بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید.

سپاس

الهی به شناخت تو زندگانیم ،به نصرت تو شادانیم ، به کرامت تو نازانیم ، به عزت تو عزیزانیم .
الهی اینهمه شادی از تو بهره ماست. به آن صفت که تویی از تو خود جز این نه رواست.
به خود می بالم که بهترین خلق راهنمایان منند.
آنچه را امروز شاکرم، اینهمه عطاست:

- قدردانم زحمات و راهنمایی‌ها ی بی دریغ و ارزشمند استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر جواد لالی و سپاسدار تعلیمات و ارشادات ایشان که با عنایت و حسن توجه، صبورانه همپای جستجو هایم ، مرا راهنما بودند.

- تقدیر و سپاس حضور ارزشمند و مغتنم اساتید بزرگوار، گرانقدر و فهیم جناب آقای دکتر امیر خسروی و جناب آقای دکتر مجید اسحاقی گرجی که زحمت داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند.

- هر نفس، شاکرم وجود مادر و پدری دانا، مومن و مهربان را که به فضل تو، زندگانیم را به شناخت تو نورانی نموده اند و خواهرانم که می شناسمشان به دوستی و یگانگی.

سیما شهریاری
شهریور ۱۳۹۱

دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

میانگین‌پذیر ضعیف تقریبی، اشتقاق و آرنز منظم جبرهای سگال

تدوین

سیما شهریاری

استاد راهنما

دکتر جواد لالی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

اخیراً، مطالعه‌ای بر زیر جبرهای معینی از جبرهای گروهی $L^1(G)$ انجام شده است؛ این زیر جبرها جبرهای سگال هستند، برای مثال، به ازای گروه فشرده‌ای مانند G، $S(G)$ می‌تواند یکی از جبرهای سگالی باشد که وجود طبیعی آنها عبارتند از $(C(G),*)$، $(L^p(G),*)$ که، $1 \leq p \leq \infty$ یا $(A(G),*)$، که در آن $*$، نمادی برای ضرب پیچش است. در طول این مسیر، رده‌های مختلفی از جبرهای سگال مورد بررسی قرار می‌گیرد و اشتقاق‌ها و ضربگرهایی از جبر سگالی به‌توی خودش و یا به‌توی دوگان مدول‌های آن و یا به‌توی X که وجود X به صورت طبیعی یک $S(G)$ـمدول باشد، مشخص می‌شود. در سال ۲۰۰۰، دیلز و پاندی ثابت کردند که به ازای هر گروه آبلی موضعاً فشرده G و $p \in [1,\infty]$ ، $S_p(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

در این پایان‌نامه، کارهای قهرمانی و لائو را مورد بررسی قرارخواهیم داد. آنها ثابت کرده‌اند که جبر سگال متقارن $S(G)$، تقریباً میانگین‌پذیر ضعیف است در صورتی که تنها فرض کنیم G یک SINـگروه یا یک گروه میانگین‌پذیر باشد. همچنین آنها شرایط لازم برای اینکه $S(G)$ منظم‌آرنز باشد به دست آوردند. در پایان، آنها شرط لازم و کافی برای اینکه $S(G)$ یک ایده‌آل در فضای دوگان دوم آن باشد نیز پیدا کردند.

انگیزه ما در خاصیت‌های جبرهای سگال ناشی از مطالعه ما از جبر فوریه‌ـلبگ $\mathcal{L}A(G)$ است. این ثابت شده است که، با فرض تک مدولی بودن G، $\mathcal{L}A(G)$ منظم‌آرنز است اگر و فقط اگر G فشرده باشد و برای گروه موضعاً فشرده G، جبر فوریه‌ـلبگ $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب نقطه‌ای منظم‌آرنز است اگر و فقط اگر G گسسته باشد.

واژه‌های کلیدی: جبر گروهی، میانگین‌پذیری، اشتقاق، ضربگر، منظم‌آرنز، نظریه دوگانی، مدول‌های باناخ.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 43A20، 43A22، 46A20، 46H25.

