بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم ،تحقیقات وفناوری

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجهء کارشناسی ارشد

عنوان :

یک توصیف فانکتوری از بعدهای همولوژیکی گورنشتین تصویری ، انژکتیو و یکدست

ارائه دهنده :

سید صمد نورآبادی

استاد راهنما :

دکتر رضا سزیده

دانشگاه ارومیه

تابستان ۱۳۸۸

تقدیم به ساحت مقدس امام عصر (عج) وسربازان گمنامش

و تقدیم به خانوادهٔ مهربانم

خدایا به نعمت هایت فکر می کنم واینکه همه چیز نعمت است. به شکر کردن فکر می کنم و اینکه چه کار دشواری است. گاهی فکر می کنم که زندگی با همه چیزش، یک کادوی بزرگ است که تو به ما داده ای. تو دوست داری ما از هدیه هایت استفاده کنیم وخوشحال باشیم که تو از خوشحالی ما لذت می بری ، پس سپاس وستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظهء زندگی ام ساطع وآشکار است. حمد وثنا می گزارم او را که فکرت واندیشه را در بستر راوحم روان ساخت و بهره گیری از خوان گستردهء دانش اساتیدم را نصیب و روزی ام گرداند .

پایان نامه آقای سید محمد نوراباری به تاریخ ۳۰/۶/۸۸ شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/- قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر رضا نریمانی

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر هوشنگ بهروش

۴- داور داخلی: دکتر محمد علی اسدی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر اشرف ربانی

۸۸/۷/۲۱

تشکر و قدردانی

اکنون که این رساله به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.
استاد گرامی آقای دکتر رضا سزیده که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.
و جناب آقای دکتر هوشنگ بهروش و آقای محمد علی اسدی که داوری این پروژه را پذیرفتند. و سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.
در پایان از زحمات پدرمرحومم و مادر گرامیم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگیم بوده‌اند و همسر مهربانم وخواهران وبرادران خوبم ودوست عزیزم محرم بختیاری اصل وسایر دوستان و همکلاسی هایم که مرا یاری نموده‌اند نیز کمال تشکر را می نمایم واز خداوند منّان برای پدرم رحمت ومغفرت وبرای بقیّه این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

سید صمد نورآبادی

چکیده

بعدهای همولو ژیکی گورنشتین تظریف هایی از بعدهای همولوژیکی کلاسیک هستند. و متناهی بودن مدولها با خاصیتهای مورد نظر را به مدولهایی با همان ویژگی در حلقه های گورنشتین منعکس می کند.

بر خلاف بعدهای کلاسیک این بعدها مستقیماً برای متناهی بودن محک قوی و سودمندی حتی روی حلقه های موضعی و نوتری جابجایی ندارند.

در این پایانامه ما با ارائهٔ محک خوب برای متناهی بودن بعدهای گورنشتین ردهٔ حلقه های آشنای خود را گسترش میدهیم . برای مثال حلقه هایی که در هندسهٔ جبری جابجایی با آنها کار می کنیم و همچنین حلقه ها در حوزهٔ جبر ناجابجایی و$K-$ جبرها با یک همبافت دوگان کننده، همه از این محک ها بدست آمده اند.

پیشگفتار

یک انگیزهٔ اصلی برای مطالعهٔ بعدهای همولوژیکی به سال ۱۹۵۶ بر می‌گردد. زمانیکه‌اسلاندر[۱] وبوچسبام[۲] وسر[۳] قضیهٔ زیر را ثابت کردند که: یک حلقهٔ موضعی و نوتری جابجایی R منظم است اگروتنها اگر هر $R-$ مدول بعد پروژکتیو متناهی داشته باشد.
وپس از آن مطالعهٔ این بعدها روی حلقه‌های جابجایی نوتری و حلقه‌های منظم و بیان ویژگیهای مشابه، کارهای دیگری را در این زمینه شکل داد.
این پایان نامه در مورد بعدهای همولوژیکی برای مدولها روی حلقه‌های شرکت پذیر است. یعنی ما دراین پایان نامه محدودیت ها را از حلقه ها برمی‌داریم.
یکی دیگر از مواردی که باعث شد که این بعدها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شوند ایجاد بعد همولوژیکی جدید بر اساس مطالعهٔ مدولها روی حلقه‌های گورنشتین توسط اسلاندر وبرادیجر[۴] بود که به G− بعدها معروفند و شباهت زیادی به بعدهای پروژکتیو دارند. که پس از معرفی این بعدهاحلقه‌های گورنشتین را بصورت زیر تعریف کردند: R گورنشتین است اگروتنهااگر همهٔ $R-$ مدولهای متناهی مولد G− بعد متناهی داشته باشد. و ازاینجا یک $R-$ مدول متناهی مولد M ازG− بعد متناهی در رابطهٔ اسلاندروبوچسبام[۵] زیرصدق می‌کند.

