بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان

دستگاههای هسته ای روی گروههای متناهی

استاد راهنما

دکتر احمد عرفانیان

نگارنده

لیلا شهیدی

آذر ۱۳۸۴

تقدیر و تشکر

بی نهایت مسرور و شادمانم که به یاری خداوند بزرگ و لطف و عنایت بزرگمردانی که نام و یادشان همواره در خاطرم جاودانه است. یکبار دیگر اندیشه نارسایم پر گرفت تا در فضای مملو از صفا و صمیمیت حقایق را تجربه نموده تلاش چندین ساله ام را سامان دهد.

بی تردید نگارش این مجموعه مرهون زحمات بی شائبه و بی دریغ اساتید ارجمندی است که همواره و در همه حال در نهایت صبر و شکیبایی به یاریم شتافته، مورد لطف و محبتم قرار داده اند. به همین لحاظ بر خویش لازم می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را نسبت به این عزیزان بالاخص جناب آقای دکتر احمد عرفانیان که همواره چون مشعلی فروزان روشنی بخش راهم بودند، آقای دکتر مشایخی که زحمت داوری پایان نامه را تقبل فرمودند و جناب آقای دکتر نارنجانی و آقای دکتر میرزا وزیری که در کمال سخاوت با در اختیار گذاشتن کارهای تحقیقی خویش بر غناء و اعتبار این پایان نامه افزودند ابراز دارم. همچنین از لطف و مرحمت عزیزانی که در تایپ و تکثیر این رساله یاریم دادند به خصوص خانم زهره ارجمند بی نهایت سپاسگزارم.

در پایان اجازه می خواهم تا این مجموعه کوچک و ناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی دریغی که هیچگاه فروکش نخواهد کرد به مهربانترین عزیزان خویش یعنی دوست همیشه همراهم، خانم سوسن اکبری و پدر و مادر ارجمندم تقدیم بدارم، آنانی که هرگز فراموشم نکردند تا هیچگاه فراموششان نکنم.

با سپاس و امتنان: لیلا شهیدی

۲۵ آذر ۱۳۸۴

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

تاریخ: ....
شماره: ....
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: دستگاههای هسته ای روی گروههای هشاهی

که توسط خانم لیلا سعیدی تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۴/۹/۲۵ نمره: ۱۸/۷۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
آقای دکتر احمد عرفانیان	استاد راهنما	دانشیار	
	استاد راهنمای همکار یا مشاور		
آقای دکتر بهروز مشایخی	استاد ممتحن	دانشیار	
خانم دکتر ثریا طالبی	نماینده گروه آموزشی		

فرم چکیده پایان نامه کارشناسی ارشد | مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام: لیلا | **نام خانوادگی:** شهیدی

استاد راهنما: دکتر احمد عرفانیان | **استاد مشاور:**

دانشکده: پیام نور | **رشته:** ریاضی محض

گرایش: جبر | **مقطع:** کارشناسی ارشد

تاریخ: دفاع: ۲۵ آذر ۱۳۸۴ | **تعداد صفحات پایان نامه:** ۸۵

عنوان: « دستگاههای هسته ای روی گروههای متناهی»

کلمات کلیدی:

چکیده:

هدف از این رساله معرفی و بررسی خواص دستگاههای هسته ای برای یک گروه متناهی است. در این راستا ابتدا گروههای فروبنیوس و گروههای CA را تعریف و سپس به معرفی گروههای CN، CN^* و CS می پردازیم و ارتباط این گروهها را با تعریف دستگاههای هسته ای مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین با ارائه برخی لم و قضیه های مورد نیاز به بیان و اثبات قضیه اصلی زیر می پردازیم.

قضیه اصلی:

فرض کنیم G یک CN^* گروه غیر حل پذیر باشد بطوریکه $p \in \pi(G)$ و H یک p' زیر گروه هال حل پذیر G باشد. در این صورت یکی از حالات زیر برقرار است:

(i) p یک عدد اول فرما است (یعنی عدد صحیح $m \geq 1$ وجود دارد بطوریکه $p = 2^{2^m} + 1$) و $G \cong SL_2\left(F_{2^{2^m}}\right)$

(ii) $p = 3$ و $G \cong SL_2(F_8)$

در هر دو حالت H نرمال ساز یک دو زیر گروه سیلوی G می باشد.