مقدمه

درمقاله [۹]"قهرمانی"[۱] و" لائو"[۲]، اشتقاق‌ها، میانگین‌پذیر ضعیف، منظم‌آرنز[۳] و برخی از رده‌های جبرهای سگال روی گروه‌های موضعاً فشرده را مورد مطالعه قرار می‌دهند و در حالت خاص نشان می‌دهند که هر جبر سگال متقارن روی SINـگروه میانگین‌پذیر، تقریباً میانگین‌پذیر ضعیف است. همچنین، جبر فوریه‌ـلبگ [۴] را معرفی می کنند و در مقاله [۸]، که این پایان‌نامه بر اساس آن نوشته شده است، مطالعه اشتقاق‌ها، میانگین‌پذیر ضعیف و منظم‌آرنز روی جبرهای سگال را ادامه می دهند.

این پایان‌نامه شامل ۶ فصل است. در فصل اول، تعاریف و قضیه‌هایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، بیان می‌کنیم. در فصل دوم، جبر سگال را تعریف می‌کنیم و به بررسی خواص و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. مثلاً، نشان می‌دهیم هر جبر سگال متقارن برSIN ـگروه G، تقریباً میانگین پذیر ضعیف است.

در فصل سوم، ابتدا مفهوم ضربگر را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر G یک گروه میانگین‌پذیر و $S(G)$ یک جبر سگال متقارن باشد، در این صورت به ازای هر $L^1(G)$ـ دومدول باناخ X، اشتقاق‌های پیوسته از $S(G)$ به توی X تقریباً داخلی هستند و همچنین اشتقاق‌های پیوسته از $S(G)$ به توی X^* به وسیله مرکز سازهای دوگانه تعریف می‌کنیم.

در فصل چهارم، فرض می‌کنیم $\mathrm{Mul}_\ell(A,X)$ ، فضای همه ضربگرهای چپ پیوسته از A به توی X باشد که اگر اندیس r را جایگزین اندیس ℓ کنیم بیانگر ضربگرهای راست است. سپس با بیان چندین قضیه، به شناسایی اشتقاق‌ها از روی ضربگرها می‌پردازیم.

در فصل پنجم، مفهوم منظم‌آرنز را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که جبر فوریه‌ـلبگ از گروه گسسته G، با ضرب پیچش منظم‌آرنز است و همچنین از گروه فشرده G، با ضرب نقطه‌ای منظم‌آرنز است؛ که حالت عکس آن در مقاله [۹] به صورت دو سوال باز مطرح شده که در مقاله [۸] به این دو سوال پاسخ داده شده و ما در این فصل به بررسی آن می‌پردازیم، به عبارت دیگر نشان داده می‌شود که با فرض تک مدولی بودن G، $\mathcal{L}A(G)$ منظم‌آرنز است اگر و فقط اگرG فشرده باشد. همچنین، $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب نقطه‌ای منظم‌آرنز است اگر و فقط اگر G گسسته باشد.

[۱] Ghahramani

[۲] Lau

[۳] Arens regularity

[۴] Lebesgue-Fourier

در فصل ششم، به بررسی شرایط ایده‌آل بودن جبر فوریه–لبگ در دوگان دوم آن می‌پردازیم و نشان داده می‌شود که با فرض تک مدولی بودن گروه G، جبر فوریه-لبگ $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب پیچش یک ایده‌آل در دوگان دوم خودش است اگر و فقط اگر G فشرده باشد و برای گروه موضعاً فشرده G، جبر فوریه-لبگ $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب نقطه‌ای یک ایده‌آل در دوگان دوم آن است اگر و فقط اگر G گسسته باشد.

کلیه‌ی مطالب ارائه شده در این پایان نامه برگرفته از دو مقاله‌ی زیر است:

- F. Ghahramani and A.T.M Lau, *Approximate weak amenability, derivations and Arens regularity of Segal algebras*, Studia Mathematica (2) (2005) ,169-205.
- F. Ghahramani and A.T.M Lau, *Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identities*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 133 (2002), 357-371.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدماتی از آنالیز هارمونیک و آنالیز تابعی

در این فصل که شامل پنج بخش است، ابتدا مفاهیمی چون جبرهای باناخ، عملگرهای خطی، توپولوژی، فضای اندازه، اشتقاق و میانگین‌پذیری را تعریف می‌کنیم. سپس قضیه‌هایی را که در طول این پایان‌نامه به آنها نیاز است، بیان می‌کنیم.