$$\mathrm{G}-\dim_R M = \mathrm{depth} R - \mathrm{depth}_R M$$

امّا از آنجا که $G-$ بعدهافقط برای مدولهای متناهی مولد تعریف می‌شوند جندا[۶] واینوچس[۷] پیشنهاد دادند مطالعهٔ یک بعد همولوژی روی یک ردهٔ بزرگتری ازمدولها صورت گیرد طبق این

[۱] Auslander
[۲] Buchsbaum
[۳] Serr
[۴] Bridger
[۵] Auslander-Buchsbaum
[۶] Jenda
[۷] Enochs

پیشنهاد مدولهایی با تعاریف زیر ساخته شدند :

تعریف ۱.۰.۰ یک R− مدول M راگورنشتین پروژکتیو می‌گوییم هرگاه یک همبافت دقیق ازمدولهای پروژکتیوبصورت زیرموجودباشد

$$P = \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} P_{-1} \longrightarrow \cdots$$

طوریکه $M \cong \mathrm{Coker}\partial_1^P$ و $\mathrm{Hom}_R(P,Q)$ برای هر R− مدول پروژکتیو Q دقیق باشد.
این تعریف برای مدولهای نامتناهی مولد نیز منظور می‌شود و برای همهٔ مدولهای پروژکتیو برقراراست.
آورامو[8] و بوچ ویتز[9] ومارتسینکوسکلی [10] وریتین[11] ثابت کردند که برای مدولهای متناهی مولد بعد گورنشتین پروژکتیو با G− بعد برابرند.
مدولهای گورنشتین یکدست وانژکتیو در[$EJ1$] معرفی شده بودند. فقط G− بعدهاتشابه زیادی بابعد پروژکتیو دارند. هرچند تقسیم بندی این بعدهای جدید مسٔله‌ای است که هم اکنون نیز برای G− بعدهابا آن مواجه هستیم هدف این پایان نامه حل این مسٔله‌است برای اینکار ما بااثبات حدسها مدولهای با بعد گورنشتین متناهی را درجملاتی ازصفر شدن همولوژی و معکوس‌پذیری نگاشتهای متعارف توصیف می‌کنیم. و پایان نامه را با یک ایده از فاکسبی گسترش می‌دهیم که می‌خواهیم محک دیگری برای محاسبهٔ G− بعد از مدولهای متناهی مولد بیابیم .
بعنوان اوّلین مثال از هرچه که مشخصه‌های ما را در زمینهٔمدولها از بعدهای گورنشتین متناهی می‌تواند وسعت دهد مابه قضیه زیراشاره می‌کنیم([قضیه ۱۲.۱.۳]).

قضیه ۲.۰.۰ اگر R یک همبافت دوگان کننده داشته باشد موارد زیر برای یک R− مدول M معادلند :

(i) M بعد گورنشتین پروژکتیو متناهی دارد، $\mathrm{Gpd}_R M < \infty$.

(ii)M بعد گورنشتین یکدست متناهی دارد، $\mathrm{Gfd}_R M < \infty$.

