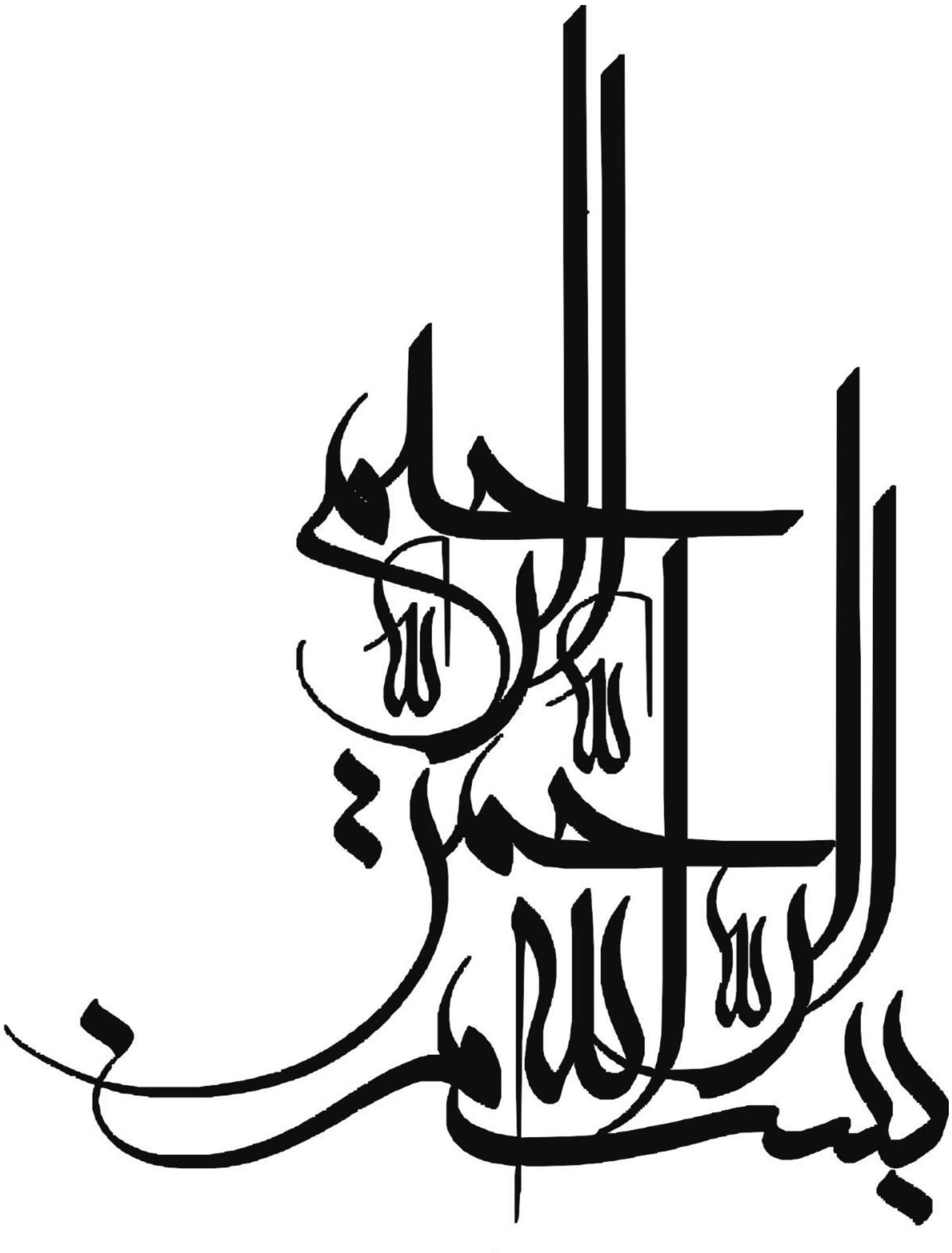
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

مرکز بابل

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی(تحقیق در عملیات)

