بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحمٰنِ الرَّحيمِ

تقدیم به:

پدر و مادرم

سپاسگزاری

سپاس خدایی را که به انسان آنچه را نمی‌دانست، آموخت. اکنون که نگارش این پایان‌نامه به اتمام رسیده است برخود واجب می‌دانم از تمامی کسانی که من را در این راه یاری کرده‌اند سپاسگذاری نمایم. تشکر و قدردانی بی‌دریغ از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی تا به امروز مشوق و پشتوانه‌ام بوده‌اند. همچنین از نامزدم سحر که همواره در طول این دوره مشوق اینجانب بوده و برای اتمام این پایان‌نامه لحظه‌شماری می‌کردند، تشکر می‌کنم.

سپاس ویژه از سرکار خانم دکتر جاهدی که در طول دوران انجام این پایان‌نامه با راهنمایی‌های ارزشمند و حسن اخلاق همیشگی‌شان در به سرانجام رساندن آن کمک شایانی کردند.

از جناب آقای دکتر هاشمی که زحمت مشاوره این پروژه را به عهده داشته‌اند تشکر ویژه دارم.

سپاس و درود بر دیگر اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز، جناب آقای دکتر حسام‌الدینی، جناب آقای دکتر فخارزاده جهرمی، جناب آقای دکتر ملکی، جناب آقای دکتر مهدی‌پور، جناب آقای دکتر حاجی شعبانی و جناب آقای دکتر خرمی‌زاده که در طول این دوره افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

هم‌چنین از دوستان و هم‌کلاسیهای عزیز که در طول این دوره لحظات و خاطرات خوشی در کنارشان رقم خورد قدردانی می‌نمایم.

چکیده

بررسی روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی فازی

بوسیله‌ی:

ابوذر خسته

یکی از مهمترین ابزارها در مهندسی و علوم پایه استفاده از دستگاه معادلات می‌باشد. از آنجا که در عمل چند یا تمامی پارامترهای دستگاه توسط کمیت‌های فازی بیان می‌شوند، بررسی و توسعه روش‌های تئوری و عددی برای حل دستگاه معادلات خطی فازی از اهمیت بالایی برخوردار است. هدف اصلی در این پایان‌نامه بررسی و حل دستگاه‌های معادلات خطی فازی از طریق غیرفازی کردن آن و استفاده از روش‌های عددی برای حل دستگاه جدید می‌باشد. ابتدا دستگاه‌های فازی که دارای ماتریس ضرائب معمولی می‌باشند در نظر گرفته می‌شوند. تحقیق بر تأثیر اختلال در پارامترهای دستگاه از جمله موضوعات دیگری است که مورد بررسی قرار گرفته شده است. در نهایت دستگاه‌هایی که ماتریس ضرائب و بردار سمت راست آن هردو فازی باشند بررسی شده است.

فهرست

عنوان **صفحه**

فهرست جدولها

فهرست شکلها

فصل ۱

تعاریف و قضایا

فصل اول

تعاریف و قضایا

۱—۱ مقدمه

در این فصل به منظور معرفی ابزار های لازم جهت ارائه بحث در فصل های آتی، برخی از مفاهیم، قضایا و تعاریف ریاضی که مورد استفاده قرار خواهند گرفت، را بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که خواننده جهت مطالعه بیشتر می‌تواند به مراجع ذکر شده در هر مورد مراجعه نماید. در این فصل ابتدا به بررسی مفهوم نظریه مجموعه های فازی و اعداد فازی می پردازیم. سپس مقدماتی از جبرخطی را که در ادامه پایان‌نامه از آنها استفاده خواهد شد یادآوری می‌کنیم.

