دانشگاه سیستان و بلوچستان

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض(جبر)

عنوان:

به طور قوی هموار و شرط (P) سیستم‌های مرتب جزئی و پوشش‌های آن‌ها

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

طیبه پس کمری

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه به طبقه‌بندی تکواره‌های مرتب جزئی بر اساس خواص به طور قوی همواری و شرط (P) سیستم‌های آن‌ها می‌پردازیم. برخلاف سیستم‌ها، خواص به طور قوی همواری و شرط (P) سیستم‌های مرتب جزئی دوری منطبق هستند اگرو تنها اگر همه زیرتکواره‌های مرتب جزئی محدب به طور ضعیف برگشت پذیر راست یک تکواره مرتب جزئی، تاشونده چپ باشند. در نتیجه تکواره‌های مرتب جزئی را بررسی می‌کنیم که روی آن‌ها خاصیت به طور قوی همواری و شرط (P) خواص آزادی، تصویری و ... را نتیجه می‌دهد. در پایان به بررسی پوشش‌های به طور قوی هموار و صادق در شرط (P) سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره‌های مرتب جزئی می‌پردازیم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

خواص سیستم‌ها روی تکواره‌ها حدوداً از سال ۱۹۷۰ مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته‌اند. همواری قوی و شرط (P) سیستم‌ها برای اولین بار توسط استنستروم [۱] و کیلپ [۲] مورد توجه قرار گرفت. سپس توسط دانشمندانی چون: بولمن فلمینگ [۳]، لان [۴] و ... ادامه یافت. مطالعه خاصیت به طور قوی همواری سیستم‌های مرتب جزئی دوری توسط شی [۵] مورد بررسی قرار گرفت. پوشش‌های به طور قوی هموار و صادق در شرط (P) در [۳] بررسی شد. در این پایان‌نامه به دسته‌بندی تکواره‌های مرتب جزئی بر اساس خواص به طور قوی همواری و شرط (P) سیستم‌های آنها و همچنین بررسی پوشش‌های به طور قوی هموار و صادق در شرط (P) سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره‌های مرتب جزئی می‌پردازیم.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده‌ایم. فصل دوم شامل دو بخش است. در بخش اول قضایایی را می‌آوریم که در فصل سوم مورد استفاده قرار می‌گیرند و در بخش دوم به بررسی خواص به طور قوی همواری و شرط (P) سیستم‌های مرتب جزئی دوری می‌پردازیم. در بخش اول فصل سوم به دسته‌بندی تکواره‌های مرتب جزئی براساس خواص به طور قوی همواری و شرط (P) می‌پردازیم. در بخش دوم این فصل تکواره‌های مرتب جزئی را مشخص می‌کنیم که در آن‌ها سیستم‌های مرتب جزئی، پوشش‌های به طور قوی هموار یا صادق در شرط (P) دارند.

---

[۱] Stenstrom

[۲] Kilp

[۳] Bulman-Fleming

[۴] Laan

[۵] shi

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱ـ۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱: مجموعه غیرتهی S همراه با یک عمل دوتایی شرکت پذیر را نیم‌گروه و در صورت داشتن عضوهمانی، تکواره گوئیم.

نیم‌گروه S را تعویض پذیر گوئیم، هر گاه به ازای هر $x, y \in S$، $xy = yx$.

درصورتی که نیم‌گروه S با حداقل دو عضو شامل عنصر ۰ باشد، به طوری که به ازای هر $x \in S$، $x0 = 0x = 0$، ۰ را عنصر صفر S و S را نیم‌گروه صفردار گوئیم.

زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را زیرنیم‌گروه S گوئیم، هرگاه $T^2 \subseteq T$، به عبارت دیگر T زیرنیم‌گروه S می‌باشد، هرگاه تحت عمل S بسته باشد، یعنی به ازای هر $x, y \in T$، $xy \in T$.

اگر S تکواره‌ای باعنصر همانی ۱ باشد، آنگاه زیرنیم‌گروه T را زیرتکواره S گوئیم، اگر $1 \in T$.