۱.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ باشد، که در آن، $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا میدان اعداد مختلط است .*

(الف) یک نیم نرم بر فضای برداری X تابعی حقیقی مانند P بر x است به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{K}$ داشته باشیم :

(i) $P(x+y) \leq P(x) + p(y)$؛

(ii) $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

و به علاوه، اگر $P(x) = ۰$ تساوی $X = ۰$ را ایجاب نماید آنگاه P را یک نرم نامند.

(ب) فضای برداری X را جبر گوییم، اگر یک عمل ضرب به صورت $X \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(x, y) \longmapsto xy$ موجود باشد که به ازای هر x, y, z از X و هر α از $\mathbb{K}$ در روابط زیر صدق کند:

(i) $x(yz) = (xy)z$؛

(ii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$؛

(iii) $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$.

(ج) نگاشتی مانند $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *را* ***نرم جبری*** *بر X گوییم در صورتی که*

(i) زوج مرتب $(X; \|\cdot\|)$ *یک فضای نرم دار روی Kباشد ؛*

(ii) به ازای هر x, y *از* X، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

حال $(X, \|\cdot\|)$ یک **جبر نرم‌دار** است که در آن X یک جبر ناصفر و $\|\cdot\|$ نرم جبری تعریف شده بر X است.

یک جبرنرم‌دار، **جبر باناخ** [1]است در صورتی که با این نرم یک فضای کامل باشد؛ یعنی، هر دنباله کوشی به عضوی از این فضا همگرا باشد. جبر باناخ X **یکدار** است در صورتی که عضوی مانند e موجود باشد به طوری که $\|e\| = ۱$ و به ازای هر $x \in X$ ، $xe = ex = x$. به عنوان مثال، $X = (C(k), |\cdot|_k)$، فضای باناخ تمام توابع پیوسته مختلط بر فضای هاسدورف فشرده ناتهی K، با ضرب نقطه‌ای و نرم یکنواخت، جبر باناخ جابه‌جایی یکدار است که همانی آن تابع ثابت ۱ است .

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $B(X, \mathbb{K})$ گردایه همه تابعک‌های خطی پیوسته از X به توی $\mathbb{K}$ باشد. در این صورت $B(X, \mathbb{K})$ را دوگان X می‌نامیم و آن را با نماد X^* نمایش می‌دهیم و $X^{**} = B(X^*, \mathbb{K})$ دوگان دوم است و به همین ترتیب X^{***} و ... تعریف می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید A یک جبر، X یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ باشد. X را همراه با نگاشت دوخطی $A \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(a.x) \longmapsto a.x$،* ***A−مدول چپ*** *می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a \in A$، $b \in A$ و هر $x \in X$ ،*

$$a.(b.x) = ab.x.$$

همچنین، X را همراه با نگاشت دوخطی $A \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(a.x) \longmapsto x.a$، ***Aـمدول راست*** *می‌نامیم هرگاه به ازای هر $b \in A$، $a \in A$ و هر $x \in X$،*

$$(x.a).b = x.ab.$$

*و فضای خطی X را A ـ**دو مدول** می‌نامیم در صورتی که هم Aـمدول راست و هم A ـمدول چپ*

[1] Banach

باشد و به علاوه به ازای هر $a \in A$،$b \in A$ و هر $x \in X$ ،

$$a.(x.b) = (a.x).b.$$

واضح است که فضای خطی$\mathbb{K}$ یک $\mathbb{K}$ـمدول است .

به عنوان مثال، جبرA یک Aـمدول است و همچنین، هر ایده‌آل چپ درA یک Aـمدول چپ است. اگر A یک زیر جبر از Bباشد آنگاهB یک A ـمدول است.

اگر X یک Aـمدول باناخ باشد آنگاه فضای دوگان X^* از X با عمل تعریف شده در زیر یک Aـمدول باناخ است.

به ازای هر$a \in A$ ، هر$x \in X$ و هر $x^* \in X^*$،

$$.\langle a.x^*, x\rangle = \langle x^*, x.a\rangle \quad , \quad \langle x^*.a, x\rangle = \langle x^*, a.x\rangle$$

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد.*

الف) *فضای تمام توابع مختلط پیوسته روی G را $C(G)$ می‌نامیم.*

ب) *فضای تمام توابع مختلط کراندار پیوسته رویG با نرم سوپریمم را $C_b(G)$ می‌نامیم که یک فضای نرم‌دار است.*

