سه ترازی Λ گونه است. در این روش انتقال جمعیت از حالت اولیه به حالت نهایی بدون جمعیت‌دار شدن حالت تحریکی و با استفاده از ترتیب پالس‌های غیر شهودی رخ می‌دهد.

در این پروژه یک طرحواره‌ی برای ایجاد درگاه کوانتومی SWAP، با استفاده از دو اتم با الگوی جفت شدگی سه پایه در یک کاواک و روش گذار بی‌دررو تحریکی رامان ارائه می‌دهیم. از مزیت‌های این طرحواره این است که اثرات ناهمدوسی ناشی از گسیل خودبخودی اتمی و اتلاف کاواک با استفاده از روش زورمند گذار بی‌دررو رامان تا حد زیادی کاهش می‌یابد.

همچنین در این پروژه، طرحواره‌ای برای ایجاد درگاه CNOT، با استفاده از روش گذار بی‌دررو ارائه می‌دهیم. استفاده از روش گذار بی‌دررو اثرات ناهمدوسی ناشی از گسیل خودبخودی را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. برای ایجاد درگاه CNOT، از دو اتم سه پایه که از سه حالت پایه و یک حالت برانگیخته و یک حالت برانگیخته‌ی کمکی در یک کاواک اپتیکی استفاده می‌کنیم.

مقدمه

مکانیک کوانتومی یکی از شاخه‌های فیزیک نظری استکه در مقیاس اتمی و زیراتمی به جای مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس کلاسیکی به کار می‌رود. مکانیک کوانتومی بنیادی‌تر از مکانیک نیوتونی والکترومغناطیس کلاسیکی می‌باشد. زیرا در مقیاس‌های اتمی و زیراتمی که این نظریه‌ها با شکست مواجه می‌شوند، می‌تواند با دقت زیاد، بسیاری از پدیده‌ها را توصیف کند. بسیاری از شاخه‌های دیگر مثل، فیزیک و شیمی از مکانیک کوانتومی به عنوان چهار چوب مرجع استفاده می‌کنند. مانند ماده چگال، فیزیک حالت جامد، فیزیک اتمی، فیزیک مولکولی، شیمی کوانتوم، فیزیک ذرات بنیادی و...

پایه‌های کوانتوم در نیمه اول قرن بیستم به وسیله ورنر هایزنبرگ، ماکس پلانک، لویی دوبروی، نیلس بور، اروین شرودینگر، ماکس بورن، جان فون نویمان، پاول دیراک، ولفگانگ پائولی و... ساخته شد. برخی از جنبه‌های بنیادی این نظریه هنوز هم در حال پیشرفت می‌باشد. در مکانیک کوانتومی، حالت هر سیستم در هر لحظه به وسیله یک یک تابع موج مختلط توصیف می‌شود. با این ابزار ریاضی می‌توان احتمال نتایج مختلف در آزمایش‌ها را پیش‌بینی کرد. یکی از پدیده‌هایی که منجر به پیدایش مکانیک کوانتومی شد، امواج الکترومغناطیسی مانند نور بود. ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰، هنگام مطالعه روی جسم سیاه، متوجه شد که انرژی این امواج را می‌توان به شکل بسته‌های کوچکی در نظر گرفت. آلبرت انیشتین از این فکر بهره برد و نشان داد که امواجی مثل نور را می‌توان با ذره‌ای به نام فوتون که انرژی آن به بسامدش بستگی دارد توصیف کرد. این نظریه به دیدگاهی به نام دوگانگی موج- ذره بین ذرات زیر اتمی و امواج الکترومغناطیس منجر شد که در آن ذرات نه موج و نه ذره بودند بلکه ویژگی هر دو را از خود بروز می‌دادند. یکی از شاخه‌های فیزیک کوانتومی، کوانتوم اپتیک می‌باشد. کوانتوم اپتیک به طور عمده به بررسی اندرکنش اتم با میدان‌های کلاسیکی و کوانتومی می‌پردازد.در این پایان نامه با در نظر گرفتن حالت‌هی اتمی به عنوان حالت‌های کوانتومی به بررسی اندرکنش اتم با میدان‌های کلاسیکی و کوانتومی خواهیم پرداخت. با معرفی گذار بی‌دررو تحریکی رامان STIRAP، شرط انتقال کامل جمعیت در اتمهای سه ترازی Λ گونه را بررسی خواهیم کرد.