فرض قضیه بالا نشان می‌دهد که داشتن همبافت دوگان کننده برای حلقه‌ها یکی از مشخصه‌های بعدهای گورنشتین متناهی است. نظیر قضیهٔ اسلاندروبوچسبام وسر[12] و فرمول اسلاندر و بوچسبام که

---

[8] Avramov
[9] Buchwitz
[10] martsinkovsky
[11] Reiten
[12] Auslander-Buchsbaum-Serre

ازجمله انگیزه‌های اصلی برای مطالعهٔ G بعدها بودند هم‌ارزی گورنشتین از رده‌های دیگر و فرمول باس ابهام‌های زیادی را ثابت کردند. اولین قضیه ها در این مورد روی حلقه های گورنشتین و بعداً روی حلقه‌های موضعی کوهن—مأکولی با مدول دوگان کننده ثابت شدند. ابزارهای ایجاد شده دراین پایان نامه ما را قادر می سازد که فرض کوهن—مأکولی بودن حلقه‌ها را برداریم. ([قضیه ۱۶.۳.۴].)

قضیه ۳.۰.۰ اگر R یک همبافت دوگان کننده داشته باشد، و N یک $R-$ مدول متناهی مولد ناصفراز بعد گورنشتین انژکتیو متناهی باشد دراین صورت

$$\mathrm{Gid}_R N = \mathrm{depth} R.$$

به عنوان یک کاربرد سوم ما نتیجهٔ زیر را بیان می‌کنیم که ۱۳.۱.۴ و ۲۴.۳.۴ ثابت شده است :

قضیه ۴.۰.۰ اگر R یک همبافت دوگان کننده داشته باشد، پس هر حاصلضرب مستقیم از $R-$ مدول هاگورنشتین یکدست، گورنشتین یکدست است، وهرجمع مستقیم از مدولهای گورنشتین انژکتیو، گورنشتین انژکتیو است.
روی هر حلقه نوتری یک حاصلضرب ازمدولهای یکدست، یکدست است ویک مجموع ازمدولهای انژکتیو، انژکتیو است. این قابل فهم است. ولی درمورد بعدهای گورنشتین وضعیت بسیار پیچیده‌تراست و تا به حال قضیهٔ قبل فقطبرای تعدادی حلقه های خاص می‌دانیم.
اثبات سه قضیه بالا به طور قطعی روی یک توصیف از بعدهای همولوژیکی گورنشتین در جملاتی از دو زیر رسته پر از رستهٔ مشتق شده از $R-$ مدولها متکی است. آنها رسته‌های اسلاندر نامیده می‌شوند وبا $\mathcal{A}(R), \mathcal{B}(R)$ نمایش داده می‌شود که وابسته به همبافت دوگان کننده هستند. واولین بار در $[EJ2]$ مطالعه شده‌اند.
ما ثابت می‌کنیم که مدولها در $\mathcal{A}(R)$ مدولهای با بعد گورنشتین پروژکتیو متناهی هستند([قضیه ۱۱.۱.۳].) و مدولهادر $\mathcal{B}(R)$ مدولهای با بعد گورنشتین انژکتیو متناهی هستند [قضیه ۱۴.۱.۳].
در حالت کلی ما در این پایان نامه بایک حلقهٔ شرکتپذیر و بایکه کار می‌کنیم. برای نتایج اساسی حلقه را بیشتر با یک همبافت دوگان کننده مطرح می‌کنیم.همچنین ماپیوسته باهمبافتهایی از مدولها کار می‌کنیم. بیشتراثباتها و حتی تعاریف از رسته های اسلاندر نیازمند به همبافت ها هستند و تعیین نتایج درحالت کلی طبیعی است.
مشخصه‌ای از بعدهای همولوژیکی گورنشتین متناهی درجملاتی ازرسته های اسلاندر در فصل ۳ ثابت می شود و فصل ۴ به کاربرد ها اختصاص داده شده‌اند. قضایای اساسی اثبات شده از طریق نتایج فنی جدید روی حافظ شبه ریختی‌ها در فصل ۲ بحث شده‌اند. دراولین فصل مفاهیم و

یاداشت ها را قرار دادیم و در چهارمین بخش از فصل ۲ ما ویژگی‌های اساسی بعدهای گورنشتین مورد نیاز دراین پایان نامه را در حالت کلی ثابت کرده‌ایم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به ذکر تعاریف و قضایای مورد نیاز در بقیهٔ فصول می‌پردازیم .

