دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده علوم پایه - گروه فیزیک

**پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در**

**فیزیک - گرایش ذرات بنیادی**

**عنوان**

# ناجابجایی دینامیکی فضا و نظریه ی ریسمان

استاد راهنما

**دکتر سید علی اصغر علوی**

استاد مشاور

**دکتر احمد فرزانه کرد**

پژوهشگر

**سکینه عباس پور**

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پیشگاه پاک و مقدس **حضرت ولی عصر(عج)**

***********

تقدیم به

حامی لحظه لحظه ی زندگی ام **پدر بزرگوارم**

که همیشه وجودش باعث آرامش جسم و روحم است

پدری که ایستادن و حرکت را برای خود ساختن به من آموخت.

**********

تقدیم به

اسوه ی ایثار و فداکاری، **مادر مهربانم**

که موفقیتم را مدیون دعای خیر و صبر بی پایانش میدانم

مادری که زندگی کنونی خویش را مدیون فداکاری ها، زحمات و تلاش های بی وقفه ی وی می دانم.

*********

تقدیم به

تمامی معلمانم از آغاز تا کنون

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

آنان که از پای ننشستند تا پای بگیرم

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

و

تقدیم به

آن هایی که دوستشان دارم

به پاس همه ی محبت هایی که جبرانش برایم ممکن نیست دستانشان را می بوسم.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆

⋆⋆⋆⋆⋆

⋆⋆⋆⋆

⋆⋆⋆

⋆⋆

⋆

# سپاس

**خداوند** منان را شکرگزارم که فرصتی عطا فرمود تا این ناچیز را به پایان برسانم.

* از **پدر و مادر عزیزم** کمال سپاس و قدردانی را دارم. من تمام موفقیت‌های زندگی، به خصوص دوران تحصیلم را مدیون بی‌خوابی‌های شبانه و دل‌نگرانی‌های روزانه‌ی آن‌ها هستم. بر پیشانی مادرم و دستان پرمهر پدرم بوسه می‌زنم.

* از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر سید علی اصغر علوی، که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه به دوش ایشان بود، کمال تشکر را دارم.

* از جناب آقای دکتر احمد فرزانه که زحمت مشاوره‌ی این کار را بر عهده داشتند، بسیار سپاسگزارم.

* همچنین قدردان راهنمایی‌های جناب آقای دکتر بهنام آزادگان، مدیر محترم گروه فیزیک هستم، که در امر برنامه‌نویسی بنده را همراهی فرمودند.

* جادارد از تمامی اساتید گروه فیزیک دانشگاه تربیت معلم سبزوار کمال تشکر را داشته باشم که این اجازه را به بنده دادند تا در طول مدت تحصیلم، به عنوان تدریس‌یار نیز در کنارشان مشغول به کار باشم.

* در پایان، یک‌بار دیگر از **تمامی اعضای خانواده‌ام** که دوری مرا صبر فرمودند و دعای خیرشان را بدرقه‌ی راهم کردند بسیار بسیار سپاسگزارم؛ به خصوص برادر عزیزم **محمدحسین** که در تمامی کارها هم‌راه و هم‌پای من بوده است.

امیدوارم که پذیرا باشند.

سکینه عباس پور

۱۳۹۱/۱/۲۰

# مقدمه

تعمیم و فرمولبندی نظریه‌های مختلف فیزیکی از ماده‌ی چگال گرفته تا فیزیک ذرات بنیادی، اخترفیزیک و کیهان‌شناسی به فضاهای ناجابجایی و جستجو برای نتایج تجربی احتمالی آن از سال ۱۹۹۹ بسیار مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته است. نشان داده می‌شود که فضای ناجابجایی به طور طبیعی از بطن نظریه‌ی ریسمان بیرون می‌آید. از طرفی برخی فیزیکدانان فضای ناجابجایی را چهارچوب مناسبی برای وحدت برهم‌کنش‌ها شامل برهم‌کنش گرانش می‌دانند. معمولاً تابه‌حال رابطه‌ی ناجابجایی که بین عملگرهای هرمیتی مختصات در نظر گرفته شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$[x_0, y_0] = i\theta_{\mu\nu} \qquad (۱)$$

