



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تربیت مدرس

دانشگاه تربیت مدرس

۱۳۸۲ / ۴ / ۲۰

دانشکده علوم پایه

رساله دوره دکتری ریاضی (نظریه گروههای متناهی)

موضوع:

تشخیص پذیری جدیدی از برخی گروههای ساده متناهی از نوع لی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر علی ایرانمنش

نگارش:

بهر روز خسروی

بهمن ماه ۱۳۸۱

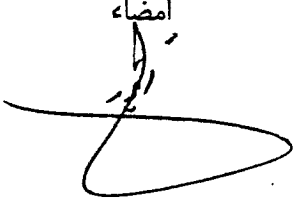
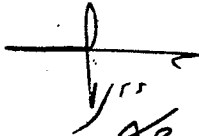
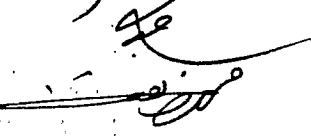
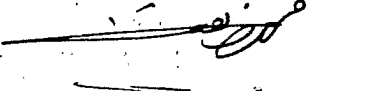

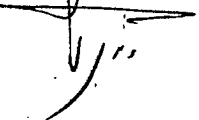

۴۵۷۸۵

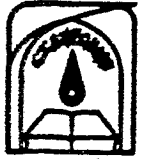
تربیت مدرس
دانشگاه تربیت مدرس
کتابخانه مرکزی

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

اعضای هیئت داوران نسخه نهایی رساله آقای بهروز خسروی تحت عنوان: تشخیص پذیری جدیدی از برخی گروههای ساده متناهی از نوع لی را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه دکتری مورد تایید قرار دادند.

امضاء	رتبه علمی	نام و نام خانوادگی	اعضای هیات داوران
	دانشیار	دکتر علی ایرانمنش	۱- استاد راهنما
	استادیار	دکتر سید احمد موسوی	۲- استاد مشاور
	استاد	دکتر علیرضا جمالی	۳- استادمشاور
	استاد	دکتر محمدرضا درفشه	۴- استاد ناظر
	استادیار	دکتر کامبیز محمودیان	۵- استاد ناظر
	استادیار	دکتر سید احمد موسوی	۶- استاد ناظر
			۷- نماینده تحصیلات تکمیلی



بسمه تعالی

آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

ماده ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

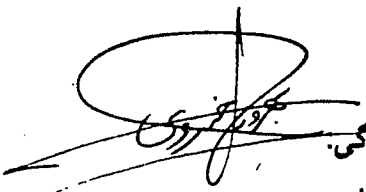
ماده ۲ در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:
«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد / رساله دکتری نگارنده در رشته
که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم / جناب
آقای دکتر، مشاوره سرکار خانم / جناب آقای دکتر، مشاوره سرکار
خانم / جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵ دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶ اینجانب بهر فرزند خردی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: 
تاریخ و امضا: ۸۱، ۱۲، ۳

رئیس هیات مدیره انجمن علمی ایران

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

و

برادران عزیزم

تشکر و قدردانی

بنام خدا

سپاس بی حد و شکر بی عد خدای را که انسان را به زینت علم آراست و بر او خلعت خلافت پوشاند و سرمه دانائی در چشم عقل آدمیان کشید تا گل وجود بشریت در گلخانه گیتی سنگ بنای سیادت و سروری او گردد و ندای جانفزای دانستن را در گوش جان آنان طنین انداز کرد و درود بی کران بر پیغامبر مکرم و نبی معظم که ندای جانبخش اسلام را با نوای « بخوان به نام پروردگار » آغاز کرد و بر آل و اصحاب او باد علی الخصوص سلام بی پایان بر سر سلسله ولایت علوی حیدر کرار که فرمود « من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً ».