۱—۲ منطق فازی و مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌های فازی

هنگامی که در سال ۱۹٦۵ پروفسور لطفی عسکرزاده استاد ایرانی الاصل دانشگاه کالیفرنیا در برکلی اولین مقاله خود را در زمینه فازی تحت عنوان مجموعه های فازی [۱] منتشر کرد هیچکس نمی توانست باور کند که این مقاله اولین جرقه از پرتو یک جهان‌بینی جدید در عرصه ریاضیات و علوم و اولین قدم در معرفی بینشی نو و واقع‌گرایانه از جهان در چهارچوب

[۱] fuzzy sets

مفاهیمی کاملاً بدیع اما سازگار با طبیعت انسان باشد. منطق و تفکر فازی از دیدگاهی فلسفی نشأت می گیرد که سابقه‌ی چند هزار ساله و به قدمت فلسفه تاریخ دارد. در منطق و فلسفه‌ی ارسطویی که در مقابل فلسفه ی شرق قرار دارد همه چیز به دو دسته‌ی سیاه و سفید تقسیم می‌شود. در فلسفه‌ی ارسطویی نمی‌توان حالت میانه‌ای در نظر گرفت. نمی‌توان تا اندازه ای راستگو و ضمناً کمی هم دروغگو بود. نمی‌توان همزمان نسبتاً جوان و تا اندازه ای پیر بود. ریاضیات کلاسیک تا زمانی که با جهان دوارزشی سروکار داشته باشیم ابزار مناسبی برای بیان مفاهیم مختلف است اما با رشد اندیشه انسانی و پیشرفت‌های علمی، نیاز به ابزار مناسبتر علمی برای مفاهیم پیچیده‌تر زندگی و محیط انسان آشکار شده است. ریاضیات فازی معرف منطق چندارزشی به جای منطق دوارزشی برای حل این مشکل است. کاربردهای منطق فازی در دایره علوم ریاضی و مهندسی کنترل بسیار فراتر رفته و به بسیاری علوم دیگر قدم گذاشته است. مدیریت صنعتی، اقتصاد ، مهندسی پزشکی، روانشناسی و مهندسی صنایع از رشته های علمی است که کاربردهای منطق فازی در آن در حال گسترش است ([۲۳]). یک زیرمجموعه مانند A از مجموعه مرجع X به گردآیه‌ای از عناصر متعلق به X گفته می شود که دارای یک خاصیت مشترک باشند. اگر عنصر x این خاصیت را داشته باشد به مجموعه ی A تعلق دارد و می‌نویسیم $x \in A$ و در غیر این صورت $x \notin A$. چنین مجموعه‌ای را یک مجموعه معمولی گویند که شیوه های مختلفی برای نمایش آن وجود دارد. روش اول که برای مجموعه های با تعداد اعضای متناهی یا شمارش پذیر استفاده می شود، نام بردن صریح عناصری است که به مجموعه تعلق دارند. به عنوان مثال مجموعه اعداد اول کوچکتر از ۲۰ به صورت زیر مشخص می شوند:

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\}.$$

در روش دوم یک مجموعه را توسط خاصیتی که یک عنصر برای تعلق به مجموعه باید دارا باشد، معرفی می کنیم. این خاصیت به صورت گزاره‌ی $\varphi(x)$ می باشد و به ترتیب زیر بیان می‌شود:

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}.$$

به عنوان مثال $\varphi(x)$ می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\varphi(x) = \text{“ x عدد اول کوچکتر از ۲۰ می باشد ”}.$$

روش سوم برای بیان یک مجموعه استفاده از تابع مشخصه μ_{A} می‌باشد، که نگاشتی به صورت

$$\mu_A : X \to \{۰, ۱\},$$

است که در صورت تعلق عنصر x به مجموعه A ، $\mu_A(x) = ۱$ و در صورت عدم تعلق آن به مجموعه A ، $\mu_A(x) = ۰$.

برای مجموعه A، تابع مشخصه به صورت زیر می باشد.

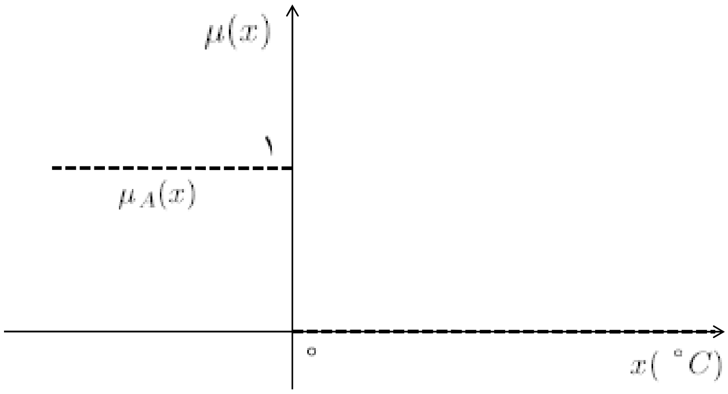
$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