که در آن $\theta_{\mu\nu}$ یک تانسور پادمتقارن ثابت است یعنی به مختصات بستگی ندارد و به اصطلاح می‌توان گفت سراسری[1] است نه موضعی[2]. ناجابجایی توصیف شده توسط معادله‌ی (۱) ساده‌ترین نوع ناجابجایی است؛ زیرا همان‌طور که اشاره شد یک تانسور پادمتقارن ثابت در نظر گرفته می‌شود. اخیراً تعمیم‌هایی از ناجابجایی فوق پیشنهاد گردیده است که در آن‌ها تانسور ناجابجایی دیگر ثابت نبوده و تابعی از مختصات می‌باشد. این بدان معناست که پارامتر ناجابجایی موضعی بوده و در نقاط مختلف فضا مقدار متفاوتی دارد. روابط ناجابجایی به صورت زیر در دو بعد پیشنهاد شده است:

$$[X, Y] = i\theta(1 + \tau Y^2) \quad ; \quad [X, P_x] = i\hbar(1 + \tau Y^2) \quad ; \quad [P_x, P_y] = 0$$
$$[X, P_y] = 2i\tau Y(\theta P_y + \hbar X) \quad ; \quad [Y, P_y] = i\hbar(1 + \tau Y^2) \quad ; \quad [Y, P_x] = 0 \qquad (۲)$$

شایان ذکر است با مساوی قرار دادن $\tau = 0$ روابط فوق به روابط فضای ناجابجایی معمولی( غیردینامیکی) با مقدار $\theta$ مستقل از مختصات تبدیل می‌شوند. نکته‌ی قابل توجه آن است که با محاسبه‌ی

[1] global
[2] local

عدم قطعیت کمینه[۳] به رابطه‌ی زیر برای طول کمینه[۴] برای $X$، در اندازه‌گیری همزمان $X$ و $Y$ می‌رسیم:

$$\Delta X_{min} = \theta\sqrt{\tau}\sqrt{1+\tau\langle Y\rangle_\rho^2} \qquad (3)$$

که در آن ضرب داخلی نسبت به متریک

$$\rho = \eta^2 = (1+\tau Y^2)^{-1} \qquad (4)$$

انجام می‌گیرد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle\Phi|\Psi\rangle_\rho := \langle\Phi|\rho\Psi\rangle \qquad (5)$$

نشان داده می‌شود که هیچ‌گونه طول کمینه‌ای برای مختصه‌ی $Y$ نداریم و می‌توان $\Delta Y = 0$ در نظر گرفت. رابطه‌ی (۳) به معنای آن است که در فضای ناجابجایی دینامیکی توصیف شده توسط $X$ و $Y$ اشیاء به طور طبیعی ریسمان‌گونه هستند که در امتداد $X$ گسترده شده‌اند و تفکیک‌پذیری زیرساختار آن‌ها ورای مقدار طول کمینه‌ی مطلق $\Delta X_{min} = \theta\sqrt{\tau}$ کاملاً غیرممکن است. این بدان معناست که در این‌جا ریسمان‌ها به‌طور طبیعی از بطن ناجابجایی فضا بیرون می‌آیند.

در این نوشته اثر ناجابجایی دینامیکی فضا که توسط رابطه‌ی (۲) معرفی شده‌اند را روی سیستم‌های جالب و پراهمیت مکانیک کوانتومی نظیر نوسانگر هماهنگ، اثر لاندؤ، اتم هیدروژن، اثر اشتارک خطی، اثر بهنجار زیمان، اثر آهارانوف- بوهم و فاز بری مطالعه می‌کنیم. با نوشتن هامیلتونی سیستم‌های فوق در فضای دینامیکی جابجایی و با توجه به کوچک بودن پارامترهای ناجابجایی $\theta$ و $\tau$ اثر ناجابجایی را به صورت اختلال مورد بررسی قرار می‌دهیم. این پایان نامه به ترتیب زیر تدوین یافته است: در فصل اول مقدمه‌ای از ناجابجایی فضا و تاریخچه‌ی آن ذکر شده است. فصل دوم مباحث کلی‌ای از نظریه‌ی ریسمان را دربردارد. در فصل سوم هامیلتونی‌های غیرهرمیتی با طیف انرژی حقیقی به اختصار مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. در فصل چهارم به تشریح فضای ناجابجایی دینامیکی پرداخته‌ایم و در نهایت، در فصل پنجم این نوشتار سیستم‌های مهم کوانتومی‌ای که در این فضا بررسی شده‌اند را به تفصیل بیان کرده‌ایم.