در اینجا بر خود لازم می دانم از تمامی کسانی که در مراحل مختلف تحصیل به نوعی مشوق و راهنمایم بوده اند تشکر و قدردانی نمایم. قبل از هر چیز لازم است از زحمات دلسوزانه استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر علی ایرانمنش که با دقت نظر تمام، مرا در تدوین این رساله یاری کرده اند تقدیر و تشکر نمایم و لازم است که از برنامه ریزیهای دقیق و دلسوزانه ایشان در طول مدت تحصیل اینجانب، تلاش ایشان برای فراهم آوردن امکانات لازم و دقت نظر ایشان برای بدون نقص بودن این رساله قدردانی کنم. ایشان نه فقط در زمینه درسی بلکه در سایر جنبه های زندگی همواره مشوق و راهنمایم بوده اند.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر علیرضا جمالی که در طول تحصیل از وجود گرانمایه ایشان بهره مند بوده افتخار حضور در کلاس درس ایشان را داشته ام و همچنین از این که قبول زحمت فرموده و با صبوری و سعه صدر رساله اینجانب را با دقت کم نظیری مطالعه و تصحیح فرموده اند تشکر و قدردانی می نمایم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه که همواره مرا مورد تشویق و عنایات خود قرار داده اند و

بعلاوه از نعمت حضور در کلاس درس ایشان برخوردار بوده‌ام و همچنین از اینکه بنده را مشمول مراسم خویش قرار داده و وقت خود را صرف مطالعه این رساله نموده و راهنمایی‌های لازم را مبذول فرموده‌اند، سپاسگزارم. لازم است از برخوردهای صمیمانه استاد گرانقدر و محترم جناب آقای دکتر سید احمد موسوی قدردانی کرده از اینکه زحمت داوری این رساله را متقبل شدند سپاسگزاری کنم.

از جناب آقای دکتر کامبیز محمودیان نیز که به عنوان داور خارجی با وجود مشغله فراوان بر اینجانب منت گذارده و در جلسه دفاعیه اینجانب حاضر شدند کمال تشکر را دارم.

علاوه بر این افراد دیگری نیز در این کار سهیم هستند که قدردانی از آنها را وظیفه خود می‌دانم. از پدر گرامی‌ام جناب آقای دکتر امیر خسروی که در تمام لحظات زندگی همچون شمع فروزان سر راهم بوده‌اند و در تمام دوران تحصیل الگو و راهنمای من بوده‌اند و در نهایت در مراحل انجام این رساله لحظه به لحظه از راهنمایی‌های سودمند ایشان بهره‌جسته‌ام صمیمانه قدردانی می‌کنم. همچنین از مادر گرانقدرم بخاطر محبتها و زحمتها و دلسوزیهای بی‌کرانشان که همیشه پشتوانه و راهنمای زندگی‌ام بوده تشکر می‌کنم. همچنین به خاطر کار خسته‌کننده مطالعه نمونه‌های تاپی و غلط‌گیری آنها از کمکهای بیدریغ مادر عزیزم سرکار خانم ثریا خسروی بهره‌مند بوده‌ام که از صمیم قلب از ایشان متشکرم. در بخشهایی از این رساله نیاز به تهیه تعدادی الگوریتم و نوشتن برنامه‌هایی کامپیوتری در محیطهای Maple و Mathematica بود که در تهیه این موارد برادران عزیزم آقایان بهمن و بهنام خسروی نقش مهمی به عهده داشته‌اند که از زحمات آنها سپاسگزارم.

در خاتمه مایلم از کلیه استادان دیگری که با آنها واحدهایی را گذرانده‌ام و اعتراف می‌کنم که هر چه را فرا گرفته‌ام خوشه‌ای از خرمن دانش و تجربیات آنان بوده است و همچنین آقای دکتر علی ارومیه‌ای، آقای دکتر سید محمد حسینی و آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی و همچنین کلیه اساتید گروه ریاضی و آقای خادمی و سایر مسئولان و کارمندان دانشگاه که در اینجا نامشان ذکر نشده است خالصانه تشکر کنم.

(والسلام علی من اتبع الهدی)

بهر روز خسروی - بهمن ماه ۱۳۸۱

چکیده فارسی

بحث تشخیص پذیری در مورد گروههای متناهی از حوالی سالهای ۱۹۶۰ مطرح شده است و تاکنون تشخیص پذیریهای مختلفی برای گروههای متناهی مطرح شده‌اند. یکی از این نوع تشخیص پذیریها که اخیراً توسط چن مطرح شده است تشخیص پذیری بوسیله مرتبه مؤلفه‌ها می‌باشد. وی ثابت کرده است گروههای پراکنده، گروههای سوزوکی - ری، گروه $E_8(q)$ ، گروه $PSL(2, q)$ و گروه $G_2(q)$ هرگاه $q \equiv 3 \pmod{4}$ ، توسط مرتبه مؤلفه‌هایشان تشخیص پذیرند. این گروهها همگی دارای حداقل سه مؤلفه همبندی هستند.

