دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

نامعادلات گسسته هالانای و کاربردهایش

نگارنده

زهره درزی خلردی

استاد راهنما

دکتر رضا معمارباشی

استاد مشاور

دکتر علی غفاری

زمستان ۱۳۹۰

سپاس بی‌حد خدای را که هر چه دارم از رحمت بی انتهای اوست و زبان قاصر از شکرگزاریش می‌باشد. بی‌شک این پروژه بدون یاریش به اتمام نمی‌رسید. خدارا شاکر و از او می خواهم، همواره مرا از دریای بیکران علم و معرفتش سیراب نماید.

قدردانی و تشکر

در ابتدا لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام و کلیه کسانی که در دوران تحصیل مشوق و پشتیبان اینجانب بودند کمال تشکر را بنمایم. همچنین از زحمات اساتید محترم دانشگاه سمنان و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر رضا معمارباشی که با راهنمایی‌های خود راهگشای اینجانب بودند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

تقدیم به :

پدر مهربان و مادر صبورم

چکیده.

در این پایان نامه، ابتدا به معرفی وبررسی تعدادی از انواع نامعادلات گسسته هالانای می پردازیم . سپس با استفاده از این نامعادلات جاذبیت سراسری ومجانبی و همچنین جاذبیت نمایی معادلات تفاضلی غیر خطی را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادله تفاضلی – – جاذب فراگیر – جاذب نمایی – نامعادلات هالانای

مقدمه

این پایان نامه شامل چهار فصل است:

در فصل اول، به معرفی مفاهیم و قضایای مورد نیاز که در فصول بعدی نقش بسزایی دارند، پرداخته شده‌است.

در فصل دوم، قضیه ای را بیان می کنیم که شرایط پایداری مجانبی معادلات تفاضلی ماکسیمم که ارتباط تنگاتنگی با نامعادلات گسسته هالانای دارند را مورد بررسی قرار می دهد. ودر پایان فصل کاربردی از قضیه نشان داده می شود.

در فصل سوم،معادلات تفاضلی غیر خطی را با استفاده از نامعادلات هالانای بررسی نموده وشرایط جدیدی را برای جاذبیت سراسری این معادلات بدست می آورید.

در فصل چهارم،جاذبیت سراسری انواع دیگری از معادلات تفاضلی را مورد بررسی قرار می دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ معادله‌ای به شکل

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{۱.۱}$$

که در آن $f : I \longrightarrow I$ تابعی پیوسته و $I \subseteq \mathbb{R}$ است، را معادله تفاضلی مرتبه‌ی یک روی I گوییم و x_0 را یک مقدار اولیه می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $x_0 \in \mathbb{R}$ یک مقدار اولیه معادله بالا باشد در اینصورت دنباله $\{f^n(x_0)\}$ جواب معادله فوق است.

تعریف ۳.۱.۱ معادله‌ای به شکل

$$x_{n+1} = f(x_n, \ldots, x_{n-k}) \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{۲.۱}$$

که در آن $f : I^{k+1} \longrightarrow I$ تابعی پیوسته، k عددی صحیح و نامنفی و $I \subseteq \mathbb{R}$ است را، معادله تفاضلی مرتبه $k + 1$ می‌نامیم و $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k}$ مقادیر اولیه هستند.

تعریف ۴.۱.۱ اگر $x_\circ \in \mathbb{R}$ یک مقدار اولیه معادله بالا باشد در اینصورت دنباله $\{f^n(x_\circ)\}$ جواب معادله فوق است.

تعریف ۵.۱.۱ اگر f خطی باشد معادله‌ی (۱.۱) را معادله تفاضلی خطی مرتبه‌ی یک می‌نامیم که به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$x(n+1) + p_\circ x(n) + p_1 = \circ$$

$p_\circ$ و p_1 اعدادی ثابت هستند.

تعریف ۶.۱.۱ اگر f خطی باشد معادله (۲.۱) را معادله تفاضلی خطی مرتبه‌ی $k+1$ می‌نامیم که به شکل زیر تغییر می‌یابد.

$$\sum_{i=\circ}^{k} p_i x(n-i) = \circ$$

توجه کنید که $x(n) = x_n$ است.

تعریف ۷.۱.۱ نقطه‌ی $\bar{x}$، نقطه ثابت نگاشت f، یا نقطه تعادلی معادله (۱.۱) نامیده می‌شود اگر $f(\bar{x}) = \bar{x}$ باشد.

تعریف ۸.۱.۱ نقطه $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x})$، نقطه ثابت نگاشت $f : I^{k+1} \to I$ ، یا نقطه تعادلی معادله تفاضلی مرتبه $k+1$ است اگر $f(\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x}) = \overline{x}$ باشد.