---
[۳] Minimal uncertainty
[۴] Minimal length

# فهرست مطالب

# فهرست تصاویر

# فصل ۱
# فضای ناجابجایی

## ۱.۱ مقدمه

فضاهای ناجابجایی تاریخچه‌ای طولانی دارد. حتی در اوایل پیدایش مکانیک کوانتومی و نظریه‌ی میدان کوانتومی، فضا- زمان پیوسته و تقارن لورنتس برای توصیف ساختارهای کوچک مقیاس جهان بی مورد در نظر گرفته شده بودند [۱]. هم چنین استدلال می‌کردند که باید یک مقیاس طول بنیادی که دقت اندازه گیری مکان را محدود کند وجود داشته باشد. در [۲] و [۳] یک طول بنیادی معرفی شده است که برای بهبود واگرایی‌های فرابنفش تولید شده در نظریه‌ی میدان کوانتومی پیشنهاد شده بود. اشنایدر[۱] اولین کسی بود که این ایده‌ها را به صورت ریاضی فرمول‌بندی کرد [۴]. او مختصات ناجابجایی را معرفی کرد و بنابراین یک عدم قطعیت در مکان به طور طبیعی ظاهر شد. اثبات بهنجارش‌پذیری واگرایی‌ها، باعث شد که فیزیکدانان ایده‌ی اشنایدر در مورد ناجابجایی فضا را برای مدتی به دست فراموشی بسپارند. اما زمانی که کوانتش گرانش مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفت، مشخص شد که مفاهیم معمولی فضا- زمان غیرکافی‌اند و این‌که فضا- زمان یا باید کوانتیزه باشد یا ناجابجاپذیر [۵].

تفاوت عمیقی بین نظریه‌ی میدان کوانتومی و گرانش وجود دارد: در اولی فضا و زمان به عنوان پارامتر در نظر گرفته می‌شوند در حالی‌که در دومی، فضا و زمان به عنوان موجودات دینامیکی هستند. به منظور ترکیب نظریه‌ی کوانتومی و گرانش( علم هندسه) باید هر دو را با یک زبان توصیف کنیم و آن زبان جبری است [۶].

هندسه می‌تواند به طور جبری بر حسب جبر آبلی[۲] $\mathbb{C}^*$ فرمول‌بندی شود و نیز می‌تواند به جبر غیرآبلی[۳] $\mathbb{C}^*$ تعمیم داده شود( هندسه‌ی ناجابجایی). گرانش کوانتیزه شده، حتی می‌تواند به عنوان یک تعدیل کننده‌ی نظریه‌های میدان کوانتومی عمل کند. از آن‌جا که هندسه‌ی ناجابجایی یک حد پایینی برای اندازه گیری مکان معرفی می‌کند، این باعث تقویت این ایده می‌شود. هم چنین استدلال خیلی خوبی وجود دارد که نشان می‌دهد که در حد کلاسیکی، خودانرژی یک ذره‌ی نقطه‌ای به وسیله‌ی حضور گرانش تنظیم می‌شود [۷].

الکترونی در نظر بگیرید که اطراف آن پوسته‌ای با شعاع $\epsilon$ وجود دارد. خودانرژی الکترون، همان

[۱] H. S. Snyder
[۲] abelian $\mathbb{C}^*$ algebras
[۳] non-abelian $\mathbb{C}^*$ algebras

خودانرژی پوسته با جرم $m(\epsilon)$، در حدی که $\epsilon \to 0$ می‌رود، می‌باشد. $m(\epsilon)$ توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$m(\epsilon) = m_0 + \frac{e^2}{\epsilon} \tag{۱.۱}$$

که $m_0$ جرم سکون الکترون و $e$ بار الکترون است. در حد $\epsilon \to 0$، $m(\epsilon)$ واگرا می‌شود. با به حساب آوردن جاذبه‌ی نیوتنی این معادله اصلاح می‌شود:

$$m(\epsilon) = m_0 + \frac{e^2}{\epsilon} - \frac{Gm_0^2}{\epsilon} \tag{۲.۱}$$

$G$ ثابت جاذبه‌ای نیوتن است. $m(\epsilon)$، برای $\epsilon = 0$، هنوز واگرا خواهد شد مگر این که جرم و بار به خوبی تعیین شده باشند. با در نظر گرفتن نسبیت عام، می‌دانیم که انرژی، هم چنین انرژی یک میدان الکتریکی الکترون، منبعی از یک میدان جاذبه‌ای است. دوباره باید معادله‌ی (۲.۱) را اصلاح کنیم:

$$m(\epsilon) = m_0 + \frac{e^2}{\epsilon} - \frac{Gm(\epsilon)^2}{\epsilon} \tag{۳.۱}$$

