بسم الله الرحمن الرحیم

۹۵۹۹۹

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

موضوع :

بررسی حلقه و مدول هایی که نسبت به ساکل تزریقی اند

استاد راهنما :
دکتریحیی طالبی

استاد مشاور:
دکتر رضا عامری

نگارش :
بهنام طلایی

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

زمستان ٨٦

هوالحق

علمی که تو را گره گشاید بطلب
زآن پیش که از تو جان برآید بطلب
آن نیست که هست می نماید بگذار
وآن هست که نیست می نماید بطلب

حضرت مولانا

با تقدیر وتشکر فراوان از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر طالبی که در جمع آوری و تنظیم مطالب مرا یاری نمودند و در تمام مراحل کار از راهنمایی های ارزشمند ایشان بهره مند بودم. همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر عامری که زحمت مشاوره این رساله را بر عهده داشتند تقدیر و تشکر می کنم. در پایان از همه عزیزانی که مرا در این امر یاری نمودند سپاسگزاری می نمایم.

تقدیم به :

ستارگـان درخشان آسمان وجـودم،

پدر و مادر مهربانم

که با تحمل سختیها، دشواریها را برمن آسان نمودند.

فهرست مطالب

فصل چهارم: حلقه های ساکل – تزریقی

فصل پنجم: حلقه های قویا ساکل - تزریقی

ضمایم:

چکیده

در این کار ما خواص (قویا) ساکل – تزریقی را برای حلقه ها و مدول ها بررسی می کنیم و نشان می دهیم این مفهوم با مفاهیم نیمه – تزریقی، ساده – تزریقی و همچنین تزریقی متفاوت است.

اکثر نتایج اساسی برای مدولهای (شبه) تزریقی، برای مدولهای (شبه) ساکل – تزریقی نیز ثابت می شود. به عنوان مثال نشان داده می شود که کلاس مدولهای (قویا) ساکل – تزریقی نسبت به یکریختی، حاصلضرب مستقیم، جمع مستقیم متناهی و جمعوند ها بسته است. به علاوه نشان داده می شود که خاصیت (قویا) ساکل – تزریقی یک خاصیت پایدار موریتا برای حلقه ها می باشد.

یاد آور می شویم که دو حلقه R و S را موریتا – یکریخت گوییم، هرگاه کتگوری R – مدولها و کتگوری S – مدولها یکریخت باشند.

در فصل دوم نشان می دهیم که اگر M یک مدول تصویری باشد، آنگاه هر کسری از یک مدول ساکل- M – تزریقی مجددا ساکل – M – تزریقی است اگر و تنها اگر $Soc(M)$ تصویری باشد.

اگر M یک مدول متناهیا تولید شده باشد، آنگاه هر جمعوندی از یک مدول ساکل – M – تزریقی مجددا ساکل – M – تزریقی است اگر و تنها اگر $Soc(M)$ متناهیا تولید شده باشد. این ویژگی در مشخصه سازی حلقه های متناهی ا لبعد کسری ($q.f.d$) مورد استفاده قرار می گیرد.

حلقه R را $q.f.d$ گوییم هرگاه هر کسری از R دارای بعد متناهی باشد. معادلا هر R – مدول متناهیا تولید شده دارای بعد متناهی باشد.

همچنین نشان می دهیم که برای R - مدول راست دوری M ، هر جمعوندی از یک مدول ساکل – M – تزریقی مجددا ساکل – M – تزریقی است اگر و تنها اگر حلقه R، $q.f.d$ باشد.

در فصل سوم، نشان خواهیم داد یک مدول قویا ساکل – تزریقی به جمع مستقیم دو مدول تجزیه می شود، که یکی تزریقی و دیگری دارای ساکل صفر می باشد. به ویژه مدولهای قویا ساکل- تزریقی با ساکل اساسی و همچنین مدولهای قویا ساکل – تزریقی تجزیه ناپذیر با ساکل صفر، تزریقی می باشند.

چکیده

بـا گـسترش یـک نتیجـه مـشهور بـرای حلقـه هـای نـوتری در مبحـث مـدولهای تزریقـی، نشان مـی دهـیم کـه حلقـه R نـوتری راسـت اسـت اگـر و تنهـا اگـر هـر جمـع مـستقیم R- مدولهای قویا ساکل- تزریقی، مجددا قویا ساکل- تزریقی باشد.

بـا اسـتفاده از نتیجـه قبلـی نـشان خـواهیم داد کـه، حلقـه R یـک V- حلقـه نـوتری راسـت است اگر و تنها اگر هر R- مدول راست، قویا ساکل- تزریقی باشد.

