تقدیم به

مادرم الهه صبر و مهربانی

اسطوره عطوفت،پاکی و فداکاری

که همواره یار و غمخوارم بوده

و خورشید وجودش گرمی بخش وجودم

و پرتو فروزانش روشنی بخش راهم

به پاس گیسوان سپیدش

و تقدیم به

روح پاک پدر مهربانم

و تقدیم به

همه‌ی کسانی که دوستشان دارم.

تشکر و قدردانی

هرگز دل من ز علم محروم نشد   کم ماند ز اسرار که معلوم نشد
هفتاد و دو سال فکر کردم شب و روز   معلومم شد که هیچ معلوم نشد(عمر خیام)

سالهای زندگی پیاپی در حال آمدن و رفتنند و گستره‌ی پهناور خلقت هر روز شاهد شکوفایی دانش بشر است. دانشی که هر آنچه بر وسعتش فزونی می‌یابد مجهولاتش فراگیرتر و گسترده‌تر می‌نماید. اما آنچه این گستره‌ی مجهولات را زیبا و زیباتر می‌کند شناخت عظمت پروردگار و خالق آن است و از این جهت است که افزون و افزونتر از پیش او را سپاس می‌گویم. و اما درک و زایش این حس بی‌کران سپاس، بی‌شک زاییده تلاش و همت آموزندگان آن بوده است.

در اینجا لازم می دانم تا از لطف و تلاش استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر فرشید میرزائی که اینجانب را در طول انجام این پایان نامه با بذل توجه و مشوقانه همراهی نمودند تشکر نموده و از صمیم قلب به خاطر همه لحظات گرانبهایی که صرف آموزش و همراهی من نمودند بی‌نهایت سپاسگزار باشم. همچنین از جناب آقای دکتر بهمن غضنفری و جناب آقای دکتر بهمن حیاتی که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر را دارم. در پایان از همه دوستان عزیزم که همواره کمک و یاور من بودند بی‌نهایت سپاسگزارم.

نام خانوادگی دانشجو: پیروزفر نام: سیما
عنوان پایان نامه: توابع متعامد مثلثی و استفاده از آن در حل معادلات انتگرال
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر–گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: دی ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۱۲۹
کلید واژه: توابع متعامد مثلثی، توابع متعامد، معادلات انتگرال فردهلم خطی و غیر خطی، معادلات انتگرال ولترا خطی و غیر خطی، معادلات انتگرال فردهلم–ولترا غیر خطی، معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم–ولترا غیر خطی.

چکیده

در این پایان نامه، هدف اصلی بحث راجع به توابع متعامد مثلثی و استفاده از آن در حل معادلات انتگرال می‌باشد. در فصل اول مقدمه‌ای کوتاه در مورد معادلات انتگرال و تعاریف آن آورده شده است. در فصل دوم توابع متعامد بلاک–پالس معرفی شده و خواص آنها مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل سوم به معرفی توابع متعامد مثلثی و اثبات خواص آنها پرداخته شده است. در فصل چهارم حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی و غیر خطی با استفاده از توابع متعامد مثلثی مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل پنجم به بررسی حل عددی معادلات انتگرال ولترا خطی و غیر خطی با استفاده از توابع متعامد مثلثی پرداخته شده است. در نهایت در فصل ششم حل عددی معادلات انتگرال فردهلم–ولترا غیر خطی و حل عددی معادلات انتگرال–دیفرانسیل فردهلم–ولترا غیر خطی مرتبه اول توسط توابع متعامد مثلثی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین قضیه همگرایی برای معادلات انتگرال فردهلم–ولترا غیر خطی با استفاده از شرط لیپشیتس اثبات شده است. در هر فصل چندین مثال عددی نیز برای ارائه کارایی این روش آورده شده است.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا سیر تاریخی پیدایش و تکامل نظریه معادلات انتگرال را بررسی می‌کنیم. سپس انواع دسته‌بندی‌های معادلات انتگرال را مشخص می‌کنیم و در نهایت توابع متعامد و از جمله آنها توابع بلاک–پالس[۱] را بیان می‌کنیم.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتقات جزیی اهمیت و کاربرد فراوانی در مسائل علمی و مهندسی دارند. در روند حل دسته‌ای از آنها، به معادلاتی می‌رسیم که تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. در ابتدا حل اینگونه معادلات تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می‌شد. اولین بار اصطلاح معادله انتگرال توسط بویس ریموند[۲] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شد و در عمل لاپلاس[۳] اولین کسی بود که در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرال را به صورت زیر معرفی کرد:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} y(s) ds.$$