به عنوان مثالی دیگر مجموعه مرجع X را مجموعه‌ی پیوسته و ناشمارای دمای یک منطقه در نظر می‌گیریم. مجموعه A از دمای انجماد را به صورت

$$A = \{x \in X \mid x \leq ۰\},$$

تعریف می‌کنیم که بطور معادل توسط تابع مشخصه زیر نیز تعریف می‌شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \leq ۰, \\ ۰ & x > ۰ . \end{cases}$$



شکل ۱—۱ نمودار تعلق عناصر مجموعه مرجع به مجموعه A

بنابراین خاصیت

$$\varphi(x) = \text{“ x یک دمای انجماد است ”},$$

یک تعریف مشخص و نامبهم از عناصر A و عناصر غیر A ارائه می دهد که نمودار آن در شکل ۱.۱ مشاهده می‌شود.

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، نقطه ی صفر مرز تشخیص تعلق یا عدم تعلق یک نقطه به مجموعه A می باشد. اما در بسیاری مواقع خاصیت مورد نظر طوری است که تشخیص مرز تعلق یا عدم تعلق یک نقطه به مجموعه به راحتی امکان پذیر نیست. به عنوان مثال مجموعه $\tilde{A}$ از "دماهای پایین" رادر نظر بگیرید. از آنجایی که طبقه بندی دماها به "دماهای پایین" و "سرد" و ... به میزان زیادی به مشاهده شخصی بستگی دارد، واضح است که تقسیم مجموعه مرجع به نقاط متعلق به A و نقاطی که به A تعلق ندارند، دیگر معنی دار نمی‌باشد. از طرفی مفهوم مبهم خاصیت " x یک دمای انجماد است " ، برای مجموعه $\tilde{A}$ لزوم گسترش نظریه مجموعه های کلاسیک به یک نظریه گسترده‌تری را ایجاب می کند که در آن امکان درجه‌بندی بین دو گروه نیز وجود داشته باشد. نظریه مجموعه‌های فاری تعمیمی از

نظریه مجموعه‌های کلاسیک است بدین صورت که برای عناصر مجموعه مرجع این امکان فراهم است که هر عضو با درجه‌ای به یک مجموعه تعلق داشته باشند یا به یک مجموعه تعلق نداشته باشند. می‌توان گفت که مفهوم تابع مشخصه برای یک مجموعه A ، در نظریه مجموعه‌های فازی به تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ برای مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت

$$\mu_{\tilde{A}} : X \to [۰, ۱],$$

تعمیم پیدا می‌کند. بنابراین یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ را می توان به صورت

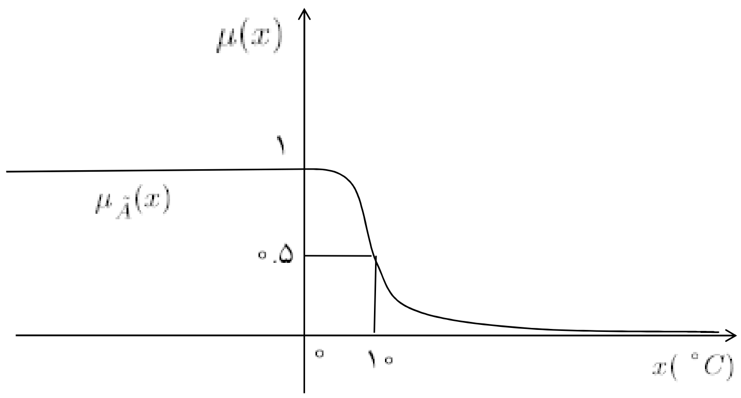
$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [۰, ۱]\},$$

نشان داد که $\mu_{\tilde{A}}$ درجه تعلق x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌باشد([۱۹]).

مثال ۱.۱: مجموعه فازی دماهای انجماد را به صورت زیر می‌توان معرفی کرد:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X\},$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{۱}{۱+\exp(x-۱۰)},$$

که شکل آن را در زیر مشاهده می‌کنید.



شکل ۱—۲ نمودار تعلق عناصر مجموعه مرجع به مجموعه فازی دماهای انجماد

تعاریف این بخش از مرجع ([۱۹]) انتخاب شده است.