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ همبافت

یک R– همبافت مثل G عبارت است از یک دنباله از R– مدولها و R– همریختی‌های خطی مانند $\{\partial_n : G_n \longrightarrow G_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ است بطوریکه ترکیب $\partial_n\partial_{n+1}$ برای همه n ها برابر صفر شود و با یک دنباله به صورت زیر نشان می‌دهیم :

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} G_n \xrightarrow{\partial_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

که به ∂_n ها دیفرانسیل گوییم .

همبافت G را متمرکز شده در درجات $u, \dots, v$ گوییم اگر برای $l > u$ و $l < v$ ، G_l ها صفر شوند.

تذکر ۲.۱.۱ فرض کنیم N یک R– مدول باشد آنگاه می توان N را بعنوان یک R– همبافت متمرکز شده در درجه صفر در نظر گرفت. یعنی برای n های مخالف صفر، N_n مساوی صفر شود و هرگاه n مساوی صفرباشد، $N_0 = N$

از طرف دیگر هر R– همبافت متمرکز شده در درجه صفر مثل M را می توان یک R– مدول در نظر گرفت.

تعریف ۳.۱.۱ R– همبافت X از چپ کراندار(یا از بالا کراندار) گفته می‌شود اگر عدد صحیح n موجود باشد بطوریکه برای $l > n$ ، X_l ها، صفر شوند. پس همبافتی به این صورت داریم :

$$\circ \longrightarrow X_l \xrightarrow{\partial_l} X_{l-\text{۱}} \xrightarrow{\partial_{l-\text{۱}}} \dots \qquad l \in \mathbb{Z}$$

تعریف ۴.۱.۱ R– همبافت X از راست کراندار(یا از پایین کراندار) گفته می شود اگر عدد صحیح m موجود باشد بطوریکه برای $l < m$ ، X_l ها صفر شوند. پس همبافتی به این صورت داریم:

$$\dots \longrightarrow X_{l+\text{۱}} \xrightarrow{\partial_{l+\text{۱}}} X_l \xrightarrow{\partial_l} \circ \qquad l \in \mathbb{Z}$$

هرگاه همبافت از چپ و از راست کراندار باشد گوییم همبافت کراندار است .

رسته R– همبافت ها

ما نماد $\mathcal{C}(R)$ را برای نشان دادن رسته‌ای از همهٔ R– همبافت‌ها و همهٔ ریخت‌ها از R– همبافت‌ها بکار می‌بریم و نمادهای زیر را برای زیررسته‌های پر از $\mathcal{C}(R)$ تعریف می‌کنیم:

$\mathcal{C}_{\sqsubset}(R)$: رسته همه همبافت‌های کراندار از چپ .

$\mathcal{C}_{\sqsupset}(R)$: رسته همه همبافت‌های کراندار از راست .

$\mathcal{C}_{\square}(R)$: رسته همه همبافت‌های کراندار.

R– همبافت X همولوژی کراندار (ازچپ وراست) گفته می‌شود اگر همبافت همولوژی $\mathrm{H}(X)$ کراندار(ازچپ یااز راست) باشد لذا زیر رسته‌های پر زیر را تعریف می کنیم :

$\mathcal{C}_{(\sqsubset)}(R)$: رسته همه همولوژی‌های کراندار از چپ (رسته همبافتهایی که همبافت همولوژی آنها کراندار از چپ می‌باشد).

$\mathcal{C}_{(\sqsupset)}(R)$: رسته همه همولوژی‌های کراندار از راست .

$\mathcal{C}_{(\square)}(R)$: رسته همه همولوژی‌های کراندار.

و همچنین نمادهای زیر را داریم :

$\mathcal{C}^f(R)$: رسته همبافت‌هااز R– مدول‌های متناهی مولد .

$\mathcal{C}^{(f)}(R)$: رسته همبافت‌ها با مدول های همولوژی متناهی مولد.

$\mathcal{C}^{(f)}_{(\square)}(R)$: رسته همولوژی کراندار با مدول‌های همولوژی متناهی مولد (یا همبافت‌ها با همولوژی متناهی مولد).

$\mathcal{C}^I(R)$: رسته همبافت‌ها از مدول های انژکتیو .

$\mathcal{C}^F(R)$: رسته همبافت‌ها از مدول های یکدست .

$\mathcal{C}^P(R)$: رسته همبافت‌ها از مدول‌های پروژکتیو .