در پایان نامه، در فصل اول با استفاده از معادلات ماکسول به معرفی میدان‌های کلاسیکی و کوانتومی خواهیم پرداخت. در فصل، دوم اندرکنش اتم دو ترازی و همچنین اتم سه ترازی را با میدان‌های کلاسیکی و کوانتومی بررسی می‌نماییم. در فصل سوم با معرفی گذار بی‌دررو تحریکی رامان، شرط انتقال کامل جمعیت در اتم سه ترازی

و اتم چهار ترازی و همچنین برهمکنش اتم سه ترازی با میدان کاواک و لیزر را بری خواهیم کرد. در فصل چهارم به معرفی درگاه‌های کوانتومی و نحوه‌ی عملکرد آنها خواهیم پرداخت. در فصل پنجم نحوه‌ی ایجاد درگاه‌های کوانتومی دو کیوبیتی SWAP و CNOT را با استفاده از روش گذار بی‌دررو رامان بررسی خواهیم کرد.

فصل اول

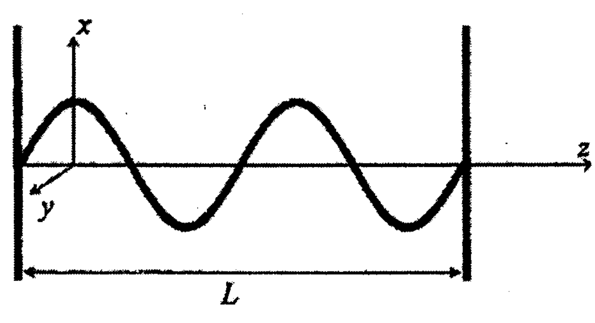
کوانتش میدان الکترومغناطیسی

مقدمه

در این فصل ما درباره‌ی کوانتش میدان الکترومغناطیسی و بعضی از خواص آن بحث می‌نماییم .در بخش ۱-۱، هامیلتونین یک میدان کوانتومی و دربخش ۱-۲، ویژه حالتها و ویژه مقدارهای این میدان کوانتیزه را بررسی خواهیم کرد.

۱-۱ کوانتش یک میدان تک مد

برای شروع بحث از یک میدان تابشی تک مد که در داخل یک کاواک[۱] که درامتداد محور Z قرار دارد شروع می‌کنیم، دیواره‌های کاواک رسانا بوده و در امتداد محور $Z=L$ و $Z=0$ قرار دارند. این کاواک در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.



شکل(۱-۱): یک کاواک با دیواره‌های رسانا که در $Z=L$ و $Z=0$ قرار دارند. میدان الکتریکی درامتداد محور X پلاریزه است

همان طورکه در شکل ۱-۱ می‌بینید، میدان الکتریکی در جهت محور X پلاریزه[۲] می‌باشد، $\vec{E}(r,t)=\hat{e}_x E(z,t)$

که $\hat{e}_x$ بردار یکه پلاریزاسیون می‌باشد. معادلات ماکسول بدون وجود چشمه و در خلا به صورت زیر می‌باشد[۱].

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (۱-۱)$$

۱. Cavity
۲. Polarization

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (۲-۱)$$

$$\nabla . B = 0 \qquad (۳-۱)$$

$$\nabla . E = 0 \qquad (٤-۱)$$

در روابط ماکسول μ_0 و ε_0 به ترتیب نفوذ پذیری مغناطیسی وگذردهی الکتریکی می‌باشند. یک میدان تک مد نوسانی که معادلات ماکسول وشرایط مرزی را ارضاء کند به صورت زیر داده می‌شود.

$$\overline{E}(z,t) = \left[\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right]^{1/2} q(t)\sin(kz) \qquad (۵-۱)$$