استاد راهنما

فرم چکیده پایان نامه کارشناسی ارشد　　　　مدیریت تحصیلات تکمیلی

First Name: Leyla　　**Last Name:**Shahidi
Supervisor: Dr. Ahmad Erfanian

Faculltry: Mathematical Science　　**Field:** Pure Mathematics
Eranch: Algobra　　**Degree:** M.Sc.

Thesis Date: 17 Septermber 2005　　**Number of Dissertation Pages: 87**

Title: Commutativity degree, central extensions and isoclinism

Key Words:

Abstract

The purose of the thesis is to intraduce the kernel systems of finite groups and to state some of their properties. In this article, we first define the frobenious and CA-groups and then, introducing the CN, CN* and CS groups. We have given some relations between the kernel systems and the above groups. More over, some lemmas and theorems which are necessary for the following main theorem have been given in this thesis.

Main theorem

Let G be a non soluble CN* group such that $p \in \pi(G)$ and H' be a solouble Hall P'-sub group of G. then one of the fallowing two cases hold:

(i) P is a Fermat prime number (i.e. there exists a positive in tiger m≥1 such that p=$2^{2^m}+1$) and $G \cong SL_2(F_{2^{2^m}})$.

(ii) P=3 and $G \cong SL_2(F_8)$.

In each case H is a normalizer of a 2-sylow subgroup of G.

مقدمه

این رساله مشتمل بر چهار فصل می باشد و هدف اصلی بررسی مقالهٔ زیر:

P. Lescot, Kernel Systems On Finite Groups Vol. 163 (2001), 71-85

می باشد. البته برخی مقالات دیگر در این رابطه از جمله مقالات مراجع [۸] و [۲]نیز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند.

در این رساله یک ردهٔ جدید از گروههای متناهی که شامل ردهٔ گروههای CA می باشد را معرفی گروه و خواص اساسی آنها را مورد بررسی قرار می دهیم، سپس با قرار دادن شرایط اضافی به ردهٔ گروههای فوق، گروههای *CN را نیز تعریف خواهیم نمود و در ادامه به تعریف دستگاههای هسته ای در یک گروه متناهی پرداخته و با بیان برخی لم ها و قضیه ها به اثبات قضیه اصلی خواهیم پرداخت. در ابتدا به بیان تعاریف و پیشنیازهای لازم می پردازیم.

در این راستا کوشیده ایم تا با معرفی دستگاههای هسته ای گروههای متناهی و نیز گروههایی از جمله گروههای CA، CN و *CN به ارتباط میان آنها و خاصیت دستگاههای حلقه ای آنها بپردازیم. در این رابطه قضیه اصلی زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه اصلی

فرض کنیم G یک CN^* گروه غیر حل پذیر باشد بطوریکه $p \in \pi(G)$ و H یک p' زیر گروه هال حل پذیر G باشد. در این صورت یکی از حالات زیر برقرار است:

i) p یک عدد اول فرما است (یعنی عدد صحیح $m \geq 1$ وجود دارد بطوریکه $p = 2^{2^m} + 1$) و $G \cong SL_2\left(F_{2^{2^m}}\right)$

ii) $p = 3$ و $G \cong SL_2(F_8)$

در هر دو حالت H نرمال ساز یک دو زیر گروه سیلوی Gمی باشد.

در فصل اول مقدمات و پیشنیازهای مورد نیاز را بیان کرده ایم که این فصل مشتمل بر چهار قسمت است. در قسمت اول عملی گروه روی یک مجموعه و گروههای جایگشتی تعریف شده است. در قسمتهای دوم و سوم و چهارم به ترتیب تعاریف و نتایج اساسی در رابطه با p - گروهها، قضایای سیلو، گروههای حل پذیر و پوچتوان و گروههای خطی تصویری خاص آورده شده است.