تعریف ۲.۱.۱: برای هر زیرمجموعه غیرتهی A از نیم‌گروه S، کوچکترین زیر نیم‌گروه S شامل A عبارتست از $\langle A \rangle = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$. اگر $S = \langle A \rangle$، آنگاه A مجموعه عناصر مولد S نامیده می‌شود. اگر $A = \{a\}$ و $S =< a >=< A >$، آنگاه S نیم‌گروه تک مولدی یا دوری نامیده می‌شود، که a عنصر مولد S است.

تعریف ۳.۱.۱: زیرمجموعه ناتهی I از نیم‌گروه S را ایدآل راست(چپ) گوئیم، درصورتی که $IS \subseteq I$ $(SI \subseteq I)$. هر ایدآل راست و چپ S را ایدآل S گوئیم. بوضوح هر ایدآل S یک زیرنیم‌گروه S است.

تعریف ۴.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه و a عضوی از آن باشد. در این صورت $aS^1 = aS \cup \{a\}$ کوچکترین ایدآل راست S شامل a است که آن را ایدآل راست اصلی تولیدشده توسط a گوئیم. به طور مشابه $S^1a = Sa \cup \{a\}$ ایدآل چپ اصلی تولیدشده توسط a می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. برای هر $s,t \in S$ رابطه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

sLt اگر $S^{1}s = S^{1}t$.

$s\ R\ t$ اگر $sS^{1} = tS^{1}$.

$s\ J\ t$ اگر $S^{1}sS^{1} = S^{1}tS^{1}$.

$s\ H\ t$ اگر $S^{1}s = S^{1}t$ و $sS^{1} = tS^{1}$.

$s\ D\ t$ اگر وجود داشته باشد $u \in S$ بقسمی که $sS^{1} = uS^{1}$ و $S^{1}u = S^{1}t$.

D, H, J, R, L رابطه‌های گرین [1] در S نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱: فرض کنید X یک مجموعه و ρ یک رابطه روی X باشد. در این صورت ρ را یک رابطه هم‌ارزی روی X گوئیم، هرگاه واجد خواص زیر باشد:

(۱) برای هر $x \in X$، $x\rho x$.

(۲) برای هر $x, y \in X$، $x\rho y$ نتیجه دهد که $y\rho x$.

(۳) برای هر $x, y, z \in X$، $x\rho y$ و $y\rho z$ نتیجه دهد که $x\rho z$.

خواص بالا به ترتیب انعکاسی، تقارنی و تعدی نامیده می‌شوند.

تعریف ۷.۱.۱: فرض کنید $(S, .)$ و $(T, .)$ دو نیم‌گروه باشند. در این صورت نگاشت $\phi : S \to T$ همریختی نیم‌گروه‌ها است، هرگاه

$$\forall x, y \in S: \ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر S و T تکواره باشند به طوری که 1_S و 1_T به ترتیب عناصر همانی S و T باشند، در این صورت $\phi : S \to T$ را همریختی تکواره‌ها گوئیم، هرگاه

$$\forall x, y \in S: \ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \phi(1_S) = 1_T.$$

اگر ϕ یک به یک باشد آن را تکریختی و اگر پوشا باشد آن را بروریختی می‌نامیم. اگر ϕ یک به یک و پوشا

[1] Green

باشد آن را یکریختی می‌نامیم و در این صورت S و T را یکریخت گوئیم و می‌نویسیم $S \cong T$.

تعریف ۸.۱.۱: عنصر a از نیم‌گروه S را خودتوان گوئیم، اگر $a = a^{۲}$. مجموعه تمام خودتوان‌های S را با $E(S)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱: عنصر $z \in S$ را یک صفر راست(چپ) نیم‌گروه S گوئیم، اگربه ازای هر $s \in S$، $sz = z$ ($zs = z$). همچنین $z \in S$ را صفر گوئیم، در صورتی که $zs = sz = z$.

نیم‌گروه S را صفر راست(چپ) گوئیم، در صورتی که هر عنصر آن صفر راست(چپ) باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱: عنصر s از تکواره S معکوس‌پذیر راست(چپ) نامیده می‌شود، اگر $t \in S$ وجود داشته باشد، به طوری که $st = ۱$($ts = ۱$). در این حالت t معکوس راست(چپ) s نامیده می‌شود. اگر $t \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $st = ts = ۱$، آنگاه s را معکوس‌پذیر گوئیم و در صورتی که t منحصربفرد باشد آن را با $s^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱: تکواره S که درآن به ازای هر $s \in S$، عنصر معکوس یکتای $s^{-۱} \in S$ موجود باشد، به طوری که $ss^{-۱} = s^{-۱}s = ۱$، یک گروه نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱: تکواره S نامتناوب نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in S$، عددی چون $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $x^{n+۱} = x^n$.