در رابطه‌ی (۱-۵)، ω فرکانس مد نوسانی، k عدد موج ، V حجم مؤثر کاواک و $q(t)$ یک مؤلفه وابسته به زمان از دیمانسیون طول می‌باشند، رابطه بین ω و k به صورت $k = \frac{\omega}{c}$ می‌باشد. شرط مرزی باعث می‌شود که $m = 0,1,2...$ $\omega_m = \frac{c(m\pi)}{L}$ باشد. در رابطه (۱-۵)، ما فرض می‌کنیم که ω یکی از فرکانس‌های نوسانی باشد. همانطور که خواهیم دید $q(t)$ همانند یک موقعیت کانونیک برای سیستم می‌باشد. میدان در داخل کاواک با استفاده از رابطه‌ی (۱-۵) ومعادلات ماکسول به صورت $\vec{B}(r,t) = \hat{e}_y B_y(z,t)$ به دست می‌آید که در آن B_y به صورت زیر است:

$$B_y(z,t) = \left[\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\right]\left[\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right]^{\frac{1}{2}} \dot{q}(t)\cos(kz) \qquad (٦-۱)$$

$\dot{q}(t)$ نقش اندازه حرکت کانونیکی را برای یک ذره با جرم واحد ایفا می‌کند، $P(t) = \dot{q}(t)$. انرژی میدان کلاسیکی یا هامیلتونی H برای یک میدان با تک مد نوسانی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$H = \frac{1}{2}\int dV \left[\varepsilon_0 \overline{E}^2(r,t) + \frac{1}{\mu_0}\overline{B}^2(r,t)\right] \qquad (۷-۱)$$

$$= \frac{1}{2}\int dV \left[\varepsilon_0 E_x^{\ 2}(z,t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z,t)\right]$$

با استفاده از روابط (۱-۵) و (۱-٦) به سادگی می‌توان نشان داد که H به صورت زیر است

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 q^2) \qquad (۸-۱)$$

در اینجا به روشنی دیده می‌شود که هامیلتونی یک میدان تک مد نوسانی برابر با هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده به جرم واحد می‌باشد. در مکانیک کوانتومی q,p را به صورت عملگری $\hat{p},\hat{q}$ نشان داده می‌شوند. این عملگرها باید در رابطه جابجایی زیر صدق کنند.

$$[\hat{p},\hat{q}]=i\hbar \tag{۹-۱}$$

بنابراین میدانهای الکتریکی ومغناطیسی تک مد به صورت زیر در می‌آیند.

$$\hat{E}_x(z,t)=\left[\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right]^{\frac{1}{2}}\hat{q}(t)\sin(kz) \tag{۱۰-۱}$$

$$\hat{B}_y(z,t)=\left[\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\right]\left[\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right]^{\frac{1}{2}}\hat{p}(t)\cos(kz) \tag{۱۱-۱}$$

همچنین هامیلتونی به صورت زیر در می‌آید:

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{p}^2+\omega^2q^2) \tag{۱۲-۱}$$

عملگرهای $\hat{p},\hat{q}$ هرمیتی هستند، بنابراین مشاهده پذیر می‌باشند. حال عملگرهای فنا و خلق a و a^+ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{a}=(2\hbar\omega)^{\frac{-1}{2}}(\omega\hat{q}+i\hat{p}) \tag{۱۳-۱}$$

$$a^+=(2\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}}(\omega\hat{q}-i\hat{p}) \tag{۱۴-۱}$$

عملگرهای میدان الکتریکی ومغناطیسی به صورت زیر خواهد بود.

$$\overline{E}_x(z,t)=\zeta(a+a^+)\sin(kz) \tag{۱۵-۱}$$

$$\overline{B}_y(z,t)=\frac{\beta}{i}(a-a^+)\cos(kz) \tag{۱۶-۱}$$

در روابط (۱-۱۵) و (۱-۱۶)، $\zeta=\left[\frac{\hbar\omega}{V\,\varepsilon_0}\right]^{\frac{1}{2}}$ و $\beta=\left[\frac{\mu_0}{k}\right]\left[\frac{\varepsilon_0\hbar\omega}{V}\right]^{\frac{1}{2}}$ می باشد. عملگرهای a و a^+ در رابطه جابجایی زیر صدق می‌کنند.