عنوان پایان نامه:

یک الگوریتم سیمپلکس برای حل مسایل برنامه ریزی کسری قطعه قطعه خطی

نگارش:

حیدر عاقبت بین منفرد

استاد راهنما:

دکتر سیامک فیروزیان

استاد مشاور:

دکتر جواد وحیدی

مهر 1390

تقدیم به

پدر بزرگوار

و

مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

با تقدیر و تشکراز زحمات اساتید گرانقدرم آقایان

دکتر سیامک فیروزیان و دکتر جواد وحیدی

چکیده

در این پایان نامه درباره مسایل برنامه ریزی کسری صحبت می کنیم و یک الگوریتم سیمپلکس برای حل مسایل برنامه ریزی کسری قطعه قطعه خطی ارایه می دهیم.

در فصل 1 کلیتی از مسایل برنامه ریزی خطی را معرفی می کنیم و نکات، تعاریف و احکام پایه ای را بیان می کنیم که در سراسر پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل 2 مسایل برنامه ریزی کسری خطی را مورد توجه قرار می دهیم که در آن، تابع هدف کسری از دو تابع خطی و قیود، خطی می باشند. در فصل 3 درباره برخی مدلهای برنامه ریزی کسری که دارای تابع هدف با ساختار خاص می باشند، بحث می کنیم. در فصل 4 کاربردهای مختلفی از برنامه ریزی کسری را بیان می کنیم. در فصل 5 تعمیمی از روش را برای حل مسایل برنامه ریزی کسری قطعه قطعه خطی ارایه می کنیم و روش واحدی برای حل مسایل برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی کسری خطی و برنامه ریزی قطعه قطعه خطی بیان می کنیم. در سراسر پایان نامه فرض کرده ایم که جوابهای پایه ای شدنی، غیر تبهگن هستند. تباهیدگی می تواند با استفاده از تکنیکهایی مشابه آنچه که در یک الگوریتم سیمپلکس برای مسایل برنامه ریزی قطعه قطعه خطی فورر بیان شده اند، رفع شود.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی کسری، روش سیمپلکس، تابع قطعه قطعه خطی، برنامه ریزی کسری قطعه قطعه خطی.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکلها

عنوان صفحه

فصل اول

کلیات

1-1) برنامه ریزی خطی

در این بخش مسأله برنامه‌ریزی خطی، معرفی می‌شود. برنامه ریزی خطی، یا همان بهینه سازی خطی، روشی در ریاضیات است که به پیدا کردن مقدار کمینه یا بیشینه از یک تابع خطی روی یک چند ضلعی محدب می‌پردازد. این چند ضلعی محدب در حقیقت نمایش نموداری تعدادی محدودیت از نوع نامعادله روی متغیرهای تابع است. بطور خلاصه، برنامه‌ریزی خطی به مسایل تخصیص منابع محدود بین فعالیت‌های رقیب در جهت یافتن راه حل ممکن مربوط می‌شود. به بیان ساده‌تر به وسیله برنامه‌سازی خطی می‌توان بهترین نتیجه (مثلاً بیشترین سود یا کمترین هزینه) را در شرایط خاص و با محدودیت‌های خاص به دست آورد. در برنامه‌ریزی خطی از مدلی ریاضی به منظور تشریح مسأله مورد نظر استفاده می‌شود. کلمه خطی به معنای آن است که تابع هدف و کلیه محدودیت‌های ریاضی این مدل باید توابع خطی باشند.