ابتدا تشخیص پذیری گروههایی را مورد بررسی قرار دادیم که دارای ۳ مؤلفه همبندی هستند. این گروهها عبارتند از گروه $F_4(q)$ ، برای $q = 2^n$ و گروه ${}^2D_4(3)$ که $p = 2^n + 1$ یک عدد اول است (مابقی گروههایی که حداقل دارای سه مؤلفه همبندی هستند، توسط چن مورد بررسی قرار گرفته بودند).

با توجه به اینکه هیچ کارتحقیقاتی از این دیدگاه روی گروههای ساده غیرآبلی با دو مؤلفه همبندی صورت نگرفته بود، لذا کار اصلی این رساله در راستای تشخیص پذیری این گروهها بوده است. گروههای مورد بررسی عبارتند از: $F_4(q)$ هرگاه q توان عدد اول فردی باشد، ${}^2D_4(q)$ ، هرگاه $q > 5$ ، $C_4(q)$ هرگاه $q = 2^n$ ، $PSU(n, q)$ هرگاه $n = 3, 5, 7, 11$ و $PSL(2, q)$.

لازم به توضیح است که در انجام این کارتحقیقاتی، توانستیم تکنیکهای جدیدی را ابداع کنیم که با استفاده از آنها، انجام تشخیص پذیری گروههای با دو مؤلفه همبندی امکان پذیر باشد. بعلاوه با تهیه یک برنامه کامپیوتری به کمک نرم‌افزارهای Maple و Mathematica توانستیم جواب عددی ایجاد شده را در روند اثبات تشخیص پذیری این گروهها پیدا کنیم که بدون انجام این نوع محاسبات، امکان ادامه کار وجود نداشت.

دو حدس بسیار مشهور در مورد گروههای متناهی مطرح است که عبارتند از:

حدس تامپسون. فرض کنید M یک گروه ساده متناهی و غیرآبلی باشد. اگر G گروهی متناهی باشد که $Z(G) = 1$ و $N(G) = N(M)$ ، که در آن $\{G \text{ کلاس ترویجی از اندازه } n \text{ داشته باشد} \mid n \in N(G)\}$ آنگاه $G \cong M$.

حدس شی - بی. فرض کنید M یک گروه ساده متناهی و G یک گروه متناهی باشد. در این صورت اگر (۱)

$$|G| = |M| \text{ و } \pi_e(G) = \pi_e(M) \text{ (که در آن } \pi_e(G) \text{ مجموعه مرتبه عناصر گروه } G \text{ است)} \text{ آنگاه } G \cong M.$$

به عنوان نتایجی از این نوع تشخیص پذیری صحت این حدسها در مورد گروههای فوق ثابت می‌شود.

فهرست مطالب

- ۱..... پیش گفتار
- ۳..... فصل اول: آشنایی با چند نوع تشخیص پذیری برای گروههای متناهی
- ۳..... مقدمه
- ۵..... تشخیص پذیری گروههای متناهی بوسیله مجموعه مرتبه عناصر آنها
- ۷..... تشخیص پذیری بوسیله مرتبه گروه و مجموعه مرتبه عناصر
- ۸..... تشخیص پذیری بوسیله $Z(G)$ و $N(G)$
- ۸..... تشخیص پذیری بوسیله مجموعه مرتبههای نرمالساز زیرگروههای سیلوی گروه
- ۹..... تشخیص پذیری بوسیله مجموعه اندیسهای زیرگروههای ماکسیمال و مرتبه گروه
- ۹..... تشخیص پذیری بوسیله جدول سرشتهای تحویل ناپذیر گروه
- ۱۰..... تشخیص پذیری بوسیله مجموعه درجات سرشتهای تحویل ناپذیر گروه
- ۱۱..... تشخیص پذیری بوسیله مجموعه مرتبه مؤلفهها
- ۱۲..... فصل دوم: مقدماتی در مورد گروههای متناهی
- ۱۲..... برخی تعاریف مقدماتی
- ۱۶..... رده بندی گروههای ساده متناهی
- ۱۹..... آشنایی با برخی از گروههای ساده متناهی
- ۲۷..... گروههای پوچتوان