$$\left[\hat{a},a^{+}\right]=1 \qquad (۱-۱۷)$$

هامیلتونی سیستم به شکل زیر در می‌آید:

$$H=\hbar\omega(\hat{a}a^{+}+\frac{1}{2}) \qquad (۱-۱۸)$$

۱-۲ ویژه مقدار و ویژه حالت عملگر هامیلتونی

عملگر $\hat{a}a^{+}$ در رابطه (۱-۱۸) دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد، آن را عملگر تعداد می‌نامند ویا $\hat{n}$ نمایش می‌دهند. اگر $|n\rangle$ را به عنوان ویژه حالت انرژی میدان با تک مد، با ویژه مقدار انرژی E_n فرض کنیم، در آن صورت معادله ویژه مقداری به صورت زیر در می‌آید:

$$\hat{H}\,|n\rangle=\hbar\omega\left[a^{+}a+\frac{1}{2}\right]|n\rangle \qquad (۱-۱۹)$$

با ضرب a^{+} در رابطه‌ی (۱-۱۹) و همچنین استفاده از رابطه (۱-۱۸)، به سادگی بدست می‌آید:

$$\hbar\omega\left[a^{+}a+\frac{1}{2}\right](a^{+}|n\rangle)=(E_n+\hbar\omega)(a^{+}|n\rangle) \qquad (۱-۲۰)$$

در اینجا مشخص می‌شود که چرا a^{+} را عمگر خلق می‌نامند، زیرا که انرژی به میزان $\hbar\omega$ به وجود می‌آورد. همچنین می‌توان به همین ترتیب ثابت کرد که

$$\hbar\omega\left[a^{+}a+\frac{1}{2}\right](a|n\rangle)=(E_n-\hbar\omega)(a|n\rangle) \qquad (۱-۲۱)$$

و به همین دلیل $\hat{a}$ را عملگر فنا می‌نامند، زیرا که به اندازه‌ی $\hbar\omega$ انرژی از بین می‌رود. می‌دانیم که کمترین مقدار انرژی نوسانگر هماهنگ ساده مثبت می‌باشد، بنابراین برای ویژه حالت صفر داریم:

$$\hat{H}\,(\hat{a}|0\rangle)=(E_0-\hbar\omega)(\hat{a}|0\rangle) \qquad (۱-۲۲)$$

زیرا

$$\hat{a}|0\rangle=0 \qquad (۱-۲۳)$$

با توجه به روابط بالا، مساله ویژه مقدار برای حالت زمینه به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{H}\left|0\right\rangle = \hbar\omega(a^{+}a+\frac{1}{2})\left|0\right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\left|0\right\rangle \qquad (۲٤-۱)$$

با توجه به اینکه مقدار انرژی به صورت کوانتیزه افزایش پیدا می‌کنند از این رو داریم :

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \qquad n = 0,1,2,... \qquad (۲۵-۱)$$

با توجه به رابطه (۱-۲۵)، ویژه مقادیر انرژی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \qquad n = 0,1,2,... \qquad (۲٦-۱)$$

با استفاده از روابط به دست آمده برای عملگر تعداد $\hat{n} = aa^{+}$ خواهیم داشت.

$$\hat{n}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle \qquad (۲۷-۱)$$

همان طوری که در رابطه (۱-۲۷) مشاهده می‌شود، $\left|n\right\rangle$ ویژه حالت عملگر تعداد با ویژه مقدار n می‌باشد به همین دلیل $\left|n\right\rangle$ را حالت تعداد می‌نامند. همچنین اثر عملگرهای خلق و فنا بر روی حالت تعداد، به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \qquad (۲۸-۱)$$

$$\hat{a}^{+}\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \qquad (۲۹-۱)$$

فصل دوم

اندرکنش اتم با میدان کلاسیکی و کوانتومی

مقدمه

در این فصل به بررسی اندرکنش اتم با میدان (کلاسیکی و کوانتومی) خواهیم پرداخت. در بخش (۲-۱) اندرکنش اتم دو ترازی با میدان کلاسیکی را بررسی می‌کنیم و در بخش (۲-۲) به بررسی برهمکنش اتم دوترازی با میدان کوانتومی (مدل جینز کامینگز[۱]) می‌پردازیم. در آخرین بخش اندرکنش یک اتم سه ترازی با میدان کوانتومی را شرح می‌دهیم.