در فصل دوم به معرفی گروههای CA و گروههای فروبنیوس پرداخته ایم که هر کدام در یک قسمت بصورت مجزا در این فصل ارائه شده اند. در مورد هر کدام از آنها به برخی خواص مهم و مورد نیاز آنها اشاره کرده ایم.

فصل سوم اختصاص به مفهوم اصلی رساله یعنی دستگاههای هسته ای در گروههای متناهی دارد که در قسمت اول این فصل به آن پرداخته شده است. در قسمت

دوم گروههای CN و CN* مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته اند و قضایایی در ارتباط میان آنها و دستگاههای هسته ای نیز ارائه شده است.

در فصل چهارم به بیان قضیه اصلی پرداخته ایم. درابتدا در دو قسمت اول به ارائه برخی خواص هسته ای در شرایط خاص اشاره نموده ایم و در قسمت سوم برهان قضیه اصلی آورده شده است.

عناوین | شماره صفحه

چکیده

مقدمه

فصل اول – مقدمات و پیش نیازها

۱-۱- عمل گروه روی یک مجموعه و گروههای جایگشتی ۲

۱-۲- p گروهها و قضایای سیلو ۸

۱-۳- گروههای حل پذیر و پوچتوان ۱۷

۱-٤- گروهای خطی تصویری خاص ۲۴

فصل دوم – گروههای فروبنیوس و CA – گروهها

۲-۱- گروه فروبنیوس ۲۸

۲-۲- CA گروهها ۳۷

فصل سوم- دستگاههای هسته ای در گروههای متناهی

۳-۱- دستگاههای هسته ای گروه ۴۷

۳-۲- *CN گروهها ۵۲

عناوین شماره صفحه

فصل چهارم – قضیه اصلی

۱-٤- برخی خواص دستگاههای هسته ای گروهها در شرایط خاص ۶۰

۲-٤- خواص بیشتر دستگاههای هسته ای گروهها ۷۰

۳-٤- بیان و برهان قضیهٔ اصلی ۷۹

منابع مورد استفاده

منابع ۸۶

فصل اول

مقدمات و پیش نیازها

۱-۱- عمل گروه روی یک مجموعه و گروههای جایگشتی

۱-۲- p گروهها و قضایای سیلو

۱-۳-گروههای حل پذیر و پوچتوان

۱-٤-گروهای خطی تصویری خاص

۱-۱- عمل[1] گروه روی یک مجموعه و گروههای جایگشتی

در این قسمت به تعریف عمل گروه روی یک مجموعه می پردازیم و برخی خواص مهم آن و نیز تعریف گروه جایگشتی[۲] را یادآوری می نمائیم.

<u>تعریف ۱-۱-۱</u> فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه ای ناتهی باشد در اینصورت نگاشت $\theta:\Omega\times G\to\Omega$ را در یک عمل G روی مجموعه Ω می نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $\theta(w,e)=w \quad \forall w\in\Omega$

۲) $\theta(\theta(w,g),h)=\theta(w,gh) \quad \forall w\in\Omega, \quad \forall g,h\in G$

برای سادگی $\theta(w,g)$ را در تعریف فوق با نماد w^g نشان می دهیم. در این صورت شرایط (۱)و (۲) به صورت زیر خواهند بود.

۱) $w^g=w \quad \forall w\in\Omega$

۲) $(w^g)^h=w^{gh} \quad \forall w\in\Omega, \quad \forall g,h\in G$

معمولاً در حالتیکه گروه G دارای عملی روی مجموعهٔ Ω است می نویسیم $(G|\Omega)$ و می خوانیم گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل می کند.

1 -action
2 - permutation group

لم ۱-۱-۲ فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه ای ناتهی باشد و G روی Ω عمل کند همچنین $\alpha, \beta \in \Omega$ در این صورت رابطهٔ $\sim$ که بصورت زیر تعریف می شود یک رابطهٔ هم ارزی است.

$\alpha \sim \beta$ اگر و فقط اگر عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $\alpha^g = \beta$

برهان: به [۱۶] مراجعه شود.