همچنـین در بخـش پـنجم نـشان مـی دهـیم کـه اگـر N یـک R – مـدول راسـت باشـد، آنگـاه هر R – مدول راست قویا ساکل- تزریقی، ساده – N – تزریقی است.

یـاد اوری مـی کنـیم کـه R – مـدول راسـت K ، سـاده – N – تزریقـی اسـت هرگـاه، بـرای هـر زیرمـدول L از N ، هـر همریختـی $\gamma : L \longrightarrow K$ کـه درآن $\gamma(L)$ سـاده اسـت، بـه یک همریختی از N به K گسترش یابد.

بـه ویـژه، هـر حلقـه قویـا سـاکل – تزریقـی (راسـت) ، سـاده - تزریقـی (راسـت) اسـت. مثال هایی وجود دارند که نشان می دهند عکس این موضوع لزوما بر قرار نیست.

حلقـه هـای نیمـه آرتینـی و شـبه فروبنیـوس، بـه وسـیله مـدولهای قویـا سـاکل تزریقـی، مشخصه سازی می شوند.

بـه عنـوان مثـال R نیمـه آرتینـی راسـت اسـت اگـر و تنهـا اگـر هـر R – مـدول قویـا سـاکل – تزریقـی، تزریقـی باشـد اگـر و تنهـا اگـر هـر R – مـدول قویـا سـاکل - تزریقـی، شـبه پیوسـته باشـد. حلقـه R شـبه فروبنیـوس اسـت اگـر و تنهـا اگـر هـر R – مـدول راسـت قویـا ساکل – تزریقی، تصویری باشد.

همچنـین مـا نـشان مـی دهـیم کـه هـر R – مـدول تـصویری، قویـا سـاکل – تزریقـی اسـت اگـر و تنهـا اگـر $M = E \oplus T$ کـه در آن E و T ایـده آل هـای راسـت R مـی باشـند، بطـوری کـه E_R ، $\sum$ - تزریقـی اسـت (هـر جمـع مـستقیم کپـی از E_R ، تزریقـی اسـت) و T_R، دارای ساکل صفر می باشد.

مقدمه

همانطور که می دانیم مفهوم تزریقی دوگان مفهوم تصویری است. اما در این رساله حالت خاصی از حلقه ها و مدولهای تزریقی را مورد بررسی قرار می دهیم. این مفهوم که ساکل- تزریقی (Soc-injective) نام دارد، بررسی مدولهایی است که نسبت به ساکل یک مدول دیگر تزریقی اند.

در سال ۱۹۹۰ B.J.Muller و S.H.Mohamed [۱۲] در این زمینه تحقیقاتی انجام دادند و برخی از خواص چنین مدولها را مورد بررسی قرار دادند.

همچنین در سال ۱۹۶۶ Osofsky [۱۷] نتایج جالبی برای حلقه های شبه تزریقی (self-injective) بدست آورد. که این مفهوم نیز تا حدودی مشابه مفهوم ساکل - تزریقی است.

در سال ۲۰۰۳ W.K.Nicholson و M.F.Yousif [۱۶] در این باره تحقیقاتی انجام داده بودند و ارتباط این مدولها را با حلقه های شبه پیوسته(Quasi-Frobenius) بررسی کردند.

اما در این رساله این مفاهیم به طور گسترده تری مورد بحث و تحلیل قرار می گیرند و با معرفی حلقه های خاصی، ارتباط این مفهوم با آنها بررسی خواهد شد.

با توجه به این که این مفهوم مرتبط با ساکل مدولها می باشد، زیرمدولهای نیمه ساده یک مدول نقش به سزایی در آن دارند و به راحتی دیده خواهد شد که اگر مدولی نسبت به ساکل یک مدول دیگر تزریقی باشد، نسبت به هر زیرمدول نیمه ساده از آن نیز تزریقی خواهد بود و برعکس.

عمده مطالب این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر می باشد

Ismail Amin, Mohamed Yousif, Nasr Zeyada. (2005). Soc-injective Rings and Modules.Comm. in Algebra. 33: 4229-4250.

Nichoison, W. K., Yousif, M. F. (2003). Quasi-Frobenius Rings. Cambridge Tracts in Math. 158. Cambridge, UK: Cambridge Univ. press.

فصل اول:

تعاریف مقدماتی و

پیش نیازها

مدولها و زیرمدولها

در سراسر این پایان نامه کلیه حلقه ها شرکت پذیر و یکدارند.