تعریف ۹.۱.۱ نگاشت $f : I \longrightarrow I$ را در نظر بگیرید. اگر $x_\circ \in I$ باشد مدار نقطه $x_\circ$ را با $o(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$o(x_\circ) = \{x_\circ, f(x_\circ), f^2(x_\circ), \dots\}$$

توجه کنید که اگر $\bar{x}$ نقطه ثابت نگاشت f باشد $o(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱ معادله (۱.۱) را در نظر بگیرید. نقطه‌ی $\bar{x}$ را نقطه تناوبی f می‌نامیم اگر عدد طبیعی k موجود باشد بطوریکه $f^k(\bar{x}) = \bar{x}$. ($\bar{x}$ نقطه ثابت f^k می‌باشد.)

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر $\bar{x}$ یک نقطه متناوب مرتبه‌ی k باشد در اینصورت $o(\bar{x})$ را یک k − دور یا k − سیکل می‌نامند.

$$o(\bar{x}) = \{\bar{x}, f(\bar{x}), f^{۲}(\bar{x}), \ldots, f^{k-۱}(\bar{x})\}$$

۲.۱ نظریه پایداری

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $f : I \longrightarrow I$ یک نگاشت پیوسته، $I \subseteq \mathbb{R}$ و $\bar{x}$ یک نقطه ثابت f باشد. دراینصورت،

۱) . $\bar{x}$ پایدار نامیده می‌شود اگر

$$\forall\, \epsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰\ ;\ |x_{۰} - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f^n(x_{۰}) - \bar{x}| < \epsilon$$

برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$.

و اگر $\bar{x}$ پایدار نباشد، ناپایدار نامیده می‌شود.

۲) . $\bar{x}$ جاذب نامیده می‌شود اگر

$$\exists\ \eta > ۰\ ;\ |x_{۰} - \bar{x}| < \eta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_{۰}) = \bar{x}$$

۳) . $\bar{x}$ پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر هم پایدار و هم جاذب باشد.

اگر در (۲) $\eta = \infty$ باشد، در اینصورت $\bar{x}$، پایدار مجانبی فراگیر نامیده می‌شود.

حال پایداری، پایدار مجانبی و نقطه جاذب را برای معادلات با مراتب بالاتر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ یک نگاشت پیوسته و $\bar{X}$ یک نقطه ثابت f باشد. آنگاه،

۱) . $\bar{X}$ پایدار نامیده می‌شود اگر

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\ ;\ \|X - \bar{X}\| < \delta \Rightarrow \|f^n(X) - \bar{X}\| < \epsilon$$

برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$.

که $X = (x_n, \dots, x_{n-k})$. اگر $\bar{X}$ پایدار نباشد، ناپایدار نامیده می‌شود.

۲) . $\bar{X}$ جاذب نامیده می‌شود اگر

$$\exists\ \eta > 0 \quad ; \quad \|X - \bar{X}\| < \eta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(X) = \bar{X}$$

اگر $\eta = \infty$ باشد، جاذب فراگیر نامیده می‌شود.

۳) . $\bar{X}$ پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر هم پایدار و هم جاذب باشد.

۴) . $\bar{X}$ پایدار مجانبی فراگیر نامیده می‌شود، اگر هم پایدار و هم جاذب فراگیر باشد.

در بعضی مراجع پایدار مجانبی فراگیر، پایدار فراگیر نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ جواب $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ از معادله‌ی (۲.۱)، غیرنوسانی در اطراف نقطه‌ی تعادل $\bar{x}$ نامیده می‌شود، اگر وجود داشته باشد $N \geq -k$ بطوریکه

$$\forall \ \ n \geq N \quad ; \quad x_n > \bar{x}$$

یا

$$\forall \; n \geq N \quad ; \quad x_n < \bar{x}$$

در غیر اینصورت، $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ نوسانی در اطراف نقطه تعادل $\bar{x}$ نامیده می‌شود.

در ادامه محکهای تشخیص نقاط تعادلی پایدار را معرفی می‌کنیم. ابتدا به معادله مرتبه یک می‌پردازیم:

تعریف ۴.۲.۱ نقطه ثابت $\bar{x}$ از نگاشت f هذلولولی نامیده می‌شود اگر $|f'(\bar{x})| \neq 1$. در غیر اینصورت ناهذلولولی نامیده می‌شود.