۲-۱ اندرکنش اتم دو ترازی با میدان کلاسیکی

فرض کنید که $|e\rangle,|g\rangle$ حالتهای زمینه و تحریکی یک اتم دو ترازی، که انرژی آنها به ترتیب برابر با $E_g=\hbar\omega_g , E_e=\hbar\omega_e$ که $E_g \langle E_e$ باشند. فرکانس انتقالی برای انتقال جمعیت از حالت $|e\rangle\rightarrow|g\rangle$ برابر $\omega_{eg}=\omega_e-\omega_g$ می‌باشد. شکل یک اتم دو ترازی در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. هامیلتونی اتم دو ترازی، که با میدان خارجی اندرکنش دارد از رابطه زیر بدست می‌آید[۲]

$$H=H^{A}+H^{AF} \qquad (۲-۱)$$

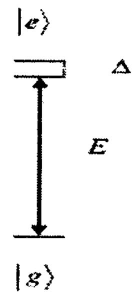
رابطه (۲-۱) شامل دو جمله می‌باشد، جمله اول هامیلتونی اتم و جمله دوم هامیلتونی اندرکش اتم با میدان را نشان می‌دهد. هامیلتونی اتم، همچنین اندرکنش اتم با میدان از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$H^{A}=\hbar\omega_g\,|g\rangle\langle g|+\hbar\omega_e\,|e\rangle\langle e| \qquad (۲-۲)$$

$$H^{AF}=-p.E(t)=-pE(t) \qquad (۲-۳)$$

---

۱. Jaynes Cumminges.



شکل (۲-۱) : اندرکنش اتم دو ترازی با میدان کلاسیکی در این شکل نشان داده شده که Δ نامیزانی تراز است.

در رابطه (۲-۳)، $p = p.\hat{e}$ ، تصویر عملگر ممان الکتریکی در جهت پلاریزاسیون میدان الکتریکی $\hat{e}$ می‌باشد. میدان الکتریکی به صورت زیر خواهد بود.

$$E = \varepsilon e^{-i\omega t} + \varepsilon^{*} e^{i\omega t} = 2|\varepsilon|\cos(\omega t - \varphi) \qquad (۲-٤)$$

در رابطه (۲-٤)، φ و ω به ترتیب فاز و فرکانس می‌باشد. حالت اتم در زمانهای مختلف به صورت زیر باشد:

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t)|g\rangle + c_e(t)|e\rangle \qquad (۲-٥)$$

c_g و c_e به ترتیب دامنه حالت‌های اتمی $|g\rangle$ و $|e\rangle$ که وابسته به زمان هستند. حالت وابسته به زمان $|\psi(t)\rangle$ از معادله شرودینگر تبعیت می‌کند.

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H\,|\psi(t)\rangle \qquad (۲-٦)$$

برای حل معادله بالا، نیاز به شرط اولیه داریم. برای این کار فرض می‌کنیم که سیستم در ابتدا در حالت پایه $|g\rangle$ قرار داشته باشد، بنابراین $c_g(0) = 1$ و $c_e(0) = 0$ است. با قرار دادن معادله‌ی (۲-٥) در رابطه (۲-٦).

معادله شرودینگر به صورت خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial t} c_g = -i\,\omega_g c_g + i c_e \frac{p_{ge}}{\hbar}(\varepsilon e^{-i\omega t} + \varepsilon^{*} e^{i\omega t}) \qquad (۲-۷)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_e = -i\,\omega_e c_e + i c_g \frac{p_{eg}}{\hbar}(\varepsilon e^{-i\omega t} + \varepsilon^{*} e^{i\omega t}) \qquad (۲-۸)$$