تعریف ۱۳.۱.۱: تکواره S را تاشونده راست(چپ) گوئیم، اگر به ازای هر $s, s' \in S$ عنصر $z \in S$ موجود باشد، به طوری که $sz = s'z$($zs = zs'$).

تعریف ۱۴.۱.۱: تکواره S را برگشت پذیر راست(چپ) گوئیم، در صورتی که هر دو ایدآل

چپ(راست) اصلی آن اشتراک ناتهی داشته باشند، به عبارت دیگر S برگشت پذیر راست(چپ) است، اگر به ازای هر $s, s' \in S$ عناصر $u, v \in S$ چنان موجود باشند که $us = vs'$ $(su = s'v)$.

قضیه ۱.۱.۱۵([۴]): تکواره S نامتناوب است اگر و تنها اگر هر زیرتکواره برگشت پذیر راست S، تاشونده چپ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶: زیرتکواره T از تکواره S را یکدار چپ گوئیم، هرگاه

$$t, ts \in T, \quad s \in S \Rightarrow s \in T.$$

تعریف ۱.۱.۱۷: رابطه انعکاسی، پادتقارن و متعدی روی مجموعه X را یک رابطه ترتیب جزئی روی X می‌نامیم و معمولاً با $\leq$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۸: فرض کنید X یک مجموعه مرتب جزئی باشد. عنصر $w \in X$، یک عنصر ماکسیمال(مینیمال) از $(X, \leq)$ نامیده می‌شود، اگر برای $x \in X$، $w \leq x$ $(x \leq w)$ نتیجه دهد $x = w$.

تعریف ۱.۱.۱۹: مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ در شرط مینیمال صدق می‌کند، اگر هر زیرمجموعه ناتهی از X، عنصر مینیمال داشته باشد. در این صورت $(X, \leq)$ را خوش ترتیب گوئیم.

تعریف ۱.۱.۲۰: فرض کنید Y یک زیرمجموعه ناتهی از مجموعه مرتب جزئی X باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران پایین برای Y گوئیم، هرگاه برای هر $y \in Y$، $c \leq y$.

اگر مجموعه کران‌های پایین Y ناتهی و دارای عضو ماکسیمم d باشد، آنگاه d را بزرگترین کران پایین یا اینفیمم برای Y می‌نامند که در صورت وجود منحصربفرد است و به صورت $d = \wedge\{y \mid y \in Y\}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه کران بالا و کوچکترین کران بالا یا سوپریمم برای یک زیرمجموعه ناتهی Y از یک مجموعه مرتب جزئی X تعریف می‌شود. کوچکترین کران بالا برای مجموعه Y به صورت $\vee\{y \ : \ y \in Y\}$ نمایش داده می‌شود.

لم ۲۱.۱.۱(لم زُرن [۲])([۴]): اگر $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی ناتهی باشد به‌طوری که هر زنجیر از عناصر X یک کران بالا در X داشته باشد، آنگاه X حداقل یک عنصر ماکسیمال دارد.

همنهشتی و نیم‌گروه‌های خارج‌قسمتی

تعریف ۲۲.۱.۱: فرض کنید S یک مجموعه، ρ یک رابطه هم ارزی روی S و s عنصر دلخواهی از S باشد. رده هم ارزی s را با نماد $[s]_\rho$ نشان می‌دهیم و به صورت $[s]_\rho = \{t \in S \mid \ t\rho s\}$ تعریف می‌کنیم.