تعریف ۱-۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک گروه جمعی باشد. گوییم M یک R- مدول راست است هرگاه عمل $o : M \times R \longrightarrow M$ با $(m,r) \mapsto mr$ موجود باشد، به طوری که شرایط زیر برقرار باشد

۱. $m(r+s) = mr + ms$ ، برای هر $r,s \in R$ و هر $m \in M$.

۲. $(m+n)r = mr + nr$ ، برای هر $m,n \in M$ و هر $r \in R$.

۳. $m(rs) = (mr)s$ ، برای هر برای هر $r,s \in R$ و هر $m \in M$.

٤. $m.1 = m$ ، برای هر $m \in M$. (در این حالت M را یک مدول R- یکانی گویند)

مشابها R- مدول چپ تعریف می شود.

مثال های ۱-۲ :

۱. هر حلقه R روی خودش با عمل ضرب حلقه، یک R- مدول راست است و آن را با R_R . نشان می دهند.

۲. کلیه گروه های آبلی روی حلقه $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}$- مدول هستند.

۳. اگر V یک فضای برداری روی میدان F باشد، آنگاه V یک F- مدول است.

٤. فرض کنید R یک حلقه و S زیر حلقه ای از آن باشد، آنگاه با عمل ضرب حلقه R یک S- مدول خواهد بود.

۵. حلقه چند جمله ای های $R[x]$ ، یک R- مدول است.

تعریف ۱-۳ : زیر مجموعه N از R- مدول راست M را یک زیر مدول از M نامند هرگاه

۱. $x + y \in N$ ، برای هر $x, y \in N$.

۲. $xr \in N$ ، برای هر $x \in N$ و هر $r \in R$.

به عبارتی دیگر N خود یک R- مدول راست باشد. در این صورت می نویسیم $N \leq M$.

تعریف ۱-۴: فرض کنید M و N دو R- مدول راست باشند. $f: M \longrightarrow N$ را یک همریختی R- مدولی گوییم هرگاه

۱. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ برای هر $x, y \in M$.

۲. $f(rx) = rf(x)$ برای هر $r \in R$ و $x \in M$.

هرگاه $M = N$، گوییم f یک درونریختی از M است.

گزاره ۱-۵: فرض کنید $\{M_i : i \in I\}$ یک خانواده از زیرمدول های R- مدول راست M باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱. $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = 0$، برای هر $i \in I$.

۲. هر $m \in \sum_{i \in I} M_i$ را فقط به یک صورت ممکن $m = m_1 + m_2 + \ldots$ می توان نمایش داد.

۳. هرگاه $\sum_{i \in I} m_i = 0$، آنگاه $m_i = 0$ برای هر $i \in I$.

اثبات: ۱ $\Rightarrow$ ۲: فرض کنید $m = \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} n_i$ دو نمایش متفاوت برای عنصر $m \in \sum_{i \in I} M_i$ باشد. در این صورت $\sum_{i \in I}(m_i - n_i) = 0$ و در نتیجه $m_i - n_i = -\sum_{j \neq i}(m_j - n_j) \in M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j$ برای هر $i \in I$. در نتیجه $m_i = n_i$ برای $i \in I$.

۳ $\Rightarrow$ ۲: فرض کنید $\sum_{i \in I} m_i = 0$. بنابراین داریم $m_1 + m_2 + \ldots = 0 + 0 + \ldots$، در نتیجه طبق (۲)، $m_i = 0$ برای هر $i \in I$.

۱ $\Rightarrow$ ۳: فرض کنید $m \in M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j$، در نتیجه $m = m_i = \sum_{j \neq i} m_j$ و بنابراین $m_i - \sum_{j \neq i} m_j$. حال از (۳)، $m_i = 0$ برای هر $i \in I$ و در نتیجه $m = 0$.

تعریــف ۱-٦: خــانواده $\{M_i : i \in I\}$ از زیرمــدول هــای مــدول M را مــستقل گوینــد، هرگاه در یکی از شرایط گزاره قبل صدق کند.

تعریــف ۱-۷: مــدول M را مجمــوع مــستقیم خــانواده $\{M_i : i \in I\}$ از زیرمــدول هایش گویند، هرگاه

۱. $M = \sum_{i \in I} M_i$.

۲. خانواده $\{M_i : i \in I\}$ مستقل باشند.

مدولهای آزاد و تصویری

تعریف ۱-۸: R- مدول راست M یک مدول آزاد نامیده می شود، هرگاه یک زیرمجموعه X از M موجود باشد به طوری که $M=<X>$ و مجموعه X مستقل خطی باشد.

