دانشگاه شیخ بهایی

دانشگاه شیخ بهائی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

فرمول های صریح برای یافتن وزن ها

در قواعد انتگرال گیری گاوس رادو و گاوس لوباتو

پژوهشگر

نسیم فرجود

استاد راهنما

دکتر مهدی تاتاری

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه، دو روش انتگرال‌گیری عددی با دقت بالا برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال ارائه شده است. این روش‌ها، برای چندجمله‌ای‌های از درجه $2N$ و $2N+1$ یا کمتر دقیق هستند وبر اساس چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و لاگر تعمیم یافته که جواب‌های مساله اشترم لیویل[1] هستند، بیان شده‌اند. در این روش‌ها، وزن‌های درونی و مرزی w_j وابسته به گره‌های درونی و مرزی x_j با یکدیگر مقایسه می‌شوند. درنهایت عبارت‌های صریحی برای این وزن‌ها به‌دست‌آمده که این عبارت‌ها فرمول‌های صریحی برای وزن‌های قاعده انتگرال‌گیری گاوس رادو با نقطه پایانی مضاعف را نتیجه می‌دهند. هدف اصلی از ارائه این روش‌ها به‌دست آوردن مقادیر با دقت بالا برای انتگرال‌هایی است که در حل مسائل گوناگون ظاهر می‌شوند.

کلمات کلیدی: قاعده انتگرال‌گیری عددی، مساله اشترم لیویل، چندجمله‌ای‌های متعامد.

[1]- Sturm- Liouville

فهرست مطالب

فصل ۳. قواعد انتگرال‌گیری گاوس رادو و گاوس لباتو

فصل ۴. وزن‌های قاعده گاوس رادو با نقطه پایانی مضاعف

فصل ۱

پیش گفتار

۱-۱. چرا انتگرال‌گیری عددی

سابقه انتگرال‌گیری عددی به لحاظ تاریخی به دوره یونان باستان برمی‌گردد. یک مثال خوب از انتگرال‌گیری عددی در روزگار گذشته، قواعد انتگرال‌گیری یونانی[۱] برای به‌دست آوردن مساحت دایره به وسیله چندضلعی‌های منظم است که در بعضی جاها نیز حکاکی شده است. این روند به ارشمیدس[۲] در پیدا کردن کران بالا و پایین برای مقدار π کمک کرد. در طول قرن‌ها، به‌خصوص بعد از قرن ۱۶، روش‌های مختلفی از انتگرال‌گیری ارائه شده است. اهمیت اول در این بحث، روش انتگرال‌گیری تقریبی است که در آن یک انتگرال به وسیله یک ترکیب خطی از مقادیر تابع زیر انتگرال

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_n f(x_n)\,,\ -\infty \le a \le b \le +\infty,$$

تقریب زده می‌شود.

در معادله بالا، $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ، n نقطه یا گره‌ای هستند که از بازه انتگرال‌گیری انتخاب می‌شوند و عددهای $w_1 , w_2 , \ldots , w_n$ ، n وزن متناظر با این نقاط هستند.

[1]- Greek quadrature

[2]- Archimedes

گاهی اوقات، مقادیر مشتق تابع زیر انتگرال در سمت راست این معادله ظاهر می‌شود که اصطلاح قاعده انتگرال‌گیری تقریبی یا ماشینی برای این نوع از روش‌های عددی به‌کار می‌رود.

روش‌های ماهرانه ریاضی همیشه برای یافتن مقدار دقیق یک انتگرال جواب نمی‌دهند و حتی اگر جواب بدهند، ممکن است مفید نباشند. برای مثال، روش کاربردی در قضیه اساسی محاسبه انتگرال را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,,$$

که در آن $F(x)$ یک پاد مشتق $f(x)$ است.

اگر پاد مشتق به راحتی در دسترس و به اندازه کافی ساده باشد، معادله با یک محاسبه سریع امکان پذیر است. اما همانطور که می‌دانیم، روش‌های انتگرال‌گیری اغلب به توابع غیرجبری جدیدی منجر می‌شوند. به عنوان مثال، انتگرال‌گیری ساده $\int \frac{dx}{x}$ به لگاریتم تبدیل می‌شود که یک تابع غیرجبری است یا انتگرال‌گیری $\int e^{-x^2}\,dx$ که تابع اولیه آن در دست نیست.