مجموعه تمام رده‌های هم ارزی، که عناصر آن به صورت $[s]_\rho$ است، را مجموعه خارج قسمتی S توسط ρ نامیده و با نماد S/ρ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. رابطه ρ روی S سازگار راست(چپ) نامیده می‌شود، اگر

$$\forall s, t, u \in S, \ \ s\rho t \Rightarrow (su)\rho(tu) \ \ ((us)\rho(ut)).$$

همچنین ρ را سازگارمی‌نامیم، اگر سازگار چپ و راست باشد. یک رابطه هم‌ارزی سازگار را همنهشتی می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱: فرض کنید ρ یک همنهشتی روی S باشد. مجموعه خارج‌قسمتی $S/\rho = \{[a]_\rho \mid a \in S\}$ تحت عمل $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$ نیم‌گروه است، که آن را نیم‌گروه خارج‌قسمتی گوئیم.

[۲] Zorn's Lemma

اگر S یک تکواره باشد، آنگاه S/ρ نیز یک تکواره با عنصر همانی $[۱]_\rho$ می‌باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱: فرض کنید ρ یک همنهشتی روی نیم‌گروه S باشد. نگاشت کانونی

$$\pi : S \to S/\rho$$
$$x \mapsto [x]_\rho$$

را پوشای کانونی گوئیم.

۱—۲ رسته و تابعگون

تعریف ۱.۲.۱: رسته $\mathbf{C}$، گردایه‌ای است از اشیاء (که با A، B و $\cdots$ نشان داده می‌شوند) به همراه

(۱) گردایه‌ای از مجموعه‌ها به شکل $Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ که به ازای هر جفت از اشیاء در $\mathbf{C}$ این مجموعه‌ها مجزا هستند($f \in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$ را یک ریخت از C به D گویند و با $f : C \to D$ نشان داده می‌شود).

(۲) برای هر سه تایی (A,B,C) از اشیاء $\mathbf{C}$ نگاشت

$$Mor_C(B,C) \times Mor_C(A,B) \to Mor_C(A,C)$$

$$(g,f) \mapsto g \circ f$$

در دو اصل زیر صدق کند:

(الف) شرکت‌پذیری: یعنی برای اشیاء A,B,C,D در رسته $\mathbf{C}$ و ریخت‌های $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$، $g \in Mor_{\mathbf{C}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathbf{C}}(C,D)$ داشته باشیم:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ب) ریخت همانی: برای هر شیء A در رسته $\mathbf{C}$ ریخت همانی $id_A : A \to A$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ و $B \in \mathbf{C}$، داریم

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f.$$

تعریف ۲.۲.۱: در رسته مجموعه‌ها که با Set نمایش داده می‌شود، اشیاء مجموعه‌ها، ریخت‌ها توابع بین مجموعه‌ها و ترکیب، ترکیب معمولی توابع و ریخت همانی برای هر مجموعه X، همان تابع همانی روی X است.

تعریف ۳.۲.۱: شیء U در رسته $\mathbf{C}$ شیء ابتدایی گفته می‌شود، اگر برای هر شیء X از $\mathbf{C}$ مجموعه $Mor_{\mathbf{C}}(U,X)$ تک عضوی باشد. به طور مشابه U انتهایی نامیده می‌شود، اگر برای هر شیء X از $\mathbf{C}$ مجموعه $Mor_{\mathbf{C}}(X,U)$ تک عضوی باشد.

اشیاء ابتدایی و انتهایی، اشیاء عمومی نامیده می‌شوند.

قضیه ۴.۲.۱([۴]): اشیاء عمومی در حد یکریختی، منحصربفرد هستند.

تعریف ۵.۲.۱: نمودار زیر را جابه‌جایی گوئیم، هر گاه $\beta \circ \alpha = \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] & C \\
B \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۶.۲.۱: ریخت $f : A \to B$ در یک رسته درون‌بر گفته می‌شود، هرگاه ریختی مانند $g : B \to A$ وجود داشته باشد به طوری که $f \circ g = id_B$. اگر چنین درون‌بری وجود داشته باشد، B درون‌بر A نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱: فرض کنید $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ دو رسته باشند. $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ که به هر شیء $A \in \mathbf{C}$، شیء منحصربفرد $F(A)$ در $\mathbf{D}$ و هر ریخت $f : A \longrightarrow A'$ در $\mathbf{C}$، ریخت منحصربفرد $F(f)$ در $\mathbf{D}$ را نسبت می‌دهد را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