مسأله حل مجموعه‌ای از نامعادلات خطی از زمان فوریه مطرح بوده‌است. برنامه‌ریزی خطی به عنوان یک مدل ریاضی در زمان جنگ جهانی دوم شکل گرفت تا هزینه‌ها و بازگشت‌های مالی را طوری سامان بخشد که به کاهش هزینه‌های ارتش و افزایش خسارات دشمن بینجامد. این طرح تا سال 1947 سری باقی ماند. پس از جنگ، بسیاری از صنایع به استفاده از آن پرداختند. پایه‌گذاران این حوزه جورج دانتزیگ[۱] ابداع کننده روش سیمپلکس در سال 1947، جان نیومن مطرح‌کننده نظریه دوگانگی در همان سال، و لئونید کانتروویچ ریاضیدان روس که از تکنیک‌های مشابهی پیش از دانتزینگ استفاده کرد و نوبل سال 1957 را برد هستند. دانتزیک در اولین مقاله ای که به چاپ رساند این مسأله را با عنوان «برنامه ریزی با ساختار خطی» ارایه کرد. نخستین بار در سال 1979 خاچیان نشان داد که مسأله برنامه‌ریزی خطی در مرتبه زمانی چندجمله‌ای قابل حل است. اما

[۱] J.Dantzig

پیشرفت اساسی‌تر زمانی حاصل شد که یک روش نقطه داخلی جدید برای حل این مسایل معرفی شد. مثال دانتزینگ برای منتصب کردن هفتاد نفر به هفتاد شغل متمایز کارآمدی برنامه‌ریزی خطی را به نمایش می‌گذارد. توان محاسباتی لازم برای آزمودن همه جایگشت‌های ممکن این مسأله بسیار بالاست. این تعداد از تعداد ذرات موجود در عالم بیشتر است. با این حال، پیدا کردن پاسخ بهینه با تبدیل مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و حل آن با روش سیمپلکس تنها چند لحظه طول می‌کشد.

برنامه‌ریزی خطی با ماکزیمم یا مینیمم‌سازی یک تابع خطی با محدودیت‌هایی که به فرم معادله یا نامعادله خطی هستند سر و کار دارد. بدون شک برنامه ریزی خطی طبیعی ترین مکانیزم برای فرمول بندی انواع متعددی از مسایل با صرف اندکی کوشش محسوب می شود. بطور خلاصه، برنامه‌ریزی خطی با مدل سازی برای سیستم‌های غیر احتمالی و احتمالی دنیای واقعی و همچنین بهترین تصمیم‌گیری ممکن در مورد آنها مربوط می‌گردد.این نوع کاربردها در زمینه مدیریت دولتی، تجارت، مهندسی، اقتصاد و علوم طبیعی و اجتماعی وجود دارند و وجه مشترک همگی آنها، تخصیص منابع محدود است. در چنین موقعیت‌هایی، تحلیل‌های علمی نظیر آنچه که در تحقیق در عملیات انجام می‌گیرد، میزان آگاهی از وضعیت مورد نظر را به طرز جامعی افزایش می‌دهد. هر مسأله برنامه ریزی خطی همان طور که از نامش پیداست به وسیله توابعی خطی از مجهولها توصیف می شود. هدف به صورت تابعی خطی از مجهولهاست و قیود به شکل معادله ها یا نامعادله های خطی بر حسب مجهول ها می باشند. می‌توان گفت حدود یک‌چهارم کل محاسبات علمی که بر روی رایانه انجام گرفته‌است به برنامه‌ریزی خطی و مشتقات آن مربوط می‌شود [32]. مراحل بررسی یک مسأله با روش‌های تحقیق در عملیات به شرح زیر است:

الف) ساختن مدلی ریاضی برای وضعیت مورد نظر در دنیای واقعی، که این امر مستلزم نگرش جامع سیستم است.

ب) شناخت ساختار جواب این مسایل و توسعه رویه‌ای نظام‌گرا برای بدست آوردن آنها.

ج) پیدا کردن یک جواب، و در صورت لزوم توسعه نظریه ریاضی مربوط به آن، که مقدار بهینه را بر اساس معیار مطلوبیت سیستم بدست دهد.