و از آن در حل معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. درجریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه[۴] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت مطالعه و تحقیق کرد و مقالاتی در این زمینه منتشر کرد. سپس در سال ۱۸۲۳ آبل[۵] درمساله خود که به مساله مکانیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را مطرح نمود. در سال ۱۸۲۶ پواسن[۶] ضمن مطالعه‌ی معادله مغناطیس به معادله انتگرال زیر رسید:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} Y(s) ds \qquad , \qquad (\text{به قدر کافی بزرگ است } a).$$

از سال ۱۸۳۲ به بعد، لیوویل[۷] به طورمستقل به حل معادلات انتگرال خاصی پرداخت. یک گام مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد و آن چگونگی حل برخی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کارمی‌رود اولین بار توسط هیلبرت[۸] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرم‌های زیر مطرح بودند که هر دو از نمونه‌های

[۱] Block-Pulse
[۲] Bois Reymond
[۳] Laplace
[۴] Fourier
[۵] Abel
[۶] Poisson
[۷] Liouville
[۸] Hilbert

مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$x(t) = \int_a^t k(t,s)y(s)ds \qquad , \qquad \text{(معادله انتگرال آبل)}$$

$$y(t) = x(t) + \int_a^t k(t,s)y(s)ds \qquad , \qquad \text{(معادله انتگرال لیوویل)}$$

که در آنها $x(t)$ و $k(t,s)$ توابعی معلوم و $y(t)$ تابعی مجهول می‌باشد.
در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[۹] معادله انتگرالی به صورت زیر معرفی کرد:

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds,$$

که متناظر با معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی زیر می‌باشد:

$$\nabla y(t,s) + \lambda y(t,s) = x(t,s) \qquad , \qquad \text{(معادله حرکت موج)}$$

و در آن داریم:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \quad .$$

ریاضی‌دانی به نام فردهلم [۱] برای بدست آوردن جواب این معادله، تحقیقاتی انجام داد. اما این ولترا بود که [۲] در سال ۱۸۹۵ برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود. فردهلم در اوایل قرن جدید جهت حل مساله دیریکله[۳] از معادلات انتگرال نوع دوم استفاده کرد. معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر است:

$$y(t) = x(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds \quad ; \qquad a \leq t \leq b, \qquad (۱.۱)$$

که شامل دسته‌بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بود. تحقیقات فردهلم جهت بدست آوردن جواب معادله حرکت موج منجر به ارائه قضایای فردهلم، که از قضایای بنیادی در معادلات انتگرال هستند، گردید. ارائه یک سمینار توسط اریک هولمگر[۴] در سال ۱۹۰۱ بر روی کارهای فردهلم، علاقه هیلبرت را برای تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در حل بسیاری از مسائل ریاضی و فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت. هیلبرت فاصله انتگرال‌گیری را فاصله $[0, 1]$ و هسته $k(t,s)$ را

[۹] Poincare
[۱] Fredholm
[۲] Volterra
[۳] Dirichlet
[۴] Erik Holmger

پیوسته فرض کرد. یکی از کارهای مهم هیلبرت، فرمول‌بندی مساله معادلات دیفرانسیل مقادیر مرزی به صورت معادله انتگرال است.