(۱) F حافظ همانی است، یعنی برای هر $A \in \mathbf{C}$، $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(۲) F حافظ ترکیب است، یعنی برای هر $A_۱, A_۲, A_۳ \in \mathbf{C}$، $f_۱ \in Mor_{\mathbf{C}}(A_۱, A_۲)$، $f_۲ \in Mor_{\mathbf{C}}(A_۲, A_۳)$،

$$F\left(f_۲ f_۱\right) = F\left(f_۲\right)\, F\left(f_۱\right).$$

(۳) برای هر $A_۱, A_۲, A_۳ \in C$، $f_۱ \in Mor_C(A_۱, A_۲)$، $f_۲ \in Mor_C(A_۲, A_۳)$،

$$F\left(f_۲ f_۱\right) = F\left(f_۱\right)\, F\left(f_۲\right).$$

اگر F شرایط (۱) و (۲) را داشته باشد، F تابعگون همگون نامیده می‌شود و در این مورد

$$F\left(Mor_C\left(A_۱, A_۲\right)\right) \subseteq Mor_D\left(F\left(A_۱\right), F\left(A_۲\right)\right).$$

اگر F شریط (۱) و (۳) را داشته باشد، F تابعگون ناهمگون نامیده می‌شود و در این مورد

$$F\left(Mor_C\left(A_۱, A_۲\right)\right) \subseteq Mor_D\left(F\left(A_۲\right), F\left(A_۱\right)\right).$$

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته، I یک مجموعه اندیس‌گذار و $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء در $\mathbf{C}$ باشد. جفت $(P, (p_i)_{i\in I})$ حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ در $\mathbf{C}$ نامیده می‌شود، اگر

(۱) $P \in \mathbf{C}$ و برای هر $i \in I$، $p_i \in Mor_{\mathbf{C}}(P, X_i)$ و

(۲) $(P, (p_i)_{i\in I})$ در ویژگی جهانی نگاشت‌ها صدق می‌کند، به این معنی که برای هر $Q \in \mathbf{C}$ و برای هر خانواده $(q_i \in Mor_{\mathbf{C}}(Q, X_i))_{i\in I}$، فقط یک $q \in Mor_{\mathbf{C}}(Q, P)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \in I$، $p_i q = q_i$، به عبارت دیگر نمودار زیر تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_i"] & X_i \\
Q \arrow[u, "q"] \arrow[ur, "q_i"'] &
\end{tikzcd}$$

حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ که طبق قضیه ۴.۲.۱ درحد یکریختی یکتاست را با $\prod_{i\in I} X_i$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱: فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته، $(X_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از اشیاء در $\mathbf{C}$ و I یک مجموعه اندیس‌گذار باشد. جفت $((u_i)_{i\in I}, C)$ هم‌حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ در $\mathbf{C}$ نامیده می‌شود، اگر

(۱) $C \in \mathbf{C}$ و برای هر $i \in I$ $u_i \in Mor_{\mathbf{C}}(X_i, C)$ و

(۲) $((u_i)_{i\in I}, C)$ در ویژگی جهانی نگاشت‌ها صدق کند، به این معنی که برای هر $K \in \mathbf{C}$ و برای هر خانواده $(k_i \in Mor_{\mathbf{C}}(X_i, K))_{i\in I}$، یک k منحصربفرد متعلق به $Mor_{\mathbf{C}}(C, K)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \in I$، $ku_i = k_i$، به عبارت دیگر نمودار زیر تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "k_i"] \arrow[d, "u_i"'] & K \\
C \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

هم‌حاصل‌ضرب خانواده $(X_i)_{i\in I}$ را که با توجه به قضیه ۴.۲.۱ در حد یکریختی منحصر بفرد است با $\coprod_{i\in I} X_i$ نشان می‌دهیم.

۱ـ۳ نظریه سیستم‌ها

دراین بخش به معرفی سیستم‌ها پرداخته و بعضی از مفاهیم و قضایای مرتبط با آن‌ها را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱: مجموعه غیرتهی A را یک Sـسیستم راست (یک سیستم راست روی S)

می‌نامیم و با A_S نشان می‌دهیم، درصورتی‌که نگاشت

$$\begin{aligned} \mu : A \times S &\to A \\ (a,s) &\mapsto as := \mu(a,s) \end{aligned}$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و هر $s, t \in S$، شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $a1 = a$.