با حل این معادله بدست می‌آوریم:

$$m(\epsilon) = -\frac{\epsilon}{2G} \pm \frac{\epsilon}{2G}\sqrt{1 + \frac{4G}{\epsilon}(m_0 + \frac{e^2}{\epsilon})} \tag{۴.۱}$$

ما به ریشه‌ی مثبت علاقه‌مندیم. به طور معجزه آسایی، حد $\epsilon \to 0$ محدود است:

$$m(\epsilon \to 0) = \frac{e}{\sqrt{G}} \tag{۵.۱}$$

این یک نتیجه‌ی غیراختلالی است، چرا که $m(\epsilon \to 0)$ نمی‌تواند حول $G = 0$ بسط بیابد. $m(\epsilon \to 0)$ به $m_0$ وابسته نیست، بنابراین هیچ تعدیل و تنظیمی وجود ندارد. جاذبه‌ی کلاسیکی، خودانرژی الکترون در یک سطح کلاسیکی را تعدیل می‌کند. به هر حال، این، کوانتیزه کردن فضا- زمان را غیر ضروری نمی‌سازد؛ چرا که تصحیحات کوانتومی دوباره واگرایی‌ها را مطرح خواهند کرد. اما این یک مثال برای تنظیم و تعدیل کمیت‌های فیزیکی با معرفی جاذبه فراهم می‌کند. بنابراین امید است که معرفی جابجایی فرمولبندی شده بر اساس هندسه‌ی ناجابجایی، کمیت‌های فیزیکی را حتی در سطح کوانتومی تعدیل کند. تلفیق مکانیک کوانتومی با نسبیت عام( گرانش کوانتومی) که یکی از اهداف عمده‌ی فیزیک نظری می‌باشد، مسأله‌ای است که تاکنون حل مناسبی برای آن یافت نشده است. با این وجود، ویژگی‌های

مشترکی وجود دارند که بین تمام کاندیداهای گرانش کوانتومی ظاهر می‌شوند. یکی از این ویژگی‌ها وجود طول کمینه از مرتبه‌ی طول پلانک می‌باشد. اگر شخص یک رویداد را در ناحیه‌ای با طول $l$ مکان‌یابی کند، انرژی‌ای از مرتبه‌ی $\frac{hc}{l}$ منتقل می‌شود. این انرژی، یک میدان جاذبه‌ای قوی تولید می‌کند که از رسیدن سیگنال‌ها به مشاهده کننده جلوگیری می‌کند. با وارد کردن چگالی انرژی به معادلات انیشتین، یک شعاع شوارتز- شیلد[۴] متناظر، $r(l)$ به دست می‌آید. این، حدی روی کمترین مقدار ممکن قابل اندازه‌گیری برای $l$ قرار می‌دهد؛ چرا که غیرممکن است تا یک رویداد را خارج از طول پلانک اندازه‌گیری کرد( حداقل اندازه‌گیری مکان در مکانیک کوانتومی مرسوم، طول پلانک است). اولین بار $Doplicher$ و همکارانش این استدلال را به صورت ریاضی تدوین کردند [۸].

در حال حاضر سه نماینده‌ی عمده برای حل مسأله‌ی کوانتیزه کردن گرانش وجود دارند که عبارتند از:

۱. نظریه‌ی ریسمان[۵]

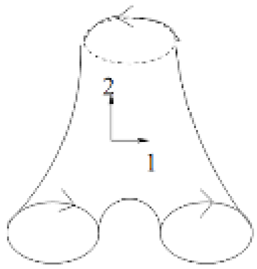
۲. گرانش کوانتومی حلقه[۶]

۳. هندسه‌ی ناجابجایی[۷]

قبل از توضیح درباره‌ی هندسه‌ی ناجابجایی، بعضی از مزیت‌ها و معایب تئوری‌های دیگر را بیان می‌کنیم [۹]. عدم وابستگی پس زمینه مطلب مهمی خواهد بود. نسبیت عام می‌تواند در روشی مستقل از مختصات توصیف شود. در بعضی موارد، نظریه‌های مربوط به گرانش حول متریک مینکوفسکی[۸] بسط می‌یابند. آن‌ها به وضوح به متریک مینکوفسکی پس زمینه وابسته خواهند شد و عدم وابستگی پس زمینه را نقض می‌کنند.