یک حلقه یکدار روی خودش همواره یک مدول آزاد است.

تعریف ۱-۹: فرض کنید R یک حلقه و P یک R- مدول باشد. P را یک مدول تصویری گویند، هرگاه برای هر دو R- مدول M و N و هر همریختی R- مدولی پوشای $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ و هر همریختی R- مدولی $f: P \longrightarrow N$، بتوان یک همریختی R- مدولی $\bar{f}: P \longrightarrow M$ پیدا کرد به طوری که $go\bar{f} = f$.

لم ۱-۱۰: هر R- مدول آزاد یک R- مدول تصویری است.

اثبات: فرض کنید F یک R- مدول آزاد باشد به طوری که $F=<X>$. همچنین فرض کنید M و N دو R- مدول دلخواه، $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ یک همریختی R- مدولی پوشا و $f: F \longrightarrow N$ یک همریختی باشد. در این صورت بازای هر $x_i \in X$، $f(x_i) \in N$ و چون g پوشاست، $m_i \in M$ موجود است به طوری که $g(m_i) = f(x_i)$. حال $\bar{f}: F \longrightarrow M$ وجود دارد به طوری که $\bar{f}(x_i) = m_i$. در این صورت به راحتی دیده می شود که $\bar{f}$ یک همریختی R- مدولی است و $go\bar{f} = f$.

گزاره ۱-۱۱: فرض کنید $\{P_i : i \in I\}$ خانواده ای از R- مدول های راست باشد. در این صورت $\oplus_{i\in I} P_i$ تصویری است اگر و تنها اگر P_i برای هر $i \in I$، تصویری باشد.

اثبات: فرض کنید $\oplus_{i\in I} P_i$ تصویری باشد و M و N دو R- مدول دلخواه، $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ یک همریختی R- مدولی پوشا و $f_i : P_i \longrightarrow N$ برای $i \in I$، یک همریختی باشد. در این صورت $f = \oplus_{i\in I} f_i : \oplus_{i\in I} P_i \longrightarrow N$ با

ضابطه $f(\{x_i\}_{i\in I})=\sum_{i\in I} f_i(x_i)$ یک همریختی از $\oplus_{i\in I} P_i$ به N خواهد بود و درنتیجه همریختی $\bar{f}:\oplus_{i\in I} P_i \longrightarrow M$ موجود است به طوری که $go\bar{f}=f$. هرگاه $t_i : P_i \longrightarrow \oplus_{i\in I} P_i$ نگاشت های یک به یک کانونی باشند، آنگاه $\bar{f}t_i$ یک همریختی از P_i به N خواهد بود و حکم تمام می شود.

برعکس: مشابه قسمت قبل است.

مثال ۱-۱۲ : حلقه Z روی خودش یک مدول آزاد است و بنابراین تصویری است. ولی $\prod_A Z$ که در آن A یک مجموعه اندیس گذار ناشمارا است، تصویری نیست، زیرا آزاد نیست.

مدولهای تزریقی

تعریف ۱-۱۳: فرض کنید R یک حلقه و E یک R- مدول راست باشد. مدول E را تزریقی گوییم هرگاه برای هر دو R- مدول M و N و هر همریختی R- مدولی یک به یک $f:N\longrightarrow M$ و همریختی $g:N\longrightarrow E$، بتوان یک همریختی $\overline{g}:M\longrightarrow E$ یافت به طوری که $\overline{g}of=g$.

تعریف ۱-۱۴: فرض کنید M و N دو R- مدول راست باشند. M را N- تزریقی نامند هرگاه هر همریختی از یک زیرمدولی از N به M را بتوان به یک همریختی از N به M گسترش داد.

تعریف ۱-۱۵: R- مدول راست M را شبه – تزریقی نامند هرگاه M، M- تزریقی باشد.

گزاره ۱-۱۶: فرض کنید $\{E_i : i\in I\}$ خانواده ای از R- مدول های راست باشد. دراین صورت $\prod_{i\in I} E_i$ تزریقی (شبه تزریقی) است، اگر و تنها اگر برای هر $i\in I$، E_i تزریقی (شبه تزریقی) باشد.

اثبات: مشابه حالت تصویری است.

مدولهای نوتری و آرتینی

تعریف ۱-۱۷: فرض کنید M یک R- مدول راست باشد. M را یک مدول نوتری گویند هرگاه هر زنجیر صعودی $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ از زیر مدول های M متوقف گردد. یعنی $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $M_n = M_{n+i}$ برای هر $i \in \mathbb{N}$.
مشابها R- مدول M را آرتینی گویند هرگاه هر زنجیر نزولی $M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$ از زیرمدولهای M متوقف گردد.