همانطور که می‌دانیم انتگرال‌گیری عددی معمولاً زمانی به کار می‌رود که روش‌های تحلیلی با شکست مواجه می‌شوند.

در انتگرال‌گیری عددی هدف محاسبه انتگرال‌های معین به شکل

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

است وقتی که

الف) تابع اولیه f در دست نباشد.

ب) به‌دست آوردن تابع اولیه f به سادگی امکان‌پذیر نباشد.

پ) مقادیر f تنها در تعداد متناهی نقطه واقع در بازه $[a,b]$ در دست باشد. فرض کنید مقـادیر f در نقاط $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ معلوم باشد. اگر $p(x)$ چنـدجملـه‌ای درونیـاب f در ایـن نقـاط باشـد، تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx,$$

دراین‌صورت خطای انتگرال‌گیری عبارت است از

$$EI = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - p(x))\,dx = \int_a^b E(x)\,dx,$$

که $E(x)$ خطای درونیابی است.

فرمول‌های انتگرال‌گیری به دو دسته تقسیم می‌شوند، یکی فرمول‌های انتگـرال‌گیـری نیـوتن کـاتس[1] و دیگری فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوسی[2] ، که فرمول‌های انتگرال‌گیری نیـوتن کـاتس شـامل فرمـول‌هـای بسته و فرمول‌های باز هستند.

وقتی برای محاسبه

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

فرمولی به کار می‌رود که در آن از هر دو نقط a و b استفاده شود، آن فرمول را بسته می‌نامنـد، ماننـد فرمول‌های ذوزنقه‌ای[3] و سیمپسون.[4] چنانچه فرمول انتگرال‌گیری حداقل یکی از دو نقطه انتهـایی a یـا b

[1]- Newton- Cotes

[2]- Gaussian integration

[3]- Trapezoidal rule

[4]- Simpsone's rule

را شامل نباشد، آن فرمول انتگرال‌گیری را باز می‌نامند، مانند فرمول نقطه میانی[۱]. فرمول‌های نیوتن کاتس بر این اساس که نقاط گره‌ای در بازه انتگرال‌گیری هم فاصله باشند به‌دست می‌آیند.

گاوس[۲] نشان داده که اگر شرط هم فاصله بودن نقاط x_i در بازه انتگرال‌گیری حذف شود، می‌توان فرمول‌های انتگرال‌گیری با بالاترین دقت به‌دست آورد. پس هدف به دست آمدن فرمولی به صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i),$$

با این ویژگی است. در این فرمول x_iها و w_i ها را به ترتیب گره‌ها و وزن‌ها می‌نامند. حال چون $2n$ پارامتر در رابطه بالا وجود دارد، n گره x_i و n وزن w_i، این پارامترها را طوری تعیین می‌کنیم که فرمول بالا برای همه چندجمله‌ای‌های تا درجه $2n-1$ یک فرمول دقیق باشد. بدون آنکه از کلیت مساله کاسته شود، می‌توان بازه انتگرال‌گیری را $[-1,1]$ در نظر گرفت و فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوس لژاندر را به دست آورد.

با وجود سادگی مسائل و کاربردی بودن روش‌ها، انتگرال‌گیری عددی از مسائل قابل توجه ریاضیدانان محض بوده است. بیشترین توجه به این بحث زمانی ظاهر می‌شود که می‌بینیم بسیاری از دانشمندان در این زمینه همکاری داشته‌اند.

[1]- Midpoint rule

[2]- Gauss

از جمله می‌توان به ارشمیدس، کپلر[۱]، هویجنس[۲]، پلیا[۳]، اِس‌زگو[۴]، شورنبرگ[۵] ، سِبالو[۶]، نیـوتن[۷]، اویلـر[۸]، گاوس، ژاکوبی[۹]، چپیشف[۱۰]، مارکف[۱۱] و فِجِر[۱۲] اشاره کرد.

انتگرال‌گیری عددی جواب‌هایی با دقت بالا می‌دهـد. در انتگـرال‌گیـری اسـتفاده از یـک روش بـا دقـت پایین منجر به خطاهای جدی می‌شود. پس در صورت امکان، یک مسـأله بایـد قبـل از اجـرا در کـامپیوتر، تحلیل و به شکل مناسب در بیاید.