(۲) $a(st) = (as)t$.

S_سیستم چپ $_SA$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

فرض کنید S و T تکواره، و $_TA$ یک T_سیستم چپ و A_S یک S_سیستم راست باشد. آنگاه A یک $T-S$_دو سیستم است، هرگاه به ازای هر $t \in T$، $s \in S$ و $a \in A$ داشته باشیم:

$$(ta)s = t(as).$$

مثال‌هایی از S_سیستم‌ها

(۱) فرض کنید S یک تکواره و K ایدآل راستی از آن باشد. چون به ازای هر $s \in S$ و $k \in K$، $ks \in K$، بنابراین تحدید عمل ضرب S به K، به K ساختار S_سیستم راست می‌دهد که آن را با K_S نشان می‌دهیم. بخصوص S_S $(_SS)$ خود یک S_سیستم راست(چپ) و $_SS_S$ نیز یک دو سیستم است.

(۲) فرض کنید A_S یک S_سیستم راست باشد. در این صورت مجموعه توانی $P(A) = \{X \subseteq A\}$ با عمل زیر یک S_سیستم راست خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mu : P(A) \times S &\to P(A) \\ (X,s) &\mapsto Xs := \{xs | x \in X\}. \end{aligned}$$

هرگاه S یک تکواره جابجایی باشد، هر S_سیستم راست می تواند به عنوان یک S_سیستم چپ نیز در نظر گرفته شود، اگر عمل ضرب به صورت زیر تعریف شود:

$$(\forall a \in A)(\forall s \in S) : s * a = as.$$

با توجه به جابجایی بودن تکواره S، تحقیق شرایط (۱) و(۲) در تعریف ۱.۳.۱ به آسانی صورت می‌گیرد. توجه شود که عکس مطلب فوق نیز برقرار است، یعنی در تکواره جابجایی S، هرS_سیستم چپ نیز می‌تواند ساختار یک S_سیستم راست را داشته باشد. در صورتی که A_S یک S_سیستم راست باشد، آنگاه اگر نیاز به

تاکید بر S نباشد وحذف S ابهامی را ایجاد نکند، می‌توان بجای A_S از نماد A استفاده نمود.

تعریف ۲.۳.۱: فرض کنید A_S یک S_سیستم راست باشد. عنصر $\theta \in A_S$ را عنصر صفر(عنصر ثابت) از A_S گوئیم، در صورتی که به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $\theta s = \theta$.

اگرz یک عنصر صفر چپ از تکواره S باشد، در این صورت به ازای هر $a \in A_S$، az بوضوح یک عنصر صفر از A_S خواهد بود. هرگاه A_S یک S_سیستم راست تک عضوی باشد، در این صورت A_S را با نماد Θ_S نشان می‌دهیم که درآن $\Theta_S = \{\theta\}$. واضح است که در S_سیستم راست Θ_S، θ عنصر صفر Θ_S است.

تعریف ۳.۳.۱: فرض کنید S یک تکواره و A یک S_سیستم راست(چپ) باشد. آنگاه زیرمجموعه ناتهی A' از A یک زیرسیستم A نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $a' \in A'$ و $s \in S$ داشته باشیم $a's \in A'$ ($sa' \in A'$).

تعریف ۴.۳.۱: فرض کنید A_S و B_S دو S_سیستم راست باشند. نگاشت $f : A_S \to B_S$ را همریختی بین S_سیستم‌های راست و یا فقط S_همریختی گوئیم، در صورتی که حافظ S_عمل باشد، یعنی

$$(\forall a \in A_S)(\forall s \in S) : f(as) = f(a)s.$$

مجموعه همه S_همریختی‌ها از A_S به B_S با نماد $Hom(A_S, B_S)$ و گاهی با نماد $Hom_S(A, B)$ نمایش داده می‌شود.

نگاشت همانی $id_A : A_S \to A_S$، بوضوح یک همریختی از S_سیستم‌ها است.

S_همریختی $f : A_S \to B_S$ را S_تکریختی یا یک نشاننده از A_S بتوی B_S گوئیم، در صورتی که f نگاشتی یک به یک باشد.

S_همریختی $f : A_S \to B_S$ را S_بروریختی گوئیم، در صورتی که f نگاشتی برو باشد.