1-1-1) مسأله برنامه ریزی خطی:

یک مسأله برنامه ریزی خطی به فرم زیر است:

$$\min \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} \text{S.t}: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای تصمیم گیری مسأله هستند که باید با حل مسأله معلوم شوند (برای نمونه x_j می‌تواند بیانگر تعداد محصول j ام یا زمان تولید کار j ام باشد). لازم به توضیح است که متغیرهای تصمیم مسأله می‌توانند منفی یا آزاد در علامت نیز باشند.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$، ضریب سود یا هزینه متغیرها در تابع هدف می‌باشد.

a_{ij}، ضرایب فنی یا تکنولوژیکی (میزان ماده اولیه‌ای که از منبع i ام در تولید محصول j ام نقش دارد).

b_i ، $i = 1 , \ldots , m$، میزان موجودی منبع i ام می‌باشد.

$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ را تابع هدف مسأله گوییم که باید بهینه شود و با حرف z نشان می دهیم.

نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ ، $i = 1 , \ldots , m$، i امین محدودیت (قید) را نشان می دهد.

محدودیت های $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ محدودیت های نامنفی می باشند و به آنها شرایط نامنفی بودن متغیرها گوییم. همواره می توان مسأله مینیمم سازی را به مسأله ماکسیمم سازی تبدیل نمود و باالعکس.

مجموعه‌ای از محدودیت ها (خطوط مرزی) به صورت نامعادلات خطی روی دو متغیر منجر به ایجاد منطقه‌ای از مقادیر ممکن برای آن دو متغیر روی صفحه می‌شود. این منطقه برای مسایل حل‌شدنی به شکل یک چندضلعی محدب است. ملاحظه می شود که تابع هدف و همه محدودیت ها خطی هستند، از این رو این مسأله را برنامه ریزی خطی می گوییم [32].

2–1–1) ساختار مسأله برنامه‌ریزی خطی

یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی در صورتی برنامه‌ریزی خطی است که دارای فرض‌های زیر باشد:

الف) فرض تناسب

ب) فرض جمع پذیری

ج) فرض بخش‌پذیری

د)فرض معین بودن

الف) منظور از فرض تناسب، این است که هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت‌ها قابل اجرا باشد، به عبارت دیگر، آهنگ تغییر یا شیب رابطه، تابعی ثابت است بنابراین چنانچه متغیر تصمیم برابر مقداری تغییر کند، مقدار تابع نیز دقیقاً به همان نسبت تغییر می‌کند.

به عنوان مثال موردی را در نظر بگیرید که $a_{11} = 5$ و $x_1 = 2$ و $a_{11}x_1 = 10$ باشد. اگر x_1 به مقدار 5٪ افزایش یابد (یعنی $x_1 = 2.1$) مقدار تابع نیز برابر با 10.5 می‌شود که دقیقاً 5٪ افزایش یافته است. این خصوصیت همواره برای محدودیت‌های مدل و تابع هدف برقرار است.

ب) فرض جمع پذیری، بیانگر این واقعیت است که باید روابط ریاضی متغیرها در مدل بصورت جمع جبری بیان گردد. این فرض تضمین می کند که هزینه کل مجموع هزینه های انفرادی است.

به عنوان مثال رابطه $x_1 + 2x_2 + 3x_1x_3 \leq 20$ غیر جمع‌پذیر است (چون از عمل ضرب بین x_1 و x_3 استفاده شده است)، اما رابطه $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 40$ یک رابطه جمع پذیر است .

ج) فرض بخش پذیری در مسأله برنامه‌ریزی خطی بیانگر آن است که جواب مسأله (مقدار متغیرهای تصمیم) می‌تواند عدد صحیح یا عدد غیر صحیح باشد و متغیرهای تصمیم گیری به هر اندازه که لازم باشد می توانند تقسیم شوند.

د) فرض معین بودن بدین معناست که کلیه پارامترهای a_{ij}، b_i و c_i برنامه ریزی خطی مقادیر مشخصی هستند. اگر چه تعیین پارامترهای مدل در اکثر مواقع بطور قطعی امکان پذیر است ولی در برخی موارد افق برنامه‌ریزی آنقدر بلند مدت است که مقادیر پارامترها دستخوش تغییر می‌شوند. در چنین مواقعی می‌توان مفهوم تحلیل حساسیت را برای بررسی تغییرات در جواب بهینه مدل مطرح نمود.