در این پایان‌نامه، قواعد و فرمول‌های بنیادی انتگرال‌گیری عـددی در فصـل ۲ آورده شـده اسـت[۷]. از دو روش انتگرال‌گیری عددی برای یافتن مقدار تقریبی یک انتگرال در فصل ۳ اسـتفاده شـده اسـت[۱]. روش گاوس رادو با نقطه پایانی مضاعف برای یافتن مقدار تقریبی انتگرال، در فصل ۴ مـورد بررسـی قـرار گرفتـه است [۲].

1- Kepler

2- Huygens

3- Polya

4- Szegö

5- Schoenberg

6- Sobolev

7- Newton

8- Euler

9- Jacobi

10- Tschbyscheff

11- Markoff

12- Fejer

فصل ۲

پیش زمینه

۲-۱. مساله اشترم لیویل

معادله دیفرانسیل به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \qquad (1.2)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ داده شده‌اند. y تابعی از x است و y' مشتق بر حسب x را نشان می‌دهد. عملگر دیفرانسیل L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L(y) = -(p(x)y')' + q(x)\,y. \qquad (2.2)$$

می‌توان معادله دیفرانسیل را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$L(y) = \lambda r(x)y, \qquad (3.2)$$

که در آن شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0\,,\ \beta_1\ y(1) + \beta_2\ y'(1) = 0\,, \qquad (4.2)$$

این مسأله مقدار مرزی را مسأله اشترم لیویل می‌نامند که کاربرد آن در فصل ۳ بیان شده است.

۲-۲. توابع وزن:

بیشتر اوقات، ما از انتگرال $\int_a^b w(x)f(x)dx$ به جای انتگرال ساده $\int_a^b f(x)dx$ استفاده می‌کنیم. در این‌جا معمولاً (امّا نه همیشه)، $w(x)$ روی بازه نامنفی تعریف می‌شود و در کل پایان‌نامه ثابت فرض شده است.

تابع $w(x)$ تابع وزن نامیده می‌شود و بیشتر اوقات نرمال شده است یعنی

$$\int_a^b w(x)dx \equiv 1. \qquad (۵.۲)$$

روی بازهٔ متناهی یا نامتناهی $[a,b]$ تابع وزن $w(x)$ مجاز نامیده می‌شود، اگر $w(x) \geq 0$ ، $x \in [a,b]$، $\int_a^b w(x)dx > 0$ و $\int_a^b w(x)x^k dx < \infty$ ، $k = 0,1,2,\ldots$. انتگرال $\int_a^b w(x)f(x)dx$ می‌تواند به عنوان میانگین وزنی $f(x)$ نیز بیان شود.

۳-۲. چندجمله‌ای‌های متعامد

مجموعه چندجمله‌ای‌های متعامد نقش قابل توجهی در انتگرال گیری عددی دارد.

یک فضای خطی حقیقی از توابع $\mathcal{F}$ داده شده است، ضرب داخلی (f,g) تعریف شده روی $\mathcal{F}$ یک تابع دو خطی از $f,g \in \mathcal{F}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند

$(a)\ (f+g,h) = (f,h) + (g,h),$

$(b)\ (\alpha f,g) = \alpha (f,g), \qquad \alpha \in \Re,$

$(c)\ (f,g) = (g,f),$

$(d)\ (f,f) > 0, \quad f \neq 0.$

مثال ۱.۲:

فرض کنید $\mathcal{F}=C[a,b]$. فرض کنید $w(x)\geq 0$ انتگرال پذیر ریمان روی $[a,b]$ با $\int_a^b w(x)dx>0$ باشد آنگاه

$$(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx, \tag{۶.۲}$$

یک ضرب داخلی برای $\mathcal{F}$ است.

مثال ۲.۲:

فرض کنید $\mathcal{F}=\wp_n$، که $\wp_n$ مجموعه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n است و نقاط $x_0,x_1,\ldots,x_n$ مجزا باشند و $w_0,w_1,\ldots,w_n>0$ آنگاه

$$(f,g)=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)g(x_i),$$

یک ضرب داخلی برای $\mathcal{F}$ است.

اگر $f_0,f_1,\ldots$ یک مجموعه متناهی یا نامتناهی از عناصر $\mathcal{F}$ باشد به قسمی که

$$(f_i,f_j)=0, \qquad i\neq j, \tag{۷.۲}$$

آنگاه مجموعه فوق را متعامد نامیم. همچنین اگر

$$(f_i,f_i)=1, \qquad i=0,1,2,\ldots, \tag{۸.۲}$$

آن‌گاه مجموعه متعامد یکه نامیم.