$\mathcal{C}^f_{\circ}(R)$: رسته مدول‌های متناهی مولد .

تعریف ۵.۱.۱ همبافت همریختی ها

برای R– همبافت های X و Y، l– امین مدول از همبافت همریختی $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\operatorname{Hom}_R(X,Y)_l = \prod_{p\in\mathbb{Z}}(\operatorname{Hom}_R(X_p, Y_{p+l}))$$

که عضو α در $\operatorname{Hom}_R(X,Y)_l$ همریختی در درجه l گفته می‌شود و دیفرانسیل این همبافت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_l^{\operatorname{Hom}_R(X,Y)}(\alpha)_p = \partial_{p+l}^Y(\alpha)_p - (-1)^l \alpha_{p-1}\partial_p^X$$

حال فرض کنیم V و W دو R– همبافت ثابت باشند پس $\operatorname{Hom}_R(V,-)$ و $\operatorname{Hom}_R(-,W)$ فانکتورهای در $\mathcal{C}(R)$ هستند.

تعریف ۶.۱.۱ همبافت حاصلضرب تانسور

برای R– همبافت‌های X و Y ، l– امین مدول از همبافت حاصلضرب تانسور $X\otimes_R Y$ را به صورت

زیر داریم :

$$(X \otimes_R Y)_l = \coprod_{p \in \mathbf{Z}} (X_p \otimes_R Y_{l-p})$$

و $l-$ امین دیفرانسیل آن را برای مولد $x_p \otimes_R y_{l-p}$ در $(X \otimes_R Y)_l$ را به این صورت تعریف می‌کنیم :

$$\partial_l^{X \otimes_R Y}(x_p \otimes_R y_{l-p}) = \partial_p^X(x_p) \otimes_R y_{l-p} + (-۱)^p x_p \otimes_R \partial_{l-p}^Y(y_{l-p})$$

که اگر V یک $R-$ همبافت ثابت باشد پس $V \otimes_R -$ و $V \otimes_R -$ فانکتورهایی در $\mathcal{C}(R)$ می‌باشند.

قضیه ۷.۱.۱ کرانداری : اگر $X, Y \in \mathcal{C}_\sqsupset(R)$ آنگاه $X \otimes_R Y \in \mathcal{C}_\sqsupset(R)$. و اگر به ازای $l < t$ داشته باشیم $X_l = ۰$ و به ازای $l < u$ داشته باشیم $Y_l = ۰$ آنگاه موارد زیر برقرارند:

(i) برای $l < t + u$, $(X \otimes_R Y)_l = ۰$

(ii) $(X \otimes_R Y)_{t+u} = X_t \otimes_R Y_u$

(iii) $\mathrm{H}_{t+u}(X \otimes_R Y) \cong \mathrm{H}_t(X) \otimes_R \mathrm{H}_u(Y)$

برهان : [[HF1]، قضیه ۴.۱۸].

قضیه ۸.۱.۱ کرانداری : اگر $X \in \mathcal{C}_\sqsupset(R)$ و $Y \in \mathcal{C}_\sqsubset(R)$ آنگاه $\mathrm{Hom}_R(X, Y) \in \mathcal{C}_\sqsubset(R)$. و اگر به ازای $l < t$ داشته باشیم $X_l = ۰$ و به ازای $l > s$ داشته باشیم $Y_l = ۰$ آنگاه موارد زیر برقرارند:

(i) برای $l > s - t$, $(\mathrm{Hom}_R(X, Y))_l = ۰$

(ii) $(\mathrm{Hom}_R(X, Y))_{t+u} = \mathrm{Hom}_R(X_t, Y_s)$

(iii) $\mathrm{H}_{s-t}(\mathrm{Hom}_R(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}_t(X), \mathrm{H}_s(Y))$

برهان : [[HF1]، قضیه ۳.۵۰].