بعد از فرموله کردن مدل برنامه‌ریزی خطی نوبت به حل آن می‌رسد. ابتدا فرم‌های کانونی و استاندارد مسایل

برنامه ریزی خطی را تعریف می‌کنیم که فرم استاندارد برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی به کار می‌رود و فرم کانونی در نوشتن مسأله دو گان برنامه ریزی خطی بکار می‌رود [13].

3-1-1) فرم استاندارد

ویژگی‌های فرم استاندارد برنامه ریزی خطی عبارتند از:

الف) تمامی محدودیت‌ها (قیدها) به صورت مساوی هستند (بجز نامنفی بودن متغیرها).

ب) عضو سمت راست هر معادله (یعنی موجودی منابع، b_i ها) نامنفی می‌باشد.

ج) تمام متغیرهای تصمیم نامنفی هستند.

د) تابع هدف بصورت Max یا Min می‌باشد.

بنابراین اگر محدودیت‌های مدل به فرم نامساوی باشند با اضافه و کم کردن متغیرهای کمبود و مازاد، محدودیت‌ها را بصورت مساوی تبدیل می‌کنیم.

مثلاً محدودیت $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b$ با اضافه کردن متغیر کمبود s_1 تبدیل به محدودیت $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + s_1 = b$ می‌شود و محدودیت $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \ge b$ با کم کردن متغیر مازاد s_1 تبدیل به محدودیت $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - s_1 = b$ می‌شود.

فرم استاندارد نقش بسیار مهمی را در حل مساله برنامه‌ریزی خطی بازی می‌کند. به عنوان مثال، مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را که در آن کلیه محدودیت‌ها بصورت $\le$ هستند در نظر می‌گیریم: (i,j=1,2,…,n)

$$Max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$S.t: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (b_i \ge 0)$$

$$x_j \ge 0$$

فرم استاندارد مسأله فوق بصورت زیر است: (i,j=1,2,…,n)

$$, Max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$S.t: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$s_i \geq 0$$

مشاهده می‌شود که فرم استاندارد، محدودیت های مسأله برنامه‌ریزی خطی را تبدیل به m معادله با $m+n$ مجهول می‌نماید. جوابی از این دستگاه معادلات مورد نظر است که در آن x_j ها $(j=1,\dots,n)$و s_i ها $(i=1,\dots,m)$ مقادیر نامنفی را اختیار نماید و در این حالت گوییم جواب شدنی است.

ایده‌ای که در بالا ذکر شد، ایده‌ای بسیار ساده است، اما مشکل در این است که m معادله و $m+n$ مجهول داریم و در نتیجه در حالت کلی بی نهایت جواب خواهیم داشت. در نتیجه از نظر عملی در محاسبات منطقی نیست که کلیه جواب‌های شدنی را محاسبه نماییم. روشی مورد نظر است که بعد از محاسبه تعداد متناهی از جواب‌ها، به جواب بهینه برسد [32].

یکی از این روش‌ها، در فرم استاندارد روش سیمپلکس می‌باشد که در ادامه فصل بررسی خواهد شد.

4‑1‑1) فرم کانونی

ویژگیهای فرم کانونی عبارتند از:

الف) تمام متغیرهای تصمیم نامنفی هستند.

ب) تمام محدودیت‌ها بصورت کوچکتر مساوی، $\leq$، هستند.

ج) تابع هدف از نوع Max می‌باشد.

هر مسأله برنامه ریزی خطی را با به کار بردن تبدیلات مقدماتی زیر می‌توان به فرم کانونی تبدیل نمود.