تعریف ۲.۱: ارتفاع یک زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ با استفاده از مقدار سوپریمم (یا ماکزیمم وقتی که X متناهی باشد) تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$hgt(\tilde{A}) = h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

اگر $hgt(\tilde{A}) = ۱$ ، عدد فازی $\tilde{A}$ نرمال و در غیر این صورت زیرنرمال نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱: هسته یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ یک مجموعه معمولی از تمام عناصر x است که دارای درجه عضویت ۱ می‌باشند که آن را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$Core(\tilde{A}) = C(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱\}.$$

تعریف ۴.۱: تکیه‌گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ به مجموعه $x \in X$ هایی گفته می‌شود که دارای درجه عضویت ناصفر می‌باشند. به عبارت دیگر:

$$Supp(\tilde{A}) = S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}.$$

تعریف ۵.۱: $\alpha-$برش یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه ای دقیق از x های متعلق به X است که درجه عضویت آنها به $\tilde{A}$ بزرگتر یا مساوی α باشد، یعنی:

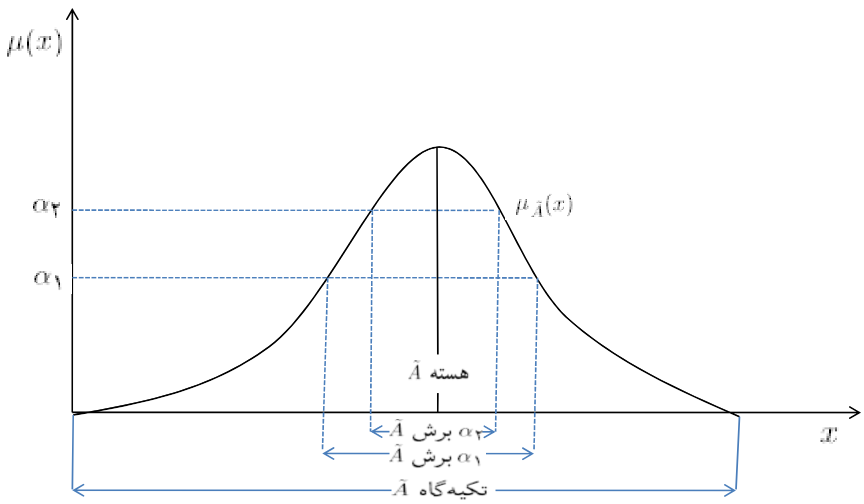
$$Cut_{\alpha}(\tilde{A}) = A_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad , \qquad ۰ < \alpha \leq ۱.$$

همچنین $A_{۰}$ را جداگانه به صورت

$$A_{۰} = \overline{\{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}},$$

تعریف می‌کنیم.

در شکل ۳.۱ یک مجموعه فازی را همراه با ارتفاع، هسته، α−برشها و تکیه‌گاه آن مشاهده می‌کنید.



شکل ۱−۳ نمودار یک مجموعه فازی همراه با ارتفاع، هسته، α−برشها و تکیه گاه آن

تعریف ۶.۱: مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$،

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)).$$

علاوه بر α−برش‌ها که نقش اساسی در ارتباط بین نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه‌های کلاسیک ایفا می‌کنند، اصل گسترش نیز که در ادامه معرفی می‌شود، اهمیت زیادی در ارتباط بین این دو نظریه دارد ([۳۷]). فرض کنید f نگاشتی از X به Y باشد که X و Y به ترتیب دامنه و برد f می‌باشند. اصل گسترش زاده ابزاری برای تعمیم f به روی مجموعه‌های فازی، به صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۷.۱: فرض کنید $f : X \to Y$ یک نگاشت از X به Y باشد. بنا به اصل گسترش، مجموعه فازی $B \in Y$ القا شده از $A \in X$ توسط f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x), x \in X\},$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} sup_{y=f(x)}\, \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-۱}(y) \neq \emptyset, \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