ج) *زیر فضایی از $C_b(G)$ متشکل از توابعی که در بی نهایت به صفر میل می‌کنند، $C_\circ(G)$ می‌نامیم؛ به عبارت دیگر، $C_\circ(G)$ متشکل از توابعی مانند f است که به ازای هر $\varepsilon > \circ$، مجموعه فشرده‌ای مانند K موجود باشد که به ازای هرx اگر $x \in K^c$ آنگاه $|f(x)| < \varepsilon$.*

د) *زیرفضایی از $C_\circ(G)$ عبارت است از توابعی با تکیه‌گاه فشرده که آن را با نماد $C_c(G)$ نشان می‌دهیم و این زیرفضا در $C_\circ(G)$ چگال است؛ به عبارت دیگر،*

$$C_c(G) = \{f \in C(G) : \text{فشرده است } \operatorname{supp} f\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر نرم دار باشد. تور $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq A$، **همانی تقریبی** چپ (راست) A است هرگاه به ازای هر$a \in A$، $\{e_\alpha a\}$ $(\{ae_\alpha\})$ در نرم همگرا به a باشد؛ یعنی، $\|e_\alpha a - a\| \to \circ$ $(\|ae_\alpha - a\| \to \circ)$.*

*همانی تقریبی دوطرفه، توری است که همانی تقریبی راست وچپ باشد. همانی تقریبی $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq A$ راکراندار می‌نامیم اگر مجموعه $\{\|e_\alpha\| : \alpha \in A\}$ کراندار باشد. همانی تقریبی $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ **مرکزی** است اگر $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset Z(A)$ که در آن $Z(A) = \{a \in A : ab = ba(b \in A)\}$.*

قضیه ۱.۱.۵. [16,Corollary 32.26] *(تجزیه ی کوهن [۲]) فرض کنیم A یک جبر باناخ با همانی تفریبی چپ کراندار باشد، در این صورت، برای هر $x \in A$، عناصر a, b در A وجود دارند به طوری که $x = ab$؛ به عبارت دیگر $A = A^{۲}$.*

۱.۲ عملگرهای خطی

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند. تابع $T : X \to Y$ را* **عملگر خطی** *گوییم هرگاه به ازای هر x, y از X و هر α, β از $\mathbb{K}$، $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.*

اگر X و Y فضاهای نرم‌دار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، در این صورت نرم T که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود، **نرم عملگری** *نامیده می‌شود.*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\}.$$

عملگر T *را* **کراندار** *گوییم هرگاه $\| T \| < \infty$.*

اگر $T : X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد.آنگاه **عملگر الحاقی** *آن عبارت است از $T^* : Y^* \to X^*$ که به ازای هر $f \in Y^*$ و هر $x \in X$ با ضابطه $T^*(f)(x) = f(Tx)$ تعریف می شود. اگر $T(x)$ را با نماد $\langle T, x\rangle$ نمایش دهیم، داریم $\langle f, T(x)\rangle = \langle T^*(f), x\rangle$. عملگر T بین دوفضای باناخ را یک* **عملگر فشرده** *می‌نامیم هرگاه $\overline{T(B)}$ یک زیر مجموعه فشرده Y باشد که در آن B گوی یکه باز در X است.*

عملگر T فشرده است اگرو تنها اگر هر دنباله ی کراندار $\{x_n\}$ در X شامل زیر دنباله ای مانند $\{x_{n_i}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_i}\}$ در Y همگرا باشد.

قضیه ۱.۲.۲. [22, Theorem 3.6] *(هان ـباناخ [۳]) فرض کنیم A زیر فضایی از فضای نرم‌دار X و f تابعک خطی پیوسته روی A باشد. دراین‌صورت $T \in X^*$ وجود دارد به طوری که روی A، $T = f$ و $\|T\| = \|f\|$.*

[۲] Cohen's factorization

[۳] Hahn-Banach

۳.۱ توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره

تعریف ۱.۳.۱. *توپولوژی تولید شده X^* روی X ، یعنی ضعیف ترین توپولوژی روی X را توپولوژی ضعیف می‌نامیم در صورتی که هر x^* از X^* تحت آن پیوسته باشد و آن را با نماد ω یا $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم.*

توپولوژی تولید شده توسط X روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره می‌نامیم و با نماد ω^* یا $\sigma(X^*, X)$ نمایش داده می‌شودکه به ازای هر $x \in X$ یک تابعک خطی مانند $f_x = \hat{x}$ بر X^* با ضابطه $\langle f_x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$ القا می‌کند که تحت این توپولوژی f_x پیوسته است.