قضیه ۱-۱۸: فرض کنید M یک R- مدول و $N \le M$، آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱. M نوتری (آرتینی) است.

۲. N و M/N، نوتری (آرتینی) هستند.

اثبات: برای حالت نوتری ثابت می کنیم و حالت آرتینی مشابها ثابت خواهد شد.

$2 \Rightarrow 1$: بدیهی است.

$1 \Rightarrow 2$: فرض کنید $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول های M باشد. در این صورت

$N \cap M_1 \subseteq N \cap M_2 \subseteq ...$ و $(M_1+N)/N \subseteq (M_2+N)/N \subseteq ...$ زنجیرهای صعودی از به ترتیب N و M/N می باشند. در نتیجه $r,k \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری که $N \cap M_r = N \cap M_{r+i}$ و $(M_k+N)/N = (M_{k+i}+N)/N$ برای هر $i \in \mathbb{N}$.

حال فرض کنید $n = \max\{r,k\}$، در این صورت برای هر $m \ge n$ داریم $N \cap M_n = N \cap M_m$ و $N + M_n = N + M_m$. بنابراین

$$M_m = M_m \cap (M_m + N) = M_m \cap (M_n + N) = M_n + M_m \cap N = M_n + M_n \cap N = M_n$$

یعنی M نوتری است.

تعریف ۱-۱۹: دنباله $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ از R- مدول ها را کامل گویند، هرگاه f یک به یک، g پوشا و $\mathrm{Im}(f) = Ker(g)$.

همچنین دنباله فوق را شکافتنی نامند هرگاه $M \cong L \oplus N$.

نتیجه ۱-۲۰: فرض کنید $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ یک دنباله کامل از R- مدول ها باشد. در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر N و L نوتری (آرتینی) باشند.

اثبات: طبق قضیه ۱-۱۸ بدیهی است.

گزاره ۱-۲۱: فرض کنید M_1 و M_2 و ... و M_n، R- مدول هایی باشند. آنگاه $\oplus^n_{i=1} M_i$ نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، M_i نوتری (آرتینی) باشد.

اثبات: با استقرا روی n و در نظر گرفتن دنباله کامل

$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \oplus^n_{i=1} M_i \longrightarrow \oplus^n_{i=2}$، حکم به راحتی نتیجه می شود.

جمعوند مستقیم و خودتوانها

تعریف ۱-۲۲: زیر مدول N از R- مدول M را یک جمعوند مستقیم گویند هرگاه زیرمدول N' از M موجود باشد به طوری که $M = N \oplus N'$.

لم ۱-۲۳: فرض کنید $f: M \longrightarrow N$ و $g: N \longrightarrow M$ دو همریختی R- مدولی باشند، به طوری که $fog = id_N$. در این صورت $M = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

اثبات: به راحتی دیده خواهد شد که f پوشا و g یک به یک است. اگر $x = g(y) \in Ker(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ آنگاه $0 = f(x) = fg(y) = y$ و بنابراین $x = g(0) = 0$.

حال اگر $x \in M$ آنگاه $x = (x - gf(x)) + gf(x) \in Ker(f) + \mathrm{Im}(g)$. بنابراین $M = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

لم ۱-۲۴: فرض کنید $M = K \oplus K'$ و P_K تصویر کانونی روی K باشد. در این صورت $e_K : M \longrightarrow M$ با ضابطه $x \mapsto P_K(x)$، یک درونریختی خودتوان از M می باشد.

اثبات: بدیهی است.

لم ۱-۲۵: فرض کنید e یک عنصر خودتوان از $End(M)$ (حلقه درونریختی های M) باشد. آنگاه $1-e$ یک عنصر خودتوان از $End(M)$ می باشد، به طوریکه

$$Ker(e) = \{x \in M \;|x = x(1-e)\} = \mathrm{Im}(1-e)$$

$$\mathrm{Im}(e) = \{x \in M \;|x = xe\} = Ker(1-e)$$

و نیز خواهیم داشت $M = Me \oplus M(1-e)$. در واقع بازای هر عنصر خودتوان از حلقه درونریختی های M، می توان یک جمعوند مستقیم از M، وابسته به آن یافت.

اثبات: چون $e^2 = e$، در نتیجه به وضوح $(1-e)^2 = 1-e$. از طرفی $e(1-e) = e(1-e) = 0$، بنابراین $\mathrm{Im}(e) \subseteq \{x \in M \;|x = xe\} \subseteq Ker(1-e)$ و