یک مجموعه از چندجمله‌ای‌های $\{f_i\}$، که در آن درجه f_i برابر i است و در رابطه (۷.۲) صدق کند، یک مجموعه از چندجمله‌ای‌های متعامد برحسب ضرب داخلی (f,g) نامیده می‌شود.

هر دنباله مستقل خطی از توابع $\mathcal{F}$ می‌تواند برحسب یک ضرب داخلی در $\mathcal{F}$ متعامد شود. بنابراین، با تابع وزن مجاز $w(x)$ که روی بازه متناهی یا نامتناهی $[a,b]$ داده شده، می‌توانیم توان‌هایی از x را برحسب ضرب داخلی (۶.۲) متعامد کنیم و به یک مجموعه یکتا از چندجمله‌ای‌های $P_n^*(x)$ برسیم، که درآن درجه P_n^* برابر با n است، به عبارت دقیق‌تر داریم

$$\int_a^b w(x)p_n^*(x)p_m^*(x)dx = \delta_{mn} = \begin{cases} ۰ & m \neq n \\ ۱ & m = n \end{cases}. \tag{۹.۲}$$

چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک با وزن‌ها و بازه‌های مخصوص به‌صورت زیر هستند:

نام	نماد	تابع وزن	بازه
لژاندر	$P_n(x)$	۱	$[-۱,۱]$
چپیشف نوع اول	$T_n(x)$	$(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$	$[-۱,۱]$
چپیشف نوع دوم	$U_n(x)$	$(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$	$[-۱,۱]$
فوق کروی	$C_n^{\mu}(x)$	$(۱-x^۲)^{\mu-\frac{۱}{۲}}, \mu > -\frac{۱}{۲}$	$[-۱,۱]$
ژاکوبی	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$(۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}\ \alpha,\beta > -۱$	$[-۱,۱]$
لاگر	$L_n(x)$	e^{-x}	$[۰,\infty)$
لاگرتعمیم یافته	$L_n^{\alpha}(x)$	$x^{\alpha}e^{-x}$	$[۰,\infty)$
هرمیت	$H_n(x)$	$e^{-x^۲}$	$(-\infty,\infty)$

جدول ۱: چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک، توابع وزن و بازه‌های انتگرال‌گیری

چندجمله‌ای‌های متعامد برحسب ضرب داخلی (۶.۲) در نوع دوم از تعامد که تعامد گسسته نامیده می‌شود، صدق می‌کنند.

فرض کنید $p_0(x), p_1(x),\dots, p_n(x)$ ، چندجمله‌ای‌های متعامد یکه متناظر با تابع وزن $w(x)$ روی $[a,b]$ باشند. فرض کنید که $x_1, x_2,\dots, x_{n+1}$ ، $n+1$ صفر $p_{n+1}(x)$ و $w_1, w_2,\dots, w_{n+1}$ وزن‌های گاوسی متناظر باشند، آنگاه به‌وسیله قضیه اساسی انتگرال‌گیری گاوسی به ازای هر تابع f در $\wp_{2n+1}$ داریم

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} w_i f(x_i).$$

اکنون برای $j,k \le n$ داریم $f(x) = p_j(x)p_k(x) \in \wp_{2n+1}$ به‌طوری که

$$\sum_{i=1}^{n+1} w_i p_j(x_i)p_k(x_i) = \int_a^b w(x)p_j(x)p_k(x)dx = \delta_{jk}. \qquad (۱۰.۲)$$

بنابراین $p_0, p_1,\dots, p_n$ روی صفرهای p_{n+1} برحسب وزن‌های گاوسی متعامد یکه هستند یعنی، برحسب ضرب داخلی

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)g(x_i). \qquad (۱۱.۲)$$

بنابراین با توجه به مثال‌های (۱.۲) و (۲.۲) و با قرار دادن $f(x) = p_j(x)p_k(x)$ ، به این نتیجه می‌رسیم که اگر با چندجمله‌ای‌های $1, x, x^2,\dots, x^n$ ، شروع و آنها را برحسب ضرب داخلی گسسته (۱۱.۲) متعامد یکه کنیم، چندجمله‌ای‌های متعامد یکه برحسب ضرب داخلی پیوسته (۶.۲) به‌دست می‌آیند[۷].