فرض کنید S یک $R-$ جبر باشد، پس ریخت های زیر را داریم :

(۱) شرکت پذیری

فرض کنیم $Z \in \mathcal{C}(S^{opp})$ و $Y \in \mathcal{C}(S, R^{opp})$ و $X \in \mathcal{C}(R)$. پس $Z \otimes_S Y$ در $\mathcal{C}(R^{opp})$ و $Y \otimes_R X$ در $\mathcal{C}(S)$ می‌باشند و یکریختی زیر از S– همبافت ها را داریم :

$$\sigma_{ZYX} : (Z \otimes_S Y) \otimes_R X \xrightarrow{\cong} Z \otimes_S (Y \otimes_R X)$$

(۲) یکریختی القایی

فرض کنیم $Z \in \mathcal{C}(S)$ و $Y \in \mathcal{C}(S^{opp}, R)$ و $X \in \mathcal{C}(R)$. پس $Z \otimes_S Y$ در $\mathcal{C}(R)$ و $\mathrm{Hom}_R(Y, X)$ در $\mathcal{C}(S)$ می باشندو یکریختی زیر از S– همبافت‌ها را داریم :

$$\rho_{ZYX} : \mathrm{Hom}_R(Z \otimes_S Y, X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_S(Z, \mathrm{Hom}_R(Y, X))$$

(۳) تبادل

فرض کنیم Z و Y دو همبافت در $\mathcal{C}(S)$ و X یک همبافت در $\mathcal{C}(R)$ باشند. پس $\mathrm{Hom}_S(Z, Y)$ در $\mathcal{C}(R)$ و $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ در $\mathcal{C}(S)$ می‌باشند و یکریختی زیر از S– همبافت ها را داریم :

$$\xi_{ZXY} : \mathrm{Hom}_S(Z, \mathrm{Hom}_R(X, Y)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_S(Z, Y))$$

(۴) ارزیابی تانسور

فرض کنیم $Z \in \mathcal{C}(S)$ و $Y \in \mathcal{C}(S, R^{opp})$ و $X \in \mathcal{C}(R)$. پس $\mathrm{Hom}_S(Z, Y)$ در $\mathcal{C}(R)$ و $Y \otimes_R X$ در $\mathcal{C}(S)$ می‌باشند و همریختی زیر از S– همبافت ها را داریم :

$$\omega_{ZYX} : \mathrm{Hom}_S(Z, Y) \otimes_R X \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Z, Y \otimes_R X)$$

که هرگاه Z یک همبافت در $\mathcal{C}^{fP}_{\sqsupset}(S)$ و Y یک همبافت در $\mathcal{C}_{\sqsupset}(S)$ و X یک همبافت در $\mathcal{C}_{\sqsupset}(R)$ باشند یا اینکه Z یک همبافت در $\mathcal{C}^{fP}_{\sqsupset}(S)$ و Y یک همبافت در $\mathcal{C}_{\sqsubset}(S)$ و X یک همبافت در $\mathcal{C}_{\square}(R)$ باشند، آنگاه یکریختی می‌باشد.

(۵) ارزیابی Hom

فرض کنیم $Z \in \mathcal{C}(S)$ و $Y \in \mathcal{C}(S, R)$ و $X \in \mathcal{C}(R)$، پس $\mathrm{Hom}_S(Z, Y)$ در $\mathcal{C}(R)$ و $\mathrm{Hom}_R(Y, X)$ در $\mathcal{C}(S^{opp})$ می‌باشند و همریختی زیر از S– همبافت هارادا‌ریم:

$$\theta_{ZYX} : Z \otimes_S \mathrm{Hom}_R(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_S(Z, Y), X)$$

که هرگاه Z یک همبافت در $\mathcal{C}^{fP}_{\sqsupset}(S)$ و Y یک همبافت در $\mathcal{C}_{\sqsupset}(S)$ و X یک همبافت در $\mathcal{C}_{\sqsubset}(R)$ باشند یا اینکه Z یک همبافت در $\mathcal{C}^{fP}_{\sqsupset}(S)$ و Y یک همبافت در $\mathcal{C}_{\sqsubset}(S)$ و X یک همبافت در $\mathcal{C}_{\square}(R)$ باشند، آنگاه یکریختی می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۱ همبافت مخروط[1]

فرض کنید $f : K \to L$ یک ریخت از همبافت‌ها (نگاشت زنجیره‌ای) باشد، همبافت مخروط از f به صورت تعریف می‌شود که با $\mathcal{C}(f)$ نشان می‌دهیم.

$$\mathcal{C}(f)_i = K[1]_i \oplus L_i \qquad d^{\mathcal{C}(f)}(k_{i-1}, l_i) = (-d^K k_{i-1}, f(k_{i-1}) + d^L l_i)$$

۲.۱ همبافت دوگان کننده

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم S و R دو حلقه باشند. اگر S نوتری چپ و R نوتری راست باشد، ما زوج مرتب $\langle S, R\rangle$ را به عنوان زوج نوتری از حلقه ها تعریف می کنیم.