در نظریه‌ی ریسمان، اجزاء( سازنده‌های) اصلی اشیاء یک بعدی، ریسمان‌ها هستند. برهم‌کنش بین ریسمان‌ها را می‌توان به صورت شماتیک توسط چندراهه‌ی ریمانی[۹] مرزدار نمایش داد. مثلا یک گره به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

[۴] Schwarzschild
[۵] String Theory
[۶] Gravity Loop quantum
[۷] Noncommutative Geometry
[۸] Minkowski metric
[۹] Riemann manifold




شکل ۱.۱: نمایشی از یک برهم‌کنش ریسمانی

از این رو ناحیه‌ی برهم‌کنشی دیگر یک نقطه نخواهد بود. بنابراین امید است که دیگر واگرایی‌های موجود در نظریه‌ی میدان کوانتومی وجود نداشته باشد. مزیت‌ها و معایب این نظریه را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

* مزیت‌ها

۱. گراویتون- واحد بنیادی فرضی گرانش- در طیف ذره وجود دارد.

۲. بی نظمی سیاهچاله‌ها را توضیح می‌دهد.

۳. ریاضیات زیبایی دارد.

** عیب‌ها

۱. ابعاد بیش‌تری لازم است. مثلا ابرریسمان‌ها در ۱۰ و ۱۱ بعد بررسی می‌شوند و ریسمان بوزونی در ۲۶ بعد!

۲. پس زمینه به هندسه‌ی فضا- زمان وابسته است.

۳. پارامترهای آزاد بسیاری ظاهر می‌شوند.

۴. اغلب قابل پیش‌گویی نیستند.

نظریه‌ی کوانتومی حلقه، به مطالعه‌ی کوانتیزه کردن کانونی نسبیت عام در ۱ + ۳ بعد می‌پردازد و مزایا و معایب آن به شرح زیرند:

* مزایا

۱. پس زمینه‌ی آن غیروابسته می‌باشد.

۲. عملگر سطح مقطع را کوانتیزه می‌کند.

۳. فضا- زمان ۱ + ۳ بعدی را شامل می‌شود.

** معایب

۱. بسیار کم قابل پیش‌گویی است.

۲. ماده‌ای را در بر ندارد.

۳. از نظر تکنیکی بسیار سخت می‌باشد.

در ادامه به معرفی و مشخصات هندسه‌ی ناجابجایی که اساس کار ما در این پایان‌نامه می‌باشد، می‌پردازیم.

## ۲.۱ هندسه‌ی ناجابجایی

مکانیک کوانتومی ناجابجایی به عنوان تعمیمی از مکانیک کوانتومی استاندارد است. بنابراین باید روابط جابجایی کانونی بین عملگرهای فضای فاز $\hat{x}^i$ و $\hat{p}^j$ را نیز تعمیم دهیم. یادآوری می‌کنیم که در فضای ناجابجایی، فضای فاز کوانتومی با جایگزینی متغیرهای مختصات $x^i$ و اندازه حرکت $p^j$ با عملگرهای $\hat{x}^i$ و $\hat{p}^j$ تعریف می‌شود. در این‌جا مفهوم فضای فاز تغییر کرده و مفهوم نقطه با سلول پلانک جایگزین می‌شود.

در تعریف فضای ناجابجایی، رایج‌ترین انتخاب این است که پارامتر ناجابجایی یا ثابت باشد یا خطی یا از درجه‌ی دوم نسبت به مولدها.

الف). مورد کانونی، موردی است که پارامتر ناجابجایی ثابت می‌باشد:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij} \quad (۶.۱)$$

که در آن، $\theta^{ij} \in \mathbb{C}$، یک ماتریس پادمتقارن است: $\theta^{ij} = -\theta^{ji}$ و $\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$ که $\epsilon^{12} = 1$ یک ماتریس پادمتقارن عام از مرتبه‌ی ۲ می‌باشد [۱۰].

ب). مورد خطی یا مورد جبر لی[۱۰]، به صورت زیر است:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\lambda_k^{ij}\hat{x}^k \qquad (۷.۱)$$

که در آن، $\lambda_k^{ij} \in \mathbb{C}$، ثوابت ساختاری‌ای هستند که در دو روش متفاوت $fuzzy\ spheres$ [۱۱] و $k - deformation$ [۱۲، ۱۳، ۱۴] بحث شده‌اند.

ج). سومین مورد همان طور که بیان شد، روابط جابجایی، درجه‌ی دوم‌اند:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = (\frac{1}{q}\hat{R}_{kl}^{ij} - \delta_l^i\delta_k^j)\hat{x}^k\hat{x}^l \qquad (۸.۱)$$

که در آن، $\hat{R}_{kl}^{ij} \in \mathbb{C}$ و $\hat{R}$-ماتریس نامیده می‌شوند. برای مطالعه‌ی بیشتر به مراجع [۱۵، ۱۶] مراجعه کنید.