تور $\{x_\alpha\}$ با توپولوژی ضعیف به x در X همگرا است اگرو فقط اگر به ازای هر $x^* \in X^*$ داشته باشیم، $\lim_\alpha \langle x^*, x_\alpha \rangle = \langle x^*, x \rangle$؛ همچنین،

تور $\{x^*_\alpha\}$ در X^* با توپولوژی ضعیف ستاره به x^* همگرا است در صورتی که به ازای هر x از X، داشته باشیم، $\lim \langle x^*_\alpha, x \rangle = \langle x^*, x \rangle$

قضیه ۲.۳.۱. *[3,Theorem A.3.29] (گلدشتاین [۴]) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. به ازای هر $\varphi \in X^{**}$ تور (x_α) در X موجود است که به ازای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|\varphi\|$ و $x_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi$. این مطلب به این معنی است که X در X^{**} با توپولوژی ضعیف ستاره، چگال می‌باشد.*

قضیه ۳.۳.۱. *[22,Theorem 3.15] (باناخ- آل اوغلو [۵]) اگر V یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و*

$$K = \{\Lambda \in X^* : \ |\Lambda x| \leq ۱, \ x \in V\}.$$

در این‌صورت K، w^*- فشرده است.

تعریف ۴.۳.۱. *فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. $B(H)$ مجموعه عملگرهای خطی کراندار از H به توی H است. توپولوژی‌های روی $B(H)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

(الف) توپولوژی نرم (یکنواخت) : دنباله ی T_n با توپولوژی نرم به T، همگرا است در صورتی که

$$\|T - T_n\| \longrightarrow ۰$$

[۴] Goldstine

[۵] Banach- Alaoglu

(ب) *توپولوژی عملگر قوی (SOT) :فرض کنیم T_n یک تور در $B(H)$ باشد، در این صورت T_n تحت توپولوژی عملگر قوی به T همگرا است. در صورتی که به ازای هر $x \in H$، $\|(T-T_n)x\| \longrightarrow 0$.*

(ج) *توپولوژی عملگر ضعیف (WOT) :فرض کنیم (T_n) یک تور در $B(H)$ باشد.در این صورت (T_n) تحت توپولوژی عملگر ضعیف به T همگرا است در صورتی که به ازای هر $x \in H$ و $y \in H$، $\langle (T-T_n)x, y\rangle \longrightarrow 0$.*

تعریف ۱.۳.۵. *توپولوژی عملگر ضعیف ستاره روی $B(X, Y^*)$ توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم نرم‌های $\{P_{x,y} : x \in X, y \in Y\}$ است که در آن*

$$P_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle| \qquad (T \in B(X, Y^*))$$

و این توپولوژی را با نماد WO^* نمایش می دهیم.

قضیه ۱.۳.۶. *[3,theorem A.3.35] فرض کنیم X, Y فضاهای باناخ باشند در این صورت گوی یکه $B(X, Y^*)$ با توپولوژی WO^* فشرده است.*

۱.۴ فضای اندازه

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و Ω گردایه ناتهی از زیر مجموعه‌های آن باشد. Ω را یک σ-جبر از مجموعه‌ها می‌نامیم. در صورتی که در روابط زیر صدق کند :*

(i) $X \in \Omega$؛

(ii) اگر $A \in \Omega$ آنگاه $A^c \in \Omega$ ؛

(iii) اگر به ازای هر n که $n \in \mathbb{N}$، $A_n \in \Omega$، آنگاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$.

تعریف ۱.۴.۲.*(الف) نگاشت $\mu : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ را یک **اندازه(مثبت)** می‌نامیم در صورتی که*

(i) $\mu(\phi) = 0$؛

(ii) اگر A_n یک دنباله دو به دو مجزا از اعضای Ω باشد آنگاه $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

و (X,Ω,μ) را *فضای اندازه* می نامیم. هرگاه نگاشت μ مختلط مقدار باشد آن را ***اندازه مختلط*** گوییم.

ب) فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد. اعضا کوچکترین σ-جبر شامل مجموعه‌های باز در X را **مجموعه بورل** می‌نامیم. گردایه همه مجموعه های بورل را با نماد $\mathfrak{B}$ نشان می‌دهیم .