۲-۴. انتگرال‌گیری تقریبی روی یک بازه متناهی

۲-۴-۱. قواعد شبیه به مجموع های ریمان

با توجه به تعریف انتگرال ریمان ، اگر بتوانیم نقاط $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ را پیدا کنیم به قسمی که

$$x_1 - x_0 = w_1, \ldots, x_n - x_{n-1} = w_n, \qquad x_{i-1} < \xi_i < x_i,$$

آن‌گاه فرمول انتگرال‌گیری به شکل زیر

$$\int_a^b f(x)\ dx \ \approx \sum w_i f(\xi_i),$$

یک مجموع ریمان است.

قواعد زیادی به عنوان مجموع‌های ریمان شناخته می‌شوند. قاعده ذوزنقه‌ای، قاعده سیپمسون و قواعد نیوتن کاتس (بسته) از مرتبه $n = 4,5,6,7$، همه مجموع ریمان هستند.

قواعد گاوس G_n، از همهٔ مراتب نیز مجموع ریمان هستند.

۲-۴-۲. قواعد مرکب

یک قاعده انتگرال‌گیری ممکن است به یک بازه دلخواه انتقال پیدا کند. به عنوان مثال فرض کنید قاعده زیر را داشته باشیم

$$R(F) = \sum_{k=1}^{n} w_k\, f(x_k) \approx \int_0^1 f(x)\ dx\ , \ 0 \le x_k \le 1\ , \tag{۱۲.۲}$$

که در بازه $[0,1]$ نوشته شده است. این قاعده ممکن است به بازه $[a,b]$ انتقال داده شود. تبدیل $y = a + (b-a)x$ بازه $[0,1]$ را به $[a,b]$ تبدیل می‌کند. گره‌های x_k به $a + (b-a)x_k$ و وزن‌های w_k به $w_k(b-a)$ تبدیل می‌شوند.

بنابراین

$$R(F) = (b-a)\sum_{k=1}^{n} w_k \; f\,(a + (b-a)\; x_k) \approx \int_a^b f\,(x)\; dx. \tag{۱۳.۲}$$

یک قاعده مرکب زمانی به‌وجود می‌آید که بازه انتگرال‌گیری به زیربازه‌های مساوی تقسیم می‌شود و یک قاعده ثابت انتگرال‌گیری برای هر زیربازه به‌کار می‌رود. قاعده‌های ذوزنقه‌ای مرکب $T_n\;(f)$، نقطه میانی مرکب $M_n\;(f)$ و سیمپسون مرکب مثال‌هایی از قواعد مرکب هستند.

تعریف ۳-۲:

اگر R یک قاعده انتگرال تقریبی با استفاده از m نقطه را نشان دهد، آن گاه $n \times R$ قاعده mn نقطه‌ای را نشان می‌دهد که از تقسیم بازه انتگرال‌گیری به n زیر بازه مساوی نتیجه می‌شود و R برای هر یک از آنها به‌کار می‌رود.

اکنون بازه $[a,b]$ را به n زیربازه مساوی به صورت زیر تقسیم می‌کنیم

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{۱۴.۲}$$

آن گاه از قاعده R به‌کار برده شده برای i امین زیربازه $[x_{i-1}\;,\; x_i]$ داریم

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,(x)\; dx = \frac{(b-a)}{2\,n} \sum_{k=1}^{m} w_k\, f\,(y_{k_i}), \tag{۱۵.۲}$$

که در آن

$$y_{ki} = x_{i-1} + \frac{(b-a)}{2n}\left(1+t_k\right), \quad i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n. \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین، با قاعده $n \times R$ به‌کار برده شده در بازه $[a,b]$ داریم

$$(n \times R)\,(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{m} w_k\, f(y_{ki}) \qquad (17.2)$$

$$= \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} w_k\, f(x_{ki}) \approx \int_a^b f(y)\, dy.$$

۲-۴-۳. فرمول های انتگرال گیری از نوع درونیاب

این فرمول‌ها در به‌دست آوردن w_jها کاربرد فراوان دارند. فرض کنید می‌خواهیم فرمول‌های انتگرال‌گیری تقریبی را به‌صورت زیر توسعه دهیم

$$\int_a^b k(x)\, f(x)\, dx \approx \sum_{j=0}^{n} w_j\, f(x_j). \qquad (18.2)$$

نقاط $x_0\, , x_1\, , \ldots\, , x_n$، ثابت هستند و تابع $k(x)$ یک تابع وزن ثابت است که لزوماً مثبت نیست.