تعریف ۱-۱-۳ فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه ای ناتهی باشد و G روی Ω عمل کند. همچنین فرض کنید $\sim$ رابطه هم ارزی[1] تعریف شده در لم ۱-۱-۲ باشد. در اینصورت برای $\alpha \in \Omega$ مجموعهٔ $\Delta(\alpha) = \{\beta \in \Omega | \alpha \sim \beta\}$ را که رده هم ارزی α است یک مدار G شامل α می نامند.

توجه داریم مدارهای G یک افراز برای مجموعهٔ Ω می باشند و $\Delta(\alpha)$ نیز عبارت از مجموعهٔ $\Delta(\alpha) = \{\alpha^g | g \in G\}$ است.

تعریف ۱-۱-۴ فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل کند، در این صورت عمل G روی مجموعهٔ Ω انتقالی نامیده می شود هرگاه G تنها دارای یک مدار باشد، به

1 - equivalence relation

عبارت دیگر به ازای هر دو عنصر دلخواه β,α در مجموعه Ω عنصر $g\in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $\alpha^g=\beta$

تعریف ۱-۱-۵ فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل کند و $w\in\Omega$، در این صورت مجموعهٔ $G_w=\{g\in G|w^g=w\}$ را ثابت نگهدارندهٔ w در G می نامیم. به سادگی می توان نشان داد که G_w زیر گروه G است که زیر گروه پایدار ساز[1] w در G نیز نامیده می شود.

قضیه ۱-۱-۶ فرض کنید گروه متناهی G روی مجموعهٔ Ω عمل کند در این صورت اگر عمل G روی مجموعهٔ Ω انتقالی[2] باشد آنگاه برای هر $\alpha,\beta\in\Omega$ زیر گروههای G_α و G_β در G مزدوجند.

برهان: به [۱۶] مراجعه شود.

قضیه ۱-۱-۷ فرض کنید گروه متناهی G روی مجموعهٔ Ω عمل کند در این صورت برای هر $w\in\Omega$ داریم:

$$[G:G_w]=|\Delta(w)|$$

---

1 -Stabilizer subgroup
2 -transitive

گروه متقارن روی Ω را با S_n نمـایش داده و آنـرا گـروه متقـارن روی n حـرف یـا از درجهٔ n می خوانیم.

<u>**تعریف ۱-۱-۱۲**</u> جایگشتهای $\sigma \in S_n$ و π را مجزا می نامیم چنانچه اگر $w \in \Omega$ توسط یکی از آنها تغییـر داده شـود آنگـاه توسـط دیگـری ثابـت نگـه داشـته شـود یعنـی اگـر $(w)\pi \neq w$ آنگاه $(w)\sigma = w$ و چنانچه $(w)\sigma \neq w$ آنگاه $(w)\pi = w$.

توجه داریم که اگر $\varphi, \ \pi$ جایگشتهای مجزایی در S_Ω باشند در این صورت:

$$\pi\varphi = \varphi\pi$$

<u>**تعریف ۱-۱-۱۳**</u> فرض کنید Ω مجموعـه ای نـاتهی و $a_n,...,a_1$ اعـضای مختلفـی از Ω باشند در این صورت $\pi \in S_\Omega$ را یک دور به طول r می نامیم، هر گاه:

$$(a_1)\pi = a_2, \quad (a_2)\pi = a_3, \quad (a_{r-1})\pi = a_r, \quad (a_r)\pi = a_1$$

و بقیهٔ اعضا توسط π ثابت نگه داشته شوند در ایـن صـورت π را بـه صـورت $(a_1, a_2, ..., a_r)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۴ فرض کنید Ω مجموعه ای ناتهی باشد. در این صورت هر زیر گروه از S_{Ω}، گروه متقارن روی مجموعهٔ Ω، را یک گروه جایگشتی روی Ω می نامیم.