ج) اندازه $\mu:\Omega\longrightarrow[0,\infty]$ را روی σ-جبر Ω که شامل همه مجموعه‌های بورل است ***اندازه بورل*** می‌نامیم.

د) اندازه بورل μ را **موضعاً متناهی** می‌نامیم در صورتی که هر نقطه $x\in X$ دارای همسایگی مانند U باشد به طوری که $\mu(U)<\infty$.

ه) فرض کنیم μ اندازه بورل موضعاً متناهی روی مجموعه‌های بورل باشد. دراین صورت μ را **اندازه رادون** [۶] می‌نامیم در صورتی که

(i) به ازای هر $A\in\mathcal{B}$،

$$\mu(A)=\inf\{\mu(U):U\in\tau, A\subseteq U\}$$

(ii) به ازای هر $A\in\mathcal{B}$ که $\mu(A)<\infty$،

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):\ K\subseteq A\text{، فشرده است}\}$$

به عنوان مثال، اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$، اندازه رادون است .

و) فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد . **اندازه هار** [۷] چپ (راست) روی G، اندازه رادون ناصفر μ روی G است به طوری که به ازای هر مجموعه بورل $E\subset G$ و هر $x\in G$،

$$\mu(xE)=\mu(E)\qquad(\mu(Ex)=\mu(E))$$

قضیه ۳.۴.۱. *[6,Theorem 10 .2]* هر گروه موضعاً فشرده دارای یک اندازه هار چپ منحصر به فرد است. یعنی؛ اگر λ اندازه هار چپ باشد و μ اندازه ی رادون پایای چپ دیگری باشد. آنگاه $c>0$ وجود دارد که $\mu=c\lambda$.

---

[۶] Radon

[۷] Haar

فرض کنیم λ اندازه هار چپ روی گروه موضعاً فشرده G است. به ازای هر $x \in G$ تعریف می‌کنیم $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$. واضح است که λ_x یک اندازه هار چپ است. زیرا،

$$\lambda_x(yE) = \lambda((yE)x) = \lambda(y(Ex)) = \lambda(Ex) = \lambda_x(E)$$

بنابر یکتایی اندازه هار $\Delta(x) > 0$ وجود دارد به طوری که $\lambda_x = (\Delta(x))\lambda$ و $\Delta(x)$ مستقل از اندازه اولیه λ است، زیرا، اگر فرض کنیم μ اندازه هار چپ دیگری باشد، داریم، $\mu_x = (\Delta'(x))\mu$. بنابر یکتایی اندازه هار، می‌توان نوشت

$$\Delta'(x) = \frac{\mu_x(E)}{\mu(Ex)} = \frac{c\lambda_x(E)}{c\lambda(Ex)} = \Delta(x)$$

بنابراین، $\Delta(x)$ مستقل از اندازه اولیه λ است. حال نگاشت $\Delta : G \longrightarrow (0, \infty)$ را **تابع مدولار** می‌نامیم. اگر به ازای هر $x \in X$، $\Delta(x) = 1$ ، آنگاه G را **تک مدولی**(تک هنگی) می‌نامیم. این بدین معنی است که اندازه هار چپ و اندازه هار راست با هم برابر هستند. به عنوان مثال، گروه‌های آبلی، گسسته و فشرده تک مدولی هستند.

فضای همه اندازه‌های رادون مختلط روی G را با $M(G)$ نمایش می دهیم که برای هر $\mu \in M(G)$، $\|\mu\| = |\mu|(G)$. که با این نرم $M(G)$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۴.۴. نگاشت $M(G) \times M(G) \longrightarrow M(G)$ *باضابطه* $(\mu, \nu) \longrightarrow \mu * \nu$ *را* **پیچش** μ, ν *می‌نامیم. در صورتی که به ازای هر* $\mu, \nu \in M(G)$ *و هر* $f \in C_0(G)$ *داشته باشیم :*

$$\langle f, \mu * \nu \rangle = \int_G f d\mu * \nu = \int_G \int_G f(xy) d\mu(x) d\nu(y) \quad (x, y \in G)$$