روابط بین مختصات مکانی و اندازه حرکت می‌توانند از روابط بالا محاسبه شوند. قابل مشاهده است که با قرار دادن $\theta^{ij} \to 0$، $\lambda^{ij} \to 0$ و $\hat{R}_{kl}^{ij} \to 0$، به مختصات جابجاپذیر معمولی برمی‌گردیم.
در مکانیک کوانتومی معمولی، روابط جابجایی به رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ[۱۱] منجر می‌شوند:

$$\Delta x^i \Delta p_j \gtrsim \delta_j^i \frac{\hbar}{2}$$

به طور مشابه، در فضای ناجابجایی نیز یک رابطه‌ی عدم قطعیت برای مکان بدست می‌آوریم:

$$\Delta x^i \Delta x^j \gtrsim \frac{|\theta^{ij}|}{2} \qquad (۹.۱)$$

از نظریه‌های گوناگون تعمیم داده شده به مختصات ناجابجاپذیر، حد بالایی برای مقیاس انرژی داده شده است. چندین تخمین از مقیاس انرژی وجود دارد. یک حد خیلی ضعیف از این مقیاس، $\Lambda_{nc}$[۱۲] از کاهش یک انرژی اضافی در ستارگان به علت واپاشی نوترینوهای طبیعی به فوتون، $\gamma \to \nu\bar{\nu}$ به دست آمده است [۱۷]:

$$\Lambda_{nc} > 81 GeV \qquad (۱۰.۱)$$

[۱۰] Lie algebra
[۱۱] Heisenberg uncertainty
[۱۲] اندیس $nc$ به عبارت $noncommutative$ اشاره می‌کند.

حد دیگری در [۱۸] از محاسبه‌ی ترازهای انرژی اتم هیدروژن و جابجایی لمب[۱۳] در الکترودینامیک کوانتومی ناجابجاپذیر -$NCQED$- به دست آورده‌اند:

$$\Lambda_{nc} \gtrsim 10^4 GeV \qquad (۱۱.۱)$$

## ۳.۱ ضرب ستاره‌ای

در ابتدای این بخش یادآور شدیم که در فضای ناجابجایی باید کمیت‌ها در مکانیک کوانتومی مرسوم را با معادل‌های عملگریشان( شکل عملگری کمیت‌ها) جایگزین کنیم. ضرب ستاره‌ای[۱۴] روشی است که می‌توانیم از آن برای برگشتن به فضای جابجایی استاندارد، در خلال فضای ناجابجایی استفاده کنیم.

این ضرب جدید برای موردی که ناجابجایی از نوع کانونی باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f * g(x) = exp(\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial y^j})f(x)g(y)\Big|_{y=x} \qquad (۱۲.۱)$$

در این فضا، می‌توانیم به جای استفاده از ضرب ستاره‌ای از روش دیگری برای محاسباتمان استفاده کنیم که همان کار ضرب ستاره‌ای را انجام می‌دهد و ما را از انجام مشتق‌های مختلفی که در این ضرب ظاهر شده است می‌رهاند و آن، استفاده از جابجایی متقارن باپ[۱۵]

$$x_{i_0} = x_{i_s} - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar}p_{j_0} \quad , \quad p_{i_0} = p_{i_s} \quad , \quad i = j = 1, 2 \qquad (۱۳.۱)$$

یا نامتقارن باپ[۱۶]

$$x_0 = x_s - \frac{\theta}{\hbar}p_{y_0} \quad , \quad y_0 = y_s \quad p_{i_0} = p_{i_s} \quad , \quad i = 1, 2 \qquad (۱۴.۱)$$

است. اندیس صفر به کمیت‌ها در فضای ناجابجایی اشاره می‌کند و اندیس $s$ که از اول کلمه‌ی $standard$ گرفته شده است به فضای جابجاپذیر استاندارد- مکانیک کوانتومی مرسوم- برمی‌گردد. ما در محاسباتمان

[۱۳] Lamb-shift
[۱۴] Star product
[۱۵] symmetry Bopp-shift
[۱۶] unsymmetry Bopp-shift

جابجایی متقارن باپ را در نظر گرفته‌ایم هرچند که تمام محاسبات برای جابجایی نامتقارن باپ نیز تکرار شده و جواب‌های یکسانی به دست آمده است.