یک همبافت دوگان کننده برای زوج نوتری ازحلقه های $\langle S, R\rangle$ یک همبافت $_SD_R$ است از دومدولها است. که در شرایط زیر صدق می کند:

(i) همولوژی D روی حلقهٔ S, R^{opp} کراندار و متناهی مولد است.

(ii) یک شبه یکریختی بین همبافتهای کرانداربصورت $_SP_R \xrightarrow{\simeq} {}_SD_R$ وجود دارد که در آن $_SP_R$ راست کراندار و شامل مدولهای پروژکتیو روی هر دوی S, R^{opp} است.

(iii) یک شبه یکریختی بین همبافتهای کرانداربصورت $_SD_R \xrightarrow{\simeq} {}_SI_R$ وجود دارد که در آن $_SI_R$ کراندار و شامل مدولهای انژکتیو روی هر دوی S, R^{opp} است.

(iv) ریخت های تجانسی

$$\acute{X}_D^{\langle S,R\rangle} : {}_SS_S \to \mathrm{RHom}_{R^{opp}}({}_SD_R, {}_SD_R)$$

[1] Cone

$$\grave{X}_D^{\langle S,R\rangle} : {}_RR_R \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_S({}_SD_R, {}_SD_R)$$

درهمولوژی دوسو هستند. یعنی گوییم که

- $\grave{X}_D^{\langle S,R\rangle}$ در $\mathcal{D}(S)$ وارونپذیراست.(بطورمعادل در $\mathcal{D}(S^{opp})$ وارونپذیراست)؛
- $\acute{X}_D^{\langle S,R\rangle}$ در $\mathcal{D}(R)$ وارونپذیراست.(بطورمعادل در $\mathcal{D}(R^{opp})$ وارونپذیراست).

تذکر ۲.۲.۱ اگر R هم نوتری چپ و هم نوتری راست باشد(یعنی جابجایی ونوتری باشد) دراین صورت منظور از همبافت دوگان کننده برای R همان همبافت دوگان کننده برای جفت $\langle R,R\rangle$ است.

یا بطور معادل تعریف زیر را برای همبافت دوگان کننده برای R داریم

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی ونوتری باشد و فرض کنید $\mathcal{D}(R)$ رستهٔ مشتق شده از $R-$ همبافتهاباشد.همبافت $D \in \mathcal{D}(R)$ را یک همبافت دوگان کننده برای R می گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) D مدولهای همولوژی متناهی دارد.

(ii) بعد انژکتیو متناهی دارد.

(iii) ریخت متغارف $\theta : R \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(D,D)$ یکریختی است.

تعریف ۴.۲.۱ یک همبافت دوگان کنندهٔ D برای حلقهٔ موضعی و نوتری جابجایی R نرمال شده نامیده می شود هرگاه $\mathrm{inf}D = \mathrm{depth}R$ و بطور معادل هرگاه $\mathrm{sup}D = \mathrm{dim}R$.

گزاره ۵.۲.۱ فرض کنید $\langle S,R\rangle$ یک جفت نوتری باشد. یک همبافت ${}_SD_R$ برای $\langle S,R\rangle$ دوگان کننده است اگر و تنها اگر برای جفت $\langle R^{opp}, S^{opp}\rangle$ دوگان کننده باشد.

برهان : کافیست ثابت کنیم که یک همبافت دوگان کنندهٔ D برای جفت نوتری $\langle S,R\rangle$ دوگان کننده برای $\langle R^{opp}, S^{opp}\rangle$ می باشد.

دقیقاً R^{opp} نوتری چپ و S^{opp} نوتری راست است. وبنابرین جفت $\langle R^{opp}, S^{opp}\rangle$ یک جفت نوتری