دو راه برای به‌دست آوردن ثابت‌های w_j پیشنهاد می‌شود:

۱) درون‌یابی تابع $f(x)$ در $n+1$ نقطه $x_0\, , x_1\, , \ldots\, , x_n$، به وسیله یک چندجمله‌ای از درجه n و انتگرال‌گیری از چندجمله‌ای درون‌یاب و بیان آن به‌شکل (۱۸.۲).

۲) ثابت های $w_0\, , w_1\, , \ldots\, , w_n$ را طوری انتخاب کنید که خطای

$$E(f) = \int_a^b k(x)\, f(x)\, dx - \sum_{j=0}^{n} w_j\, f(x_j), \qquad (19.2)$$

برای $f(x)=1\, , x\, , x^2\, , \ldots\, , x^n$، صفر شود.

این دو روش فرمول‌های یکسانی ایجاد می‌کند، که فرمول انتگرال‌گیری تقریبی از نوع درونیاب نامیده می‌شود[۷].

۲-۴-۴: فرمول های انتگرال‌گیری درونیاب روی مجموعه‌ای از نقاط

گاهی اوقات چه از لحاظ نظری و چه کاربردی، داشتن فرمول‌های درونیابی روی مجموعه‌ای از نقاط به جای مجموعه‌های هم‌فاصله مفید است. یک انتخاب معمول از این نوع مجموعه‌ها، مجموعه صفرهای یک چندجمله‌ای متعامد است.

فرض کنید چندجمله‌ای‌های $p_0(x)\ ,\ p_1(x),\ldots$، بر حسب ضرب داخلی $(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx, w(x)\geq 0$، متعامد و $n\ ,\ x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n$ صفر از $p_n(x)$ باشند. با این نقاط می‌توانیم فرمول‌های انتگرال‌گیری درونیاب متناظر با انتگرال $\int_a^b k(x)f(x)dx$ ایجاد کنیم، یعنی قواعد به‌قسمی که

$$\int_a^b k(x)f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k), \qquad f\in \wp_{n-1}. \qquad (۲.۲۰)$$

توجه کنید زمانی که $k(x)=w(x)$ باشد، با قواعد گاوسی سروکار داریم و فرمول بالا برای $f\in\wp_{2n-1}$ موجود است.

۲-۵. قواعد انتگرال‌گیری گاوسی:

فرض کنید $w(x)$ یک تابع وزن مجاز مشخص روی بازه $[a,b]$ باشد که ممکن است این بازه متناهی یا نامتناهی باشد. همانطور که می‌دانیم انتگرال

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx=(f,g), \qquad (۲۱.۲)$$

ضرب داخلی توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی بازه $[a,b]$ برحسب تابع وزن $w(x)$ است.

دو تابع f و g روی $[a,b]$ برحسب تابع وزن $w(x)$ متعامد نامیده می‌شوند اگر

$$(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx=0. \qquad (۲۲.۲)$$

برای وزن داده شده $w(x)$ می‌توانیم یک دنباله از چندجمله‌ای‌های $p_0(x),p_1(x),...$ تعریف کنیم، که نسبت به ضرب (۲۱.۲) متعامد هستند، یعنی

$$(p_m,p_n)=\int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)\,dx=0, \qquad m\neq n. \qquad (۲۳.۲)$$

با ضرب هر $p_n(x)$ در یک ثابت مناسب می‌توانیم یک مجموعه از چندجمله‌ای‌های p_n^* را تولیـد کنـیم که متعامد یکه هستند، یعنی

$$(p_m^*,\ p_n^*)=\int_a^b w(x)\,p_m^*(x)\,p_n^*\ (x)\,dx=\delta_{mn}=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n\end{cases}. \qquad (۲۴.۲)$$

ضریب پیشرو p_n^* می تواند مثبت باشد یعنی:

$$p_n^*(x)=k_nx^n+....,\qquad k_n>0. \qquad (۲۵.۲)$$

قضیه ۲.۴:

صفرهای چندجمله‌ای متعامد $p_n(x)$ ، حقیقی و ساده هستند و داخل بازه $[a,b]$ قرار دارند[۷].

قضیه ۲.۵:

چندجمله‌ای‌های متعامد یکه $p_n^*(x)$ در رابطه بازگشتی سه گامی زیر صدق می‌کنند

$$p_n^*\ (x)=(a_nx+b_n)\,p_{n-1}^*(x)-C_n\ \ p_{n-2}^*\ (x)\,,\qquad n=1,2,3,...., \qquad (۲۶.۲)$$