در اوایل نیمه دوم قرن بیستم، تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال توسط هرمن ویل[5] در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیری از λ، معادله انتگرال (۱.۱) جواب دارد، صورت گرفت. از آنجایی که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرال نیستیم، لذا ضرورت به‌کارگیری روش‌های عددی، جهت حل معادلات انتگرال روشن می‌گردد. در بسیاری از مسائل کاربردی از قبیل معادلات منفرد در تئوری پتانسیل، فیزیک مکانیک، تئوری امواج و الکترونیک برای رسیدن به جواب نیاز به روش‌های عددی است و بر اساس اینکه در محاسبات عددی بر روی کامپیوترها، مسائلی از قبیل گرد کردن و انباشته شدن خطا پیش می‌آید، لازم است همگرایی روش‌های عددی مورد بحث قرار گیرد. دلیل این لزوم این است که بسیاری از روش‌ها در تئوری همگرا هستند ولی در عمل، واگرا به جواب می‌باشند. به همین دلیل روش‌های عددی که سرعت همگرایی آنها بالا است برای حل انواع معادلات انتگرال ابداع گردید.

۳.۱ تعاریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱ معادله‌ای که در آن تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود را معادله انتگرال گوییم. فرم کلی یک معادله انتگرال به صورت زیر است:

$$h(t)y(t) = x(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds \quad , \tag{۲.۱}$$

که درآن $y(t)$ تابعی مجهول و $x(t)$ ، $h(t)$ و $k(t,s)$ توابعی معلوم می‌باشند. تابع دو متغیره $k(t,s)$ را هسته معادله انتگرال می‌نامیم که تابعی حقیقی یا مختلط می‌باشد. همچنین $\lambda \neq 0$ عددی حقیقی یا مختلط می‌باشد. با توجه به توسعه معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن یک تقسیم بندی جامع برای آنها ضرورت دارد. به خصوص اینکه از یک طرف در مسائل مختلف فیزیک و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند و از طرف دیگر راه‌هایی که جهت حل انواع مختلف این نوع معادلات ارائه شده است متفاوت هستند. با توجه به موارد بالا لازم است که دسته بندی برحسب نوع تابع مجهول در زیر علامت انتگرال و حدود تغییرات متغیر مورد نظر در انتگرال‌گیری انجام گیرد.

معادلات انتگرالی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرند، به دو نوع عمده زیر تقسیم می‌شود :

[5] Hermann Weyl

۱.۳.۱ معادلات انتگرال فردهلم

تعریف ۲.۳.۱ معادله انتگرالی که در آن دامنه انتگرال‌گیری اعداد ثابت باشد را معادله انتگرال فردهلم می‌نامیم. معادله انتگرال زیر فرم کلی معادله انتگرال فردهلم غیر خطی می‌باشد:

$$h(t)y(t) = x(t) + \lambda \int_a^b k(t, s, y(s))ds \quad . \tag{۳.۱}$$

۲.۳.۱ معادلات انتگرال فردهلم

تذکر ۳.۳.۱ اگر در معادله (۲.۱) داشته باشیم:

$$k(t, s, y(s)) = k(t, s)y(s) \quad ,$$

آنگاه آن را معادله انتگرال فردهلم خطی می‌نامیم.

۳.۳.۱ معادلات انتگرال ولترا

تعریف ۴.۳.۱ معادله انتگرالی که در آن حد بالای انتگرال‌گیری متغیر باشد را معادله انتگرال ولترا می‌نامیم. معادله انتگرال زیر فرم کلی معادله انتگرال ولترا غیرخطی می‌باشد:

$$h(t)y(t) = x(t) + \lambda \int_a^t k(t, s, y(s))ds \quad ; \qquad a \leq t \leq b \quad . \tag{۴.۱}$$

تذکر ۵.۳.۱ اگر در معادله (۳.۱) داشته باشیم:

$$k(t, s, y(s)) = k(t, s)y(s),$$

آنگاه آن را معادله انتگرال ولترا خطی می‌نامیم.

۴.۳.۱ هسته‌های $L_۲$

تعریف ۶.۳.۱ هسته $k(t,s)$ را یک هسته $L_۲$ [۱] گوییم هر گاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) $\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^۲ dtds < +\infty$.

ب) $\int_a^b |k(t,s)|^۲ ds < +\infty$ برای هر t در بازه $[a,b]$.