تذکر ۱-۱-۱۵ فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی مجموعهٔ Ω باشد در این صورت $\theta:\Omega\times G\to G$ با ضابطهٔ $\theta(w,\pi)=w^{\pi}=(w)\pi$ یک عمل است لذا برای گروه G می توان مدار و ثابت نگهدارنده را با توجه به عمل این گروه به صورت زیر تعریف کرد:

برای هر $a\in\Omega$، مجموعهٔ $\Delta(a)=\{(a)\pi|\pi\in G\}$

شامل تمام عناصری مانند b از مجموعه Ω است که توسط حداقل یک جایگشت عنصر a به b برده شده باشد. همچنین زیر گروه ثابت نگهدارنده a در G یعنی $G_a=\{\pi\in G|(a)\pi=a\}$ شامل تمام جایگشتهایی از G است که عنصر a را ثابت نگه داشته اند.

نتیجه ۱-۱-۱۶ فرض کنید G یک گروه جایگشتی روی مجموعه Ω باشد در این صورت G را یک گروه انتقالی گوئیم، هرگاه به ازای هر دو عنصر دلخواه $\alpha,\beta\in\Omega$ عنصر $\sigma\in G$ وجود داشته باشد بطوریکه: $(\alpha)\sigma=\beta$

۱–۲– p گروهها و قضایای سیلو

در این بخش به تعاریف p گروه، p عنصر[۱]، p' عنصر و نیز مفاهیم زیر گروه سیلو، زیر گروه هال و دیگر مفاهیم مورد استفاده در این رابطه می پردازیم و سپس برخی نتایج و قضایای مهم مرتبط با این مباحث را بیان خواهیم نمود که در فصلهای بعدی از آنها استفاده می شود.

تعریف ۱–۲–۱ فرض کنیم G یک گروه و p عددی اول باشد، در این صورت G را یک p گروه نامیم هرگاه مرتبهٔ هر عنصر G توانی از عدد اول p باشد. همچنین زیر گروه H را یک p زیر گروه[۲] G نامیم هرگاه H خود نیز یک p گروه باشد.

قضیه ۱–۲–۲ مرکز هر p گروه غیر بدیهی است.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

1 -p-element
2 - p-sub group

قضیه ۱-۲-۳ (قضیهٔ کشی) فرض کنید G گروه متناهی و p عددی اول باشد، بطوریکه $p\,\|G|$. در این صورت G عنصری از مرتبهٔ p دارد.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

قضیه ۱-۲-۴ (قضیهٔ اول سیلو) فرض کنید G گروه متناهی باشد و $|G| = p^n.m$ که در آن $n \geq 1$ و p عددی اول است که m را عاد نمی کند در این صورت:

الف) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، G زیر گروهی از مرتبهٔ p^i دارد.

ب) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$ هر زیر گروه H از G از مرتبهٔ p^i زیر گروهی نرمال از یک زیر گروه از مرتبهٔ p^{i+1} است.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

تعریف ۱-۲-۵ فرض کنید G یک گروه و p عددی اول باشد، زیر گروه P را یک p زیر گروه سیلوی G گویند اگر P یک p- زیر گروه بیشین G باشد، یعنی زیر مجموعه سرهٔ هیچ p زیر گروه دیگری از G نباشد. مجموعهٔ تمام p- زیر گروههای سیلوی G را با نماد $Syl_p(G)$ نشان می دهیم.

نتیجه ۱-۲-۶ فرض کنید G گروهی متناهی باشد و $|G| = p^n.m$ که در آن $n \geq 1$ ، p عددی اول است بطوریکه P، عاد نمی کند m را، در این صورت G حداقل یک p زیر گروه سیلو دارد و مرتبهٔ هر p - زیر گروه سیلوی آن p^n است.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

قضیه ۱-۲-۷ (قضیهٔ دوم سیلو) فرض کنید P_1 و P_2 دو p - زیر گروه سیلوی G باشند در این صورت P_1 و P_2 در گروه G مزدوج هستند.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

قضیه ۱-۲-۸ (قضیهٔ سوم سیلو) فرض کنید G گروه متناهی و p عددی اول باشد، بطوریکه $|G|$ را عاد می کند در این صورت اگر N_p تعداد p - زیر گروههای سیلوی G باشد، آنگاه $N_p \big| |G|$ و $N_p \overset{p}{\equiv} 1$.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

تعریف ۱-۲-۹ فرض کنید G یک گروه و π مجموعه ای ناتهی از اعداد اول باشد.