S_همریختی $f : A_S \to B_S$ را S_یکریختی گوئیم، درصورتی که f نگاشت دوسویی باشد. در این وضعیت گوئیم A_S و B_S یکریخت هستند و می‌نویسیم $A_S \cong B_S$.

تبصره ۵.۳.۱: رسته‌ای متشکل از S_سیستم‌های چپ(راست) به عنوان اشیاء و S_همریختی‌ها به عنوان ریخت‌ها را با $Act - S)S - Act$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۳.۱: فرض کنید A_S یک S_سیستم باشد. رابطه هم‌ارزی ρ روی A_S را یک همنهشتی S_سیستم یا یک همنهشتی راست روی A_S گوئیم، در صورتی که داشته باشیم:

$$(\forall a, a' \in A)(\forall s \in S) : \quad (a\rho a' \Rightarrow (as)\rho(a's)).$$

تعریف ۷.۳.۱: فرض کنید ρ یک همنهشتی روی A_S باشد. مجموعه خارج‌قسمتی $A_S/\rho = \{[a]_\rho \mid \ a \in A_S\}$ همراه با عمل ضرب $[a]_\rho s = [as]_\rho$ برای هر $s \in S$، تبدیل به یک S_سیستم راست می‌شود.(نگاشت $A_S/\rho \times S \to A_S/\rho$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $[as]_\rho \to ([a]_\rho, s))$)، A_S/ρ را S_سیستم خارج‌قسمتی A_S تولیدشده به وسیله ρ می‌نامیم.

تعریف ۸.۳.۱: اگر $X \subseteq A_S \times A_S$، آنگاه اشتراک تمام همنهشتی‌ها شامل X را با $\rho(X)$ نشان داده و آن را کوچکترین همنهشتی روی A_S شامل X گوئیم.

همنهشتی ρ را متناهیاً تولیدشده نامیم، هرگاه زیرمجموعه متناهی $X \subseteq A_S \times A_S$ موجود باشد، به طوری که $\rho = \rho(X)$. همنهشتی ρ را تک دوری گوئیم، در صورتی که ρ توسط یک عنصر $(x, y) \in A_S \times A_S$ تولید شده باشد، در این حالت همنهشتی را با نماد $\rho(x, y)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۳.۱([۴]): فرض کنید S یک تکواره، $w, t \in S$، $\rho = \rho(wt, t)$. آنگاه برای هر $x, y \in S$، $x\rho y$ اگر و تنها اگر $m, n \geq ۰$ موجود باشند به طوری که $w^m x = w^n y$ که $w^i x, w^j y \in tS$ به ازای هر $۰ \leq j < n$ و $۰ \leq i < m$.

تعریف ۱۰.۳.۱: زیرمجموعه غیرتهی U از S_سیستم راست A_S را مولد A_S گوئیم، در صورتی که به ازای هر $a \in A_S$ عناصر $s \in S$ و $u \in U$ موجود باشند، به طوری که $a = us$. به عبارت دیگر

U مجموعه مولد A_S است، اگر $A_S = \bigcup_{u\in U} uS = < U >$، که در آن $uS = \{us | s \in S\}$. S_سیستم راست A_S را متناهیاً تولیدشده گوئیم، در صورتی که زیرمجموعه U از A_S موجود باشد، به طوری که $|U| < \infty$ و $A_S =< U >$.

A_S را یک S_سیستم راست دوری گوئیم، در صورتی که $u \in A_S$ موجود باشد، به طوری که $A_S =< \{u\} >$ و می‌نویسیم $A_S =< u >$. واضح است که در این حالت $A_S = uS$.

تعریف ۱.۳.۱۱: مجموعه U از عناصر مولد برای S_سیستم راست A_S را یک پایه برای A_S گوئیم، در صورتی که هرعضو $a \in A_S$، دارای نمایش یکتایی به صورت $a = us$ به ازای هر $s \in S$ و $u \in U$ باشد. یکتایی به این معنی است که اگر به ازای $s_1, s_2 \in S$ و $u_1, u_2 \in U$ داشته باشیم $a = u_1 s_1 = u_2 s_2$، آنگاه $s_1 = s_2$ و $u_1 = u_2$.