ج) $\int_a^b |k(t,s)|^۲ dt < +\infty$ برای هر s در بازه $[a,b]$.

در ضمن وقتی $k(t,s) \in L_۲$ باشد نرم آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\|k(t,s)\| = (\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^۲ dtds)^{\frac{۱}{۲}}.$$

۴.۱ شرط لیپشیتس

فرض کنیم $f(t)$، تابعی از R^p به R^q باشد. گوییم $f(t)$ در شرط لیپشیتس[۱] صدق می‌کند در صورتی که عدد ثابتی مانند $L > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای تمام نقاط t و s در $D(f)$،

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L\|t - s\|.$$

تعریف ۱.۴.۱ هر فضا با ضرب داخلی که نسبت به نرم القا شده به وسیله‌ی ضرب داخلی، کامل باشد فضای هیلبرت[۲] نامیده می‌شود.

---
[۱] $L_۲ - kernel$
[۱] Lipschtiz
[۲] Hilbert

تعریف ۲.۴.۱ نامساوی پارسوال[۳] : اگر $\{\psi_i | i \in I\}$ خانواده‌ی متعامد یکه از بردارهای متعلق به یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه برای هر بردار u داریم:

$$\|u\|^{۲} = \sum_{i=\circ}^{\infty} |(u, \psi_i)|,^{۲}$$

که در آن (u, ψ_i)، حاصلضرب داخلی بردار u در هر عضو از پایه متعامد یکه می‌باشد.

[۳] Parseval's identity

فصل ۲

توابع متعامد بلاک–پالس و خصوصیات آن

۱.۲ مقدمه

از آنجایی که توابع متعامد مثلثی با استفاده از توابع متعامد بلاک—پالس ساخته می‌شود، در این فصل مروری بر توابع متعامد بلاک—پالس و خواص اساسی آنها خواهیم داشت.

۲.۲ طبقه‌بندی توابع متعامد

به طور کلی توابع و چندجمله‌ای‌های متعامد به سه دسته تقسیم می‌گردند:
دسته اول شامل توابع پایه‌ای قطعه‌ای پیوسته می‌باشند، مانند توابع والش، بلاک—پالس، هار و غیره .
دسته دوم شامل چندجمله‌ای‌های پیوسته می‌باشند، مانند چند جمله‌ای‌های لژاندر، چبیشف، هرمیت، لاگر و غیره.
دسته سوم شامل توابع سینوسی و کسینوسی در سری فوریه می‌باشند. توابع سینوسی و کسینوسی، یک رده از توابع پایه‌ای پیوسته را تشکیل می‌دهند.
مشخصه اصلی روش‌های مبتنی بر توابع متعامد پیوسته و قطعه‌ای پیوسته، تقریب عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی با استفاده از مفهوم ماتریس‌های عملیاتی انتگرال است، به این صورت که ابتدا پاسخ مساله به عنوان یک تابع مجهول بر حسب توابع متعامد با ضرایب نامعین بسط داده می‌شود و سپس با استفاده از ماتریس عملیاتی، معادلات بیانگر رفتار مساله، به شکل یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیرخطی ظاهر می‌گردد که با حل این دستگاه معادلات جبری ضرایب مجهول و در نتیجه تابع جواب مساله بدست می‌آید.

۳.۲ توابع متعامد بلاک—پالس

مجموعه m عضوی از توابع متعامد بلاک—پالس $\phi_i(t)$ برای $i = ۰, ۱, ۲, \cdots, (m - ۱)$ روی بازه $[۰, T)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_i(t) = \begin{cases} ۱, & \frac{iT}{m} \leq t < \frac{(i+۱)T}{m} \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \qquad (۱.۲)$$

که در آن m یک عدد صحیح مثبت و $\phi_i(t)$، i امین تابع بلاک—پالس می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت مساله، $T = ۱$ در نظر می‌گیریم. بنابراین با فرض $h = \frac{۱}{m}$، توابع متعامد بلاک—پالس روی بازه $[۰, ۱)$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۲] , [۲۵]:

$$\phi_i(t) = \begin{cases} ۱, & ih \leq t < (i+۱)h \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$