در این صورت، $(M(G), *)$ *یک جبر باناخ واحد دار است که واحد آن اندازه دیراک* δ_e*، است که* e *عضو همانی* G *است و* $L^1(G)$ *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که ایده‌آلی از* $M(G)$ *است.*

$$L^1(G) = \{f | f : G \longrightarrow \mathbb{C}, \int_G |f| d\lambda < \infty, \ f \text{ اندازه پذیر است}\}$$

$$= \{\mu \in M(G) : \ \mu << \lambda \text{، } \lambda \text{ اندازه هار } G \text{ است}\}$$

که تساوی دوم را بر اساس قضیه رادون-نیکودیم [8] *در [۳]، می‌توان نوشت. و برای هر* $f, g \in L^1(G)$ *داریم :*

$$f * g(x) = \int f(y) g(y^{-1}x) d\lambda(y)$$

[8]Radon-Nikodiym

جبر باناخ $(M(G),*)$ راجبر اندازها و جبر باناخ $(L^1(G),*)$ را جبر گروهی گوییم. که انتگرال تعریف شده $f*g(x)$ را می توان به صورت‌های زیر نوشت.

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int f(y)g(y^{-1}x)dy \\ &= \int f(xy)g(y^{-1})dy \\ &= \int f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})dy \\ &= \int f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})dy \end{aligned} \tag{1}$$

گزاره ۵.۴.۱. [6,proposition 2.39] فرض کنیم $1 \leq p \leq \infty$، $f \in L^1(G)$، $g \in L^p(G)$ در این صورت

الف) به ازای تقریباً هر x انتگرالهای تعریف شده در رابطه (۱) همگرا است و همچنین داریم $f*g \in L^p(G)$ و $\| f*g \|_p \leq \| f \|_1 \| g \|_p$.

ب) اگر G تک مدولی باشد آنگاه برای $g*f$ نیز روابط فوق برقرار است .

ج) اگر G تک مدولی نباشد ولی تکیه‌گاه f فشرده باشد، همچنان خواهیم داشت، $g*f \in L^p(G)$.

د) اگر $p=\infty$ ، آنگاه $f*g$ پیوسته و تحت شرایط (ب) یا (ج) ، $g*f$ نیز پیوسته است .

گزاره ۶.۴.۱. [6,Proposition 2.40] فرض کنیم G تک مدولی باشد. اگر $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$ به طوری که $q<\infty$، $1<p$، $p^{-1}+q^{-1}=1$ آنگاه $f \in C_0(G)$ و $\| f*g \|_\infty \leq \| f \|_p \| g \|_q$.

قضیه ۷.۴.۱. [21,Theorem 6.19] (نمایش ریس[9]) اگر X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد، آنگاه هر تابعک خطی کراندار T بر $C_0(X)$ با یک اندازه بورل مختلط منظم منحصر به فرد مانند μ متناظر است؛ یعنی،

$$Tf = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_0(X)).$$

و $\|T\| = \|\mu\|$.

قضیه ۸.۴.۱. [16,Theorem 35.5] (وندلز[10]) فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و T یک عملگر خطی کراندار از $L^1(G)$ به توی خودش باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارز هستند.

---

[9] Riesz Representation

[10] Wendel's

الف) به ازای هر$f \in L^1(G)$، اندازه $\mu \in M(G)$ وجود دارد به طوری که $T(f) = \mu * f$.

ب) به ازای هر $f \in L^1(G)$ و $a \in G$ ، $T(f_a) = T(f)_a$.

ج) به ازای هر$f, g \in L^1(G)$ ، $T(f * g) = T(f) * g$.

د) به ازای هر$\nu \in M(G)$ ، $T(f * \nu) = T(f) * \nu$.

تعریف ۹.۴.۱. *اگرH یک فضای هیلبرت باشد.عملگر$T \in B(H)$ را* ***یکانی*** *گوییم در صورتی که $T^*T = TT^* = I$. مجموعه تمام عملگرهای یکانی روی H را با $U(H)$ نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۱۰.۴.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و H یک فضای هیلبرت باشد.* ***نمایش یکانی*** *G عبارت است از $\pi : G \longrightarrow U(H_\pi)$ به‌طوری‌که $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ (یعنی π همومورفیسم گروهی است) و $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$؛ علاوه بر این تحت توپولوژی SoT پیوسته باشد.*
نمایش $\pi_L : G \longrightarrow U(L^2(G, \lambda))$ که در آن λ یک اندازه هار چپ است، ***نمایش منظم چپ*** *نامیم هرگاه*

$$[\pi_L(x)]f(y) = f(x^{-1}y) = L_x f(y)$$

و به همین ترتیب ***نمایش منظم راست*** *به دو صورت زیر تعریف می شود.*

$$\pi_R : G \longrightarrow U(L^2(G, \rho))$$
$$[\pi_R(x)]f(y) = f(yx) = R_x f(y)$$