۲۹.....	گروههای حلپذیر.....
۳۰.....	گروههای فرونیوس و ۲ - فرونیوس.....
۳۱.....	گراف اول.....
۴۱.....	فصل سوم: تشخیص پذیری گروههای ساده متناهی با سه مؤلفه همبندی.....
۴۱.....	مقدمه.....
۴۴.....	تشخیص پذیری گروه $F_2(q)$ ، وقتی که $q = 2^n$ ($n > 1$).....
۵۲.....	تشخیص پذیری گروه ${}^2D_p(3)$ ، وقتی که $p = 2^m + 1$ ($m \geq 2$)، و p عدد اولی است.....
۵۴.....	فصل چهارم: تشخیص پذیری گروههای ساده متناهی با دو مؤلفه همبندی.....
۵۲.....	مقدمه.....
۵۶.....	تشخیص پذیری گروه $F_2(q)$ (q فرد).....
۹۳.....	تشخیص پذیری گروههای $C_2(q)$ هرگاه $q > 5$ و $C_2(q)$ هرگاه $q = 2^n$
۱۰۳.....	تشخیص پذیری گروه ${}^2D_2(q)$
۱۱۰.....	تشخیص پذیری گروههای $PSU(n, q)$ هرگاه $n = 3, 5, 7, 11$
۱۲۰.....	تشخیص پذیری گروه $PSL(3, q)$
۱۲۲.....	فهرست مراجع.....
۱۳۵.....	جدولها.....
۱۴۵.....	واژهنامه فارسی به انگلیسی.....
۱۴۷.....	واژهنامه انگلیسی به فارسی.....

پیش‌گفتار

مفهوم تشخیص پذیری از جمله مفاهیمی است که در قسمتهای زیادی از ریاضیات ظاهر می‌شود و از آن جمله نظریهٔ گروههای متناهی است.

از حوالی سالهای ۱۹۶۰ تاکنون تشخیص پذیریهای مختلفی برای گروههای ساده مطرح شده است که از مهمترین آنها می‌توان به تشخیص پذیری بوسیلهٔ جدول سرشتهای، تشخیص پذیری بوسیلهٔ درجات سرشتهای تحویل ناپذیر، تشخیص پذیری بوسیلهٔ داشتن تنها مرتبهٔ عناصر، تشخیص پذیری بوسیلهٔ مرتبهٔ عناصر و مرتبهٔ گروه و تشخیص پذیری بوسیلهٔ داشتن مرتبهٔ گروه و اندیسهای زیرگروههای ماکسیمال آن را نام برد.

در فصل اول این رساله به طور خلاصه به معرفی این نوع تشخیص پذیریهای می‌پردازیم و به برخی از کارهای انجام شده در هر مورد اشاره می‌کنیم. بعلاوه برخی از مسائل باز موجود در هر نوع از این تشخیص پذیریهای را جهت اطلاع خوانندگان ارائه می‌نماییم.

در فصل دوم این رساله ابتدا به ارائه مقدماتی از نظریهٔ گروههای می‌پردازیم. همچنین به طور خلاصه با برخی از گروههای سادهٔ متناهی آشنا می‌شویم. در بخشهای بعد پس از معرفی گراف اول و آشنایی با مفهوم مرتبهٔ مؤلفه‌های یک گروه به ارائهٔ قضایای پیرامون این مفاهیم می‌پردازیم که از مهمترین آنها می‌توان به قضیهٔ مشهور کگل — گروبرگ در مورد رده بندی گروههای متناهی با گراف اول ناهمبند اشاره کرد. همچنین قضایای را در مورد گراف اول و مرتبهٔ مؤلفه‌های یک گروه فروبنیوس یا ۲ — فروبنیوس مطرح می‌کنیم. متذکر می‌شویم که برخی از قضایای موجود در این بخش را خودمان طرح و اثبات کرده‌ایم که از مهمترین آنها می‌توان به قضیهٔ

۱۴.۷.۲ اشاره کرد که ابزار بسیار قدرتمندی در تشخیص پذیری گروه‌های ساده با دو مؤلفه همبندی می‌باشد. اخیراً شخصی به نام چن نوع جدیدی از تشخیص پذیری را مطرح کرده است که تشخیص پذیری بوسیله مرتبه مؤلفه‌ها نامیده می‌شود. این تشخیص پذیری به صورت زیر است:

« فرض کنید M یک گروه متناهی باشد. اگر G گروهی متناهی باشد که $OC(G) = OC(M)$,

(یعنی مرتبه مؤلفه‌هایشان برابر است) آیا می‌توان نتیجه گرفت که $G \cong M$ ؟ »

وی در طی چند مقاله نشان می‌دهد که اگر M یک گروه پراکنده، یک گروه سوزوکی - ری، $E_8(q)$ ، $G_2(q)$ جایی که $q \equiv 3 \pmod{4}$ یا $PSL(2, q)$ باشد آنگاه پاسخ سؤال فوق مثبت است یا به عبارت دیگر هر یک از این گروه‌ها بوسیله مجموعه مرتبه مؤلفه‌های خود تشخیص پذیرند. لازم به تذکر است که این گروه‌ها همگی دارای حداقل سه مؤلفه همبندی هستند.

در فصل سوم این رساله گروه $F_4(q)$ وقتی که q توانی از عدد ۲ باشد را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. چون این گروه نیز سه مؤلفه همبندی دارد با روش نسبتاً ساده‌ای ثابت می‌کنیم که این گروه توسط مرتبه مؤلفه‌هایش تشخیص پذیر است. همچنین در ادامه این فصل، به بررسی تشخیص پذیری دو گروه ساده دیگر می‌پردازیم که آنها نیز سه مؤلفه همبندی دارند.

یک سؤال طبیعی که به ذهن هر خواننده‌ای می‌رسد بحث در مورد تشخیص پذیری سایر گروه‌های ساده متناهی است. در فصل چهارم ابتدا نشان می‌دهیم که در میان گروه‌های با یک مؤلفه همبندی فقط گروه دوری از مرتبه عددی اول بوسیله مجموعه مرتبه مؤلفه‌هایش تشخیص پذیر است. اما تشخیص پذیری گروه‌های ساده متناهی با دو مؤلفه همبندی سئوالی است که قبلاً هیچ کاری در مورد آن انجام نشده بود. از طرفی هیچ یک از تکنیک‌های قبلی در مورد این نوع تشخیص پذیری کارایی نداشت. بنابراین با اثبات تعدادی قضیه و لم جدید ابزار و در واقع تکنیک‌هایی را ابداع کردیم که با کمک آن می‌توان تشخیص پذیر بودن گروه‌های ساده متناهی با دو مؤلفه همبندی را مورد بررسی قرار داد. با بکارگیری این تکنیک‌ها در مورد برخی از گروه‌های ساده متناهی ثابت کردیم که گروه‌های $F_4(q)$ هرگاه q توان یک عدد اول فرد باشد، ${}^2D_4(q)$ ، $C_2(q)$ هرگاه $q > 5$ ، $C_4(q)$ هرگاه $PSU(n, q)$ هرگاه $n = 3, 5, 7, 11$ و نهایتاً $PSL(3, q)$ بوسیله مرتبه مؤلفه‌هایشان تشخیص پذیرند.

فصل اول

آشنایی با چند نوع تشخیص پذیری برای گروه‌های متناهی

۱.۱ مقدمه

در ابتدا و قبل از هر بحثی قصد داریم با مفهوم تشخیص پذیری بهتر آشنا شویم.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید مجموعه‌ی ناتهی A مفروض باشد. بعلاوه فرض کنید $a \in A$ و a

تنها عضوی از A باشد که در خاصیت T صدق می‌کند. در این صورت به وضوح a توسط خاصیت T مشخص می‌شود. به عبارت دیگر می‌گوییم T یک تشخیص پذیری برای a در مجموعه‌ی A است.

به عنوان یک مثال ساده دانشجویان حاضر در یک کلاس را در نظر بگیرید. پاره‌ای از خواص ظاهری از قبیل قد، وزن، طرح صورت و ... که شخص خاصی را در این کلاس مشخص می‌کند یک تشخیص پذیری از آن شخص می‌باشد. طبیعی است که بحث تشخیص پذیری در قسمت‌های بسیار زیادی از ریاضیات ظاهر می‌شود که

از آن جمله گروههای متناهی است. بنا بر یکی از قضایای ابتدایی درس جبر I می دانیم که هر گروه از مرتبه عدد اول p با Z_p یکریخت است. پس مرتبه گروه یک تشخیص پذیری برای گروه Z_p (p عدد اول) می باشد. این نوع تشخیص پذیری را می توان به شکل زیر نوشت:

۲.۱.۱ قضیه. فرض کنید p عددی اول و G گروهی متناهی باشد به طوری که $|G| = p$. در این صورت $G \cong Z_p$.