درصورتی که A_S دارای پایه U باشد، آنگاه A_S را سیستم آزاد و یا به طور دقیق‌تر $|U|$_سیستم آزاد گوئیم. به عنوان مثال، S_S یک ۱_سیستم آزاد با پایه $\{1\}$ است.

قضیه ۱.۳.۱۲([۴]): S_سیستم راست A_S یک سیستم آزاد است اگر و تنها اگر A_S یکریخت با اجتماع مجزا از سیستم‌هایی باشد که همگی با S_S یکریخت هستند، یعنی $A_S \cong \bigcup_{i\in I} S_i$ که در اینجا I مجموعه غیرتهی و به ازای هر $i \in I$، $S_i \cong S_S$.

تعریف ۱.۳.۱۳: S_سیستم راست A_S را تصویری گوئیم، اگر برای هر بروریختی $\pi : P_S \to Q_S$ و هر همریختی $f : A_S \to Q_S$، همریختی $g : A_S \to P_S$ وجود داشته باشد، به طوری که $\pi g = f$.

قضیه ۱.۳.۱۴([۴]): S_سیستم راست A_S تصویری است اگر و تنها اگر $A_S \cong \coprod_{i\in I} A_i$، که به ازای هر $i \in I$ خودتوان $e_i \in S$ وجود داشته باشد، به طوری که $A_i \cong (e_i S)_S$.

تعریف ۱۵.۳.۱ (ساخت سیستم آزاد با پایه مشخص): فرض کنید X مجموعه غیرتهی و $F(X)$ مجموعه همه عباراتی به صورت xs باشد که $x \in X$ و $s \in S$ و به ازای هر $x, x' \in X$ و هر $s, s' \in S$ داریم: $xs = x's'$ اگر و تنها اگر $x = x'$ و $s = s'$. حال برای هر $x \in X$ و هر $s, t \in S$ تعریف می‌کنیم $(xs)t = x(st)$. با این تعریف $F(X)$ یک S_سیستم راست خواهد بود. این S_سیستم راست در واقع یک سیستم آزاد با پایه X می‌باشد که برای آن داریم $F(X) \cong X \times S$. در اینجا $X \times S$ یک S_سیستم راست با عمل ضرب زیر است:

$$(\forall (x,s) \in X \times S)(\forall t \in S),\ (x,s)t = (x, st).$$

تعریف ۱۶.۳.۱ (حاصل‌ضرب تانسوری S_سیستم‌ها): فرض کنید $A_S \in Act - S$، ${}_SB \in S - Act$ و $Y \in Set$. نگاشت $\beta : A_S \times {}_SB \to Y$ متعادل نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $a \in A_S$، $b \in {}_SB$ و $s \in S$ داشته باشیم $\beta(as, b) = \beta(a, sb)$.

فرض کنید $A_S \in Act - S$ و ${}_SB \in S - Act$، مجموعه T همراه با نگاشت متعادل $\tau : A_S \times {}_SB \to T$ یک حاصل‌ضرب تانسوری A_S و ${}_SB$ نامیده می‌شود، اگربه ازای هر $Y \in Set$ و هر نگاشت متعادل $\beta : A_S \times {}_SB \to Y$ نگاشت منحصربفردی مانند $\bar{\beta}$ در Set موجود باشد، به طوری که $\bar{\beta}\tau = \beta$، یعنی نمودار زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd}
A_S \times {}_SB \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\beta"'] & T \arrow[dl, "\bar{\beta}"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

ساختار: فرض کنید $A_S \in Act - S$، ${}_SB \in S - Act$ و ν یک رابطه هم‌ارزی روی $A_S \times {}_SB$ تولیدشده توسط رابطه $T = \{((as, b), (a, sb)) \mid (a, b) \in A_S \times {}_SB, s \in S\}$ باشد.

تعریف می‌کنیم $A_S \otimes {}_SB = (A_S \times {}_SB)/\nu$ و $[(a,b)]_\nu \in A_S \otimes {}_SB$ را با نماد $a \otimes b$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نگاشت پوشای کانونی $\tau : A_S \times {}_SB \to A_S \otimes {}_SB$ را به صورت $\tau((a,b)) = a \otimes b$ تعریف می‌کنیم.