در روابط بالا $p_{ij} = \langle i|p|j\rangle$، عناصر ماتریس عملگر دو قطبی می‌باشد. عناصر قطری اصلی صفر هستند یعنی $p_{gg} = p_{ee} = 0$. حال با استفاده از تبدیلات $(\mu = g, e)$ $c_\mu = \tilde{c}_\mu(t) e^{-i\omega_g t}$ که حالتهای سیستم را در تصویر برهمکنش نشان می‌دهد، معادلات (۲-۷) و (۲-۸) به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{c}_g = i\tilde{c}_e \frac{p_{ge}}{\hbar}(\varepsilon e^{-i(\omega+\omega_{eg})t} + \varepsilon^* e^{i(\omega-\omega_{eg})t}) \approx i\tilde{c}_e \frac{p_{ge}}{\hbar}\varepsilon^* e^{i\Delta t} \quad (۹-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{c}_e = i\tilde{c}_g \frac{p_{ge}}{\hbar}(\varepsilon e^{-i(\omega-\omega_{eg})t} + \varepsilon^* e^{i(\omega+\omega_{eg})t}) \approx i\tilde{c}_g \frac{p_{ge}}{\hbar}\varepsilon e^{-i\Delta t} \quad (۱۰-۲)$$

با توجه به تقریب موج چرخان[۱] RWA [۳]، از جملات $e^{\pm i(\omega+\omega_{eg})t}$ صرف نظر شده است. در این رابطه‌ها $\Delta = \omega - \omega_{eg}$، نامیزانی تراز دوم را نشان می‌دهد که ω فرکانس میدان و ω_{eg} فرکانس انتقالی از تراز $|g\rangle$ به $|e\rangle$ است. حال برای حل معادلات بالا از تبدیلات لاپلاس زیر استفاده می‌کنیم.

$$L_j(s) = \int_0^\infty dt e^{-st}\,\tilde{c}_j(t) \quad (۱۱-۲)$$

$L_j(s)$ تبدیل لاپلاس $\tilde{c}_j(t)$ می‌باشد. با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلات (۲-۹) و (۲-۱۰) به صورت

$$sL_e(s) = i\,\frac{p_{eg}\varepsilon^*}{\hbar}L_g(s+i\Delta) \quad (۱۲-۲)$$

$$sL_g(s) - 1 = i\,\frac{p_{eg}\varepsilon^*}{\hbar}L_e(s-i\Delta) \quad (۱۳-۲)$$

می‌شود. از روابط زیر برای ساده سازی استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^\infty dt e^{-st}\dot{c}(t) = sL(s) - c(0) \quad (۱٤-۲)$$

$$\int_0^\infty dt e^{-st}e^{pt}c(t) = L(s-p) \quad (۱۵-۲)$$

برای (۲-۱۲) داریم

$$(s-i\Delta)L_e(s-i\Delta) = i\,\frac{p_{eg}\varepsilon}{\hbar}L_g(s) \quad (۱٦-۲)$$

با جایگزاری (۲-۱۲) در (۲-۱٦)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$L_g(s) = \frac{s-i\Delta}{s^2 - i\Delta s + \Omega^2} \quad (۱۷-۲)$$

---

۱. Rotating Wave approximation.

که $\Omega = p_{ge}\dfrac{|\varepsilon|}{\hbar}$، فرکانس رابی[1] انتقال $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ تحت میدان ε است. ریشه‌های مخرج رابطه (۲-۱۷)، به صورت زیر می‌باشد.

$$s_{\pm} = i\left[\frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\Omega^2 + (\frac{\Delta}{2})^2}\right] \tag{۲-۱۸}$$

با جایگزاری در رابطه (۲-۱۷)، $L_g(s)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$L_g(s) = \frac{s - i\Delta}{(s - s_+)(s - s_-)} \tag{۲-۱۹}$$

رابطه (۲-۱۹) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L_g(s) = \frac{s_+ - i\Delta}{(s_+ - s\ \ )(s - s_+)} - \frac{s_- - i\Delta}{(s_+ - s\ \ )(s - s_-)} \tag{۲-۲۰}$$

با قرار دادن $L_g(s)$ در عکس تبدیل لاپلاس، $\tilde{c}_g$ را بدست می‌آوریم

$$\tilde{c}_g(t) = \frac{s_+ - i\Delta}{s_+ - s_-}e^{s_+t} - \frac{s_- - i\Delta}{s_+ - s_-}e^{s_-t} \tag{۲-۲۱}$$

برای خلاصه کردن رابطه (۲-۱۸)، از تبدیل $\bar{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\frac{\Delta}{2})^2}$، که $\bar{\Omega}$ فرکانس مؤثر به ازای $\Delta \neq 0$ است استفاده می‌کنیم. برای محاسبه $\tilde{c}_e(t)$، از رابطه (۲-۱۲) شروع می‌کنیم.