به طور مشابه با استفاده از قضایای مقدماتی می توان نوع دیگری از تشخیص پذیری را به شکل زیر مطرح کرد:

۳.۱.۱ قضیه. فرض کنید p عددی اول و G گروهی غیر دوری باشد به طوری که $|G| = p^2$. در این صورت $G \cong Z_p \times Z_p$.

یکی از مباحثی که بر مبنای آن چند نوع تشخیص پذیری جدید بنا شده است رده بندی گروههای ساده متناهی می باشد. رده بندی گروههای ساده متناهی خود مدتها به عنوان یک سؤال مهم مطرح بود و نهایتاً بعد از ۱۰۰۰۰ الی ۱۵۰۰۰ صفحه مقاله در سال ۱۹۸۱ به پایان رسید که به شکل زیر بیان می شود:

۴.۱.۱ قضیه رده بندی گروههای ساده متناهی .

گروههای ساده متناهی عبارتند از:

(۱) گروههای دوری از مرتبه اعداد اول، (Z_p) ؛

(۲) گروههای متناوب A_n که $n \geq 5$ ؛

(۳) گروههای ساده از نوع لی؛

(۴) ۲۶ گروه پراکنده.

در فصل دوم به طور خلاصه با رده بندی گروههای ساده متناهی آشنا خواهیم شد. این رده بندی در اثبات بسیاری از قضایا در مورد گروههای متناهی به شکل قدرتمندی ظاهر می شود که از آن جمله می توان موارد زیر را

نام برد:

(۱) حدس شی^۲ - بی^۳؛(۲) حدس چین^۴؛(۳) حدس تامپسون^۵؛

که در بخشهای بعدی این رساله برای گروههای مورد بررسی به این حدسها پاسخ خواهیم داد.

۲.۱ تشخیص پذیری گروههای متناهی بوسیلهٔ مجموعهٔ مرتبهٔ عناصر آنها

در سال ۱۹۸۱ شخصی به نام «شی» آن دسته از گروههای متناهی را مورد بررسی قرار داد که مرتبهٔ تمام عناصر غیرهمانی آنها توانی از عددی اول باشد و نتیجهٔ جالب زیر را در دو مقاله [۱۰۷] (به زبان چینی) و در مقاله [۳۵] (به زبان انگلیسی) به چاپ رساند:

«گروه متناوب A_5 را می توان فقط بوسیلهٔ مرتبهٔ عناصرش مشخص کرد.»

فرض کنید G گروهی متناهی و $\pi_e(G)$ مجموعهٔ مرتبهٔ عناصر گروه G باشد. به وضوح $\pi_e(G)$ زیرمجموعه‌ای

از \mathbb{Z}^+ است که تحت بخشپذیری به طور جزئی مرتب می‌باشد. عکس این حکم سؤال بسیار مشکلی است: یعنی

کدام زیرمجموعه‌های \mathbb{Z}^+ که تحت بخشپذیری بسته‌اند می‌توانند مجموعهٔ مرتبهٔ عناصر یک گروه باشند؟

اگر Γ زیرمجموعه‌ای از \mathbb{Z}^+ باشد، آنگاه $h(\Gamma)$ را تعداد رده‌های یکریختی از گروههای G می‌گیریم که

$\pi_e(G) = \Gamma$ ، به وضوح برای هر Γ نمی‌توان گروهی مانند G یافت به طوری که $\pi_e(G) = \Gamma$. اما اگر یک گروه G داشته باشیم که $\pi_e(G) = \Gamma$ ،

متناهی باشد، آنگاه $h(\pi_e(G)) \geq 1$. با استفاده از تابع h می‌توان گروههای متناهی را به ۳ رده تقسیم کرد: $h(\pi_e(G)) = 1$ ، $h(\pi_e(G)) = k$ ، $h(\pi_e(G)) = \infty$.

(۱) گروه G را تشخیص پذیر نامیم هرگاه $h(\pi_e(G)) = 1$ ؛

(۲) گروه G را k - شناسایی پذیر نامیم هرگاه $h(\pi_e(G)) = k$ ؛

Shi^۲Bi^۳Chen^۴Thompson^۵