الف) اگر متغیر تصمیم نامثبت باشد، با ضرب (1–) به طرفین می‌توان از تغییر متغیر استفاده کرد. یعنی اگر

$x \le 0 \xrightarrow{\text{ضرب } (-1)} -x \ge 0$; قرار دهیم $x = x' - x''$; $x' \ge 0, x'' \ge 0$

اگر متغیر تصمیم آزاد در علامت باشد، می‌توان آن را بصورت دو متغیر نامنفی نوشت. یعنی اگر

آزاد در علامت $x \to x = x' - x''$; $x' \ge 0,\ \ x'' \ge 0$

ب) اگر محدودیت فرم $\ge$ داشته باشد، با ضرب (1–) در طرفین آن، محدودیت بصورت $\le$ تبدیل می‌شود. اگر محدودیت فرم (=) داشته باشد، بصورت دو محدودیت$\ge$ و$\le$ نوشته می شود که فرم $\ge$ مطابق بالا تبدیل به $\le$ می‌شود.

$$Ax = b \Longrightarrow \begin{cases} Ax \le b \\ Ax \ge b \end{cases}$$

ج) اگر تابع هدف از نوع Min باشد با ضرب (1–) در آن، تابع هدف به Max تبدیل می‌شود [32].

5–1–1) فرم ماتریسی مسأله برنامه ریزی خطی:

یک مسأله برنامه ریزی خطی را می توان با نماد ماتریسی به فرم ساده تری بیان کرد. مسأله زیر را در نظر بگیرید: (i,j=1,2,…,n)

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.t: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$
$$x_j \ge 0$$

اگر بردار سطری $(c_1, c_2, ..., c_n)$ را با C نشان دهیم و بردارهای X و b و ماتریس $A_{m\times n}$ به صورت زیر باشند:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

در این صورت مسأله فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} &\min \quad z = CX \\ &AX = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

همچنین با نمایش A با $[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$ که در آن a_j، jامین ستون ماتریس $A_{m\times n}$ است مسأله را می توان چنین فرمولبندی کرد: (j=1,2,…,n)

$$\begin{aligned} &\min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &s.t: \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

نکته 1: از آنجایی که متغیرهای تصمیم بیان کننده تعداد و مقدار در مسأله می‌باشند، به صورت نامنفی فرض می‌شوند. ($x \geq 0$).

1–1–6) مدل سازی

فرموله کردن مسایل برنامه‌ریزی خطی در واقع نوعی هنر تلقی می‌شود، هنری که به مدد تجربه، شناخت و مطالعه حاصل می‌گردد.مدل بندی مسایل برنامه ریزی خطی شامل مراحل زیر است:

مرحله اول فرمول بندی است که شامل مطالعه سیستم، داده ها و شناسایی محدودیت ها و تابع هدف است.

مرحله دوم ساختار اختصار و سادگی آرمانی مدل ریاضی است.

مرحله سوم به دست آوردن جواب است.

مرحله چهارم آزمون مدل، آنالیز و بازسازی است.

مرحله پنجم که پایان مسأله است اجرای آن می باشد.

در مجموع برای حل مسایل برنامه ریزی نخستین کار لازم تشخیص متغیرهای تصمیم، تابع هدف و قیود است [13].

1–1–7) حل هندسی مسأله برنامه‌ریزی خطی دو متغیره

در این روش بعد از فرموله کردن مسأله برنامه‌ریزی خطی به حل آن می‌پردازیم. اهمیت و ارزش مدل‌های ریاضی در آن است که پس از حل آنها از نتایج آن بهره‌مند شویم. چون در برنامه‌ریزی خطی، تابع هدف و محدودیت‌ها خطی هستند می‌توان به شیوه ترسیمی برای حل آنها استفاده کرد. روش‌های ترسیمی در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به مدل‌هایی محدود می شود که حداکثر دارای دو یا سه متغیر تصمیم هستند. برای حل این نوع مدل‌ها می‌توان از یک دستگاه مختصات استفاده کرد. استفاده از شیوه ترسیمی برای مدل‌هایی که سه متغیره