مثال ۸.۱: اگر مجموعه فازی A به صورت

$$A = \{(-۲, ۰/۳), (-۱, ۰/۵), (۰, ۰/۸), (۱, ۱), (۲, ۰/۴)\},$$

باشد و $f(x) = x^۲$ ، آنگاه بنا به اصل گسترش

$$B = \{(۰, ۰/۸), (۱, ۱), (۴, ۰/۴)\}.$$

در حالت کلی اصل گسترش را روی فضای n بعدی نیز می توان تعریف کرد. اگر $f : X \to Y$ یک نگاشت از X به Y باشد و $X = X_۱ \times \cdots \times X_n$،آنگاه مجموعه فازی $B \in Y$ القا شده از $A \in X$ که در آن $A = A_۱ \times \cdots \times A_n$ توسط f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} sup_{x \in X, y=f(x)}\, \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-۱}(y) \neq \emptyset, \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

۱—۳ اعداد فازی

در میان انواع مختلف مجموعه‌های فازی ، مجموعه‌هایی با مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ از اهمیت خاصی برخوردار هستند، که تحت شرایطی خاص به عنوان اعداد فازی تعریف می‌شوند و به عنوان مشاهده‌ی انسانی یک کمیت خاص در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۹.۱: ([۳۷]) یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ با مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ را عدد فازی گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\tilde{A}$ محدب باشد،

۲) $\overline{x} \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(\overline{x}) = ۱$ $(Core(\tilde{A}) \neq \emptyset)$،

۳) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ قطعه ای پیوسته باشد.

مقدار $\overline{x}$ که $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ را مقدار مرکزی یا مقدار میانگین عدد فازی $\tilde{A}$ گویند. مجموعه تمام اعداد فازی در $\mathbb{R}$ را با $F^۱$ و در $\mathbb{R}^n$ با F^n نمایش می‌دهند. همچنین عدد فازی $\tilde{A}$، متقارن نامیده می‌شود هرگاه

$$\mu_{\tilde{A}}(\overline{x} + x) = \mu_{\tilde{A}}(\overline{x} - x) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی با توابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x)$ باشند. بنا به اصل گسترش زاده عمل دوتائی "." در $\mathbb{R}$ می تواند به عمل دوتائی "$\odot$" روی دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعمیم پیدا کند

$$\mu_{\tilde{A}\odot\tilde{B}}(z) = \sup_{z=x.y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

با استفاده از تعریف بالا می‌توان با قرار دادن "$+$"، "$-$"، "$\times$" و "$\div$" به جای "." در معادله بالا به ترتیب جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعمیم‌یافته را تعریف کرد. به عنوان مثال برای عمل جمع بین دو عدد فازی تابع $f : X \times Y \to Z$ با ضابطه $f(x, y) = x + y$ را در نظر بگیرید. بنا به اصل گسترش

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}} = \sup_{z=x+y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

به طور مشابه اعمال تفریق ضرب و تقسیم بین دو عدد فازی را با در نظر گرفتن تابع $f: X \times Y \to Z$ با ضابطه $f(x,y) = x - y$ ، $f(x,y) = x \times y$ ، $f(x,y) = x \div y$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_{\tilde{A}\tilde{B}} = \sup_{z=x-y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),$$

$$\mu_{\tilde{A}\otimes\tilde{B}} = \sup_{z=x\times y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),$$

$$\mu_{\tilde{A}\oslash\tilde{B}} = \sup_{z=x\div y} min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

۱—۴ انواع عدد فازی

از میان تعداد زیادی از مجموعه‌های فازی که می‌توانند به عنوان اعداد فازی در نظر گرفته شوند، چند تابع که در زمینه‌های مختلف کاربردهای زیادی داشته و در ادامه پایان‌نامه از آنها استفاده می شود را معرفی می‌کنیم([۱۹]).

۱—۴—۱ عدد فازی مثلثی

عدد فازی مثلثی به دلیل تابع عضویت خطی و بسیار ساده‌ای که دارد، یکی از پرکاربردترین انواع اعداد فازی می‌باشد. عدد فازی مثلثی را به اختصار با

$$\tilde{A} = tfn(\overline{x}, \alpha_l, \alpha_r),$$

نشان می‌دهیم که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \overline{x} - \alpha_l, \\ 1 + \frac{x-\overline{x}}{\alpha_l} & \overline{x} - \alpha_l < x < \overline{x}, \\ 1 - \frac{x-\overline{x}}{\alpha_r} & \overline{x} < x < \overline{x} + \alpha_r, \\ 0 & x \geq \overline{x} + \alpha_r. \end{cases}$$