قضیه ۵.۲.۱ اگر $\bar{x}$ نقطه ثابت هذلولولی نگاشت f باشد و f در $\bar{x}$ بطور پیوسته مشتق پذیر باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) . اگر $|f'(\bar{x})| < 1$، آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

۲) . اگر $|f'(\bar{x})| > 1$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت از نگاشت f باشد بطوریکه $f'(\bar{x}) = 1$. اگر $f'''(\bar{x}) \neq 0$ و پیوسته باشد، آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

۱) . اگر $f''(\bar{x}) \neq 0$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

۲) . اگر $f''(\bar{x}) = 0$ و $f'''(\bar{x}) > 0$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

۳) . اگر $f''(\bar{x}) = 0$ و $f'''(\bar{x}) < 0$، آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

تعریف ۷.۲.۱ مشتق شوارتزی [۱] یک تابع را با Sf نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{۳}{۲}[\frac{f''(x)}{f'(x)}]^{۲}$$

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه ثابت نگاشت f باشد بطوریکه $f'(\bar{x}) = -۱$. اگر $f'''(\bar{x})$ پیوسته باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) . اگر $(Sf)(\bar{x}) < ۰$، آنگاه $\bar{x}$ پایدار مجانبی است.

۲) . اگر $(Sf)(\bar{x}) > ۰$، آنگاه $\bar{x}$ ناپایدار است.

قضیه ۹.۲.۱ فرض کنید $r > ۰$, $\{x_n\}_{n\geq -r}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد که در نامعادله زیر صدق می کند:

$$\triangle x_n \leq \text{-a}x_n + \text{b}\ \max\{x_n, x_{n-۱}, ..., x_{n-r}\} \qquad (۱.۱)$$

اگر $۰ < b < a \leq 1$ آنگاه $\lambda_۰ \in (۰, ۱)$ وجود دارد به طوری که

$$x_n \leq \max\{۰, x_۰, x_-۱, ..., x_-r\}\lambda_۰^n$$

علاوه بر این $\lambda_۰$ می تواند از کوچکترین ریشه معادله

$$\lambda^{r+۱} + (\text{a-1})\lambda^r \text{-b=0} \qquad (۱.۲)$$

دربازه (0,1) بدست بیاید.

برهان: فرض کنیم $\{y_n\}$ جوابی از معادله تفاضلی زیر باشد.

$$\triangle y_n = \text{-a}y_n + \text{b}\ \max\{y_n, y_{n-۱}, ..., y_{n-r}\} \qquad n \geq ۰$$

و $۱ - a \geq ۰$ و $b > ۰$ (با توجه به فرض $۰ < b < a \leq 1$ برقرار است.)

اگر $\{x_n\}$ در رابطه $x_{n+۱} \leq (\text{1-a})x_n + \text{b}\ \max\{x_n, x_{n-۱}, ..., x_{n-r}\}$

$n = -r, ..., ۰$ $x_n \leq y_n$ صدق کند.

---
[۱] Schwarzian derivative

آنگاه برای تمام $n \geq 0$ های این روابط برقرار است زیرا

$x_{-r} \leq y_{-r}$

$x_{-r+1} \leq y_{-r+1}$

$x_{0} \leq y_{0}$

برقرار است حال برای $\{x_1\}$ داریم:

$$x_1 \leq (1\text{-a})x_0 + \text{b } \max\{x_0, x_{-1}, ..., x_{-r}\}$$

با توجه به روابط بالا رابطه زیر بدست می آید:

$$x_1 \leq (1\text{-a})y_0 + \text{b } \max\{y_0, y_{-1}, ..., y_{-r}\}$$

در نتیجه $x_1 \leq y_1$ با ادامه این روند $x_n \leq y_n$ برای تمام $n \geq 0$ ها برقرار است. حال اگر $k > 0$ و $\lambda \in (0, 1)$ باشد دنباله $\{y_n\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$y_n = k\lambda^n$

با جایگذاری این عبارت می بینیم که دنباله $\{y_n\}$ تعریف شده جوابی از معادله

$$\triangle y_n = \text{-a}y_n + \text{b } \max\{y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-r}\} \qquad n \geq 0$$

است اگروتنها اگر $\lambda \in (0, 1)$ جوابی از معادله زیر باشد:

$\lambda^{r+1} + (\text{a-1})\lambda^r \text{-b} = 0$

قرار می دهیم $F(\lambda) = \lambda^{r+1} + (\text{a-1})\lambda^r\text{-b}$ و F روی بازه $[0, 1]$ پیوسته است . بعلاوه

$\lim \lambda \to 0^+ F(\lambda) = -b < 0$

$F(1) = a - b > 0$ بنابراین λ_0 هست به طوری که $F(\lambda_0) = 0$.

برای این λ_0 وبرای $k > 0$ دلخواه $y_n = k\lambda_0^n$ جوابی از معادله زیر است :

$$\triangle y_n = \text{-a}y_n + \text{b } \max\{y_n, y_{n-1}, ...y_{n-r}\} \qquad n \geq 0$$

فرض می کنیم $k= \max\{x_n, x_{n-1}, ...x_{n-r}\}$ لذا با توجه به قسمت اول برهان $n = -r, ..., 0$ $x_n \le y_n$ با بنابراین داریم $x_n \le y_n = k\lambda_0^n$ برای تمام $n \ge 0$ ها.در اینجا برهان کامل می شود.