که در آن ρ اندازه هار راست بر G است و

$$\tilde{\pi}_R : G \to U(L^2(G, \lambda))$$
$$[\tilde{\pi}_R(x)f](y) = \Delta(x)^{\frac{1}{2}} f(yx) = \Delta(x)^{\frac{1}{2}} R_x f(y)$$

که در آن λ اندازه هار چپ است.

تعریف ۱۱.۴.۱. *فرض کنیم G گروه موضعاً فشرده باشد. زیر مجموعه K از G پایا است در صورتی که به ازای هر $a \in G$ ،*

$$a.K = K.a$$

تعریف ۱۲.۴.۱. *گروه G را IN-گروه [۱۱] می‌نامیم درصورتی که دارای همسایگی پایای فشرده از عضو همانی باشد. گروه G را SIN-گروه [۱۲] می نامیم در صورتی دارای پایه‌ای برای همسایگی همانی e شامل مجموعه‌های فشرده پایا باشد. توجه کنید که برای گروه‌های موضعاً فشرده آبلی، گروه‌های فشرده، گروه‌های گسسته و گروه‌های موضعاً فشرده تک مدولی که به ترتیب با نمادهای $[A]$، $[D]$، $[K]$،$[Um]$ نمایش می‌دهیم، رابطه زیر برقرار است .*

$$[A] \cup [K] \cup [D] \subseteq [SIN] \subseteq [IN] \subseteq [Um].$$

تمام SIN-گروه‌ها تک مدولی هستند. برای بررسی این مطلب فرض می‌کنیم G یک گروه موضعاً فشرده،SIN -گروه و λ اندازه هار چپ آن باشد در این صورت همسایگی‌های همانی شامل مجموعه‌های فشرده پایا و جود دارد که در شرط $xUx^{-1} = U$ صدق می‌کند. حال یک همسایگی فشرده از همانی مانند U در نظر می‌گیریم که $\lambda(U) \neq 0$. در این صورت، داریم $xUx^{-1} = U$. حال λ را روی آن اثر می‌دهیم $\lambda(xUx^{-1}) = \lambda(U)$. بنابراین،

$$\Delta(x^{-1})\lambda(U) = \lambda(Ux^{-1}) = \lambda(U) \qquad (x \in G)$$

در نتیجه $\Delta(x^{-1}) = 1(x \in G)$ پس به ازای هر $x \in G$، داریم$\Delta(x) = 1$ در نتیجه SIN-گروه G، تک مدولی است.

جبر$L^1(G)$ دارای همانی تقریبی مرکزی است اگرو فقط اگر G، SIN-گروه باشد. برای توضیح این مطلب به دو قضیه زیر نیاز داریم.

قضیه ۱۳.۴.۱. *[3,Proposition 2.9.14] فرض کنیم$(A, \|\cdot\|)$ یک جبر نرم‌دار باشد و $m \geq 1$. اگر برای هر$a_1, ..., a_n \in A$ و $\varepsilon > 0$ ، $u \in A$، موجود باشد به قسمی که برای هر $j \in \mathbb{N}_n$، $\|a_j - ua_j\| < \varepsilon$ آنگاه A دارای یک همانی تقریبی چپ است و اگر $u \in A$ در شرط $\| u \| \leq m$ صدق کند، آنگاه A یک همانی تقریبی کراندار با کران m دارد .*

قضیه ۱۴.۴.۱. *[18,Theorem 2] اگر $Z^1(G)$ مرکز $L^1(G)$ و $Z^s(G)$ مرکز $S(G)$ باشد، آنگاه $Z^1(G) = \overline{Z^s(G)}^{\|\cdot\|_1}$ ؛ یعنی، $Z^s(G)$ در $Z^1(G)$ با نرم$\|.\|_1$ چگال است .*

حال نشان می‌دهیم که اگر G یک SIN-گروه باشد، آنگاه $L^1(G)$ دارای همانی تقریبی مرکزی است.

[۱۱] Invariant neighborhood

[۱۲] Small invariant neighborhoods