$$(s + i\Delta)L_g(s + i\Delta) - 1 = i\,\frac{p_{ge}\varepsilon^*}{\hbar}L_e(s) \tag{۲-۲۲}$$

رابطه (۲-۱۳) را در (۲-۲۲) جایگزاری می‌کنیم.

$$(s + i\Delta)\frac{sL_e(s)}{i\,\dfrac{p_{eg}}{\hbar}} - 1 = i\,\frac{p_{ge}\varepsilon^*}{\hbar}L_e(s) \tag{۲-۲۳}$$

$$L_e(s) = \frac{i\Omega e^{i\varphi}}{s^2 + i\Delta s + \Omega^2} \tag{۲-۲۴}$$

اگر $\Delta \neq 0$ باشد، بین دو حالت یک اختلاف فازی به وجود می‌آید، به همین خاطر جمله $e^{i\varphi}$ اضافه می‌شود. ریشه‌های مخرج به صورت زیر است:

---

۱. Rabi frequency

$$s'_{\pm} = i\left[-\frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\Omega^2 + (\frac{\Delta}{2})^2}\right] \qquad (۲-۲۵)$$

با استفاده از رابطه (۲-۲۵) رابطه (۲-۲٤) به صورت زیر بدست می‌آید

$$L_e(s) = \frac{i\,\Omega e^{i\varphi}}{(s - s'_+)(s - s'_-)} \qquad (۲-۲٦)$$

با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس، $\tilde{c}_e(t)$ به صورت

$$\tilde{c}_e(t) = \frac{i\,\Omega e^{i\varphi}}{(s'_+ - s'_-)} e^{s'_+ t} - \frac{i\,\Omega e^{i\varphi}}{(s'_+ - s'_-)} e^{s'_- t} \qquad (۲-۲۷)$$

بدست می‌آید. با تغیر متغیر $\bar{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\frac{\Delta}{2})^2}$، رابطه‌های (۲-۲۱) و (۲-۲۷) به صورت زیر در می‌آیند.

$$\tilde{c}_g(t) = e^{i\frac{\Delta}{2}t}\left[\cos(\bar{\Omega}t) - i\,\frac{\Delta}{2\bar{\Omega}}\sin(\bar{\Omega}t)\right] \qquad (۲-۲۸)$$

$$\tilde{c}_e(t) = i e^{-i\frac{\Delta}{2}t - i\varphi}\,\frac{\Omega}{\bar{\Omega}}\sin(\bar{\Omega}t) \qquad (۲-۲۹)$$

به ازای $\Delta = 0$، روابط (۲-۲۸) و (۲-۲۹) به صورت تبدیل می‌شوند.

$$\tilde{c}_g(t) = \cos(\Omega t) \qquad \tilde{c}_e(t) = e^{-i\varphi}\sin(\Omega t) \qquad (۲-۳۰)$$

جمعیت سیستم برای حالت‌های تشدید ودر زمان‌های مختلف به صورت زیر می‌باشد.

$$|\tilde{c}_g|^2 = \cos^2(\Omega t) \qquad (۲-۳۱)$$

$$|\tilde{c}_e|^2 = \sin^2(\Omega t) \qquad (۲-۳۲)$$

این محاسبات برای حالتی بود که جمعیت ابتدا در حالت $|g\rangle$ باشد. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که جمعیت ابتدا در حالت $|e\rangle$ باشد. از همان روش قبلی برای محاسبه دامنه حالت‌های c_g, c_e استفاده می‌کنیم. با این تفاوت که جمعیت ابتدا در حالت $|e\rangle$ می‌باشد. شرایط اولیه به صورت $c_g(0) = 0$ و $c_e(0) = 1$ می‌باشد. دامنه حالت‌ها به ازای شرط تشدید $\Delta = 0$ به صورت زیر می‌شود:

$$\tilde{c}_g(t) = i e^{i\varphi}\sin(\Omega t) \qquad \tilde{c}_e(t) = \cos(\Omega t) \qquad (۲-۳۳)$$

جمعیت سیستم برای حالت تشدید در زمان‌های مختلف اینگونه به دست می‌آید.