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید که $0 < a \le 1$ و ثابت مثبت $b < a$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(x_n, ..., x_{n-r}) \in R^{r+1}$

$$|f(n, x_n, ..., x_{n-r})| \le b||(x_n, ..., x_n - r)||_\infty \qquad n \ge 0 \qquad (1.3)$$

آنگاه $\lambda_0 \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که برای هرجواب $\{x_n\}$ از معادله

$$\triangle x_n = -ax_n + bmax\{x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-r}\} \qquad a > 0 \qquad (1.4)$$

رابطه زیر برقرار است که در آن λ_0 می تواند به فرمی که در قضیه ۱ بیان شد محاسبه شود.

$$|x_n| \le (\max\{|x_i|\})\lambda_0^n$$

برهان: فرض کنیم $\{x_n\}$ جوابی از معادله زیر باشد.

$$x_{n+1} = (1-a)x_n + b\max\{x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-r}\} \qquad a > 0$$

می دانیم که

$$x_n = (1-a)^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1-a)^{n-i-1} f(i, x_i, ..., x_{i-r})$$
$$x_1 = (1-a)^1 x_0 + \sum_{i=0}^{1-1} (1-a)^{1-0-1} f(0, x_0, ..., x_{-r})$$
$$x_2 = (1-a)^2 x_0 + \sum_{i=0}^{2-1} (1-a)^{2-i-1} f(i, x_i, ..., x_{i-r})$$

با ادامه روند مشاهده می شود که عبارت بالا برای x_n برقرار است. حال با استفاده از فرض

$$|f(n, x_n, ..., x_{n-r})| \le b||(x_n, ..., x_n - r)||_\infty \qquad n \ge 0$$

داریم :

$$|x_n| \le (1-a)^n |x_0| + \sum_{i=0}^{n-1} (1-a)^{n-i-1} bmax\{|x_i|, |x_{i-1}|, ..., |x_{i-r}|\}$$

چون تعداد متناهی است $||_\infty$ $||$ برابر max می شود. تعریف می کنیم :

$$v_n = |x_n| \quad n = -r, ..., 0$$

$$|v_n| = (1-a)^n |x_0| + \sum_{i=0}^{n-1} (1-a)^{n-i-1} b max\{|x_i|, |x_{i-1}|, ..., |x_{i-r}|\} \qquad n > 0$$

$$|x_n| \leq v_n \; n > 0$$

حال با استفاده از قضیه قبل داریم:

$$\triangle v_n = -av_n + b max\{|x_n|, |x_{n-1}|, ..., |x_{n-r}|\} \leq -av_n + b max\{v_n, v_{n-1}, ..., v_{n-r}\}$$

لذا نتیجه می شود:

$$|x_n| \leq v_n \leq (max\{|v_i|\})\lambda_0^n = (max\{|x_i|\})\lambda_0^n$$

فصل ۲

تعمیم یافته نامعادلات گسسته هالانای وجاذبیت سراسری معادلات تفاضلی

در این بخش ما حالت کلی نامعادلات گسسته هالانای را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\triangle u_n \leq -Au_n + B\widetilde{u_n} + Cv_n + D\widehat{v_n} \qquad (۲.۱)$$

$$u_n \leq (۱-A)^n u_\circ + \sum_{i=\circ}^{n-۱} (۱-A)^{n-i-۱}[B\widetilde{u}_i + Cv_i + D\widehat{v}_i] \qquad \text{n}\geq 0 \quad (۲.۲)$$

$$v_n \leq Eu_n + F\widetilde{u_n} \qquad \text{n}\geq \circ \qquad (۲.۳)$$

$$\widetilde{u_n}=\max\{u_n, ..., u_{n-r}\} \qquad \widehat{v_n}=\max\{v_{n-۱}, ..., v_{n-r}\} \qquad \text{r}\geq ۱$$

که در آن :

$\triangle u_n = u_{n+۱} - u_n$ وA,B,C,D,E,F ثابت های حقیقی هستند و$v=\{v_n\}_{n\geq -r}$ $u=\{u_n\}_{n\geq -r}$

اگر A≤1 با استقرا ثابت می شود که اگر زوج (u,v) در معادله (۲.۱) صدق کندآنگاه در معادله (۲.۲) هم صدق می کند:

برهان: برای حالت A≤1 داریم:

$$\triangle u_۱ \leq -Au_\circ + B\widetilde{u_\circ} + Cv_\circ + D\widehat{v_\circ}$$

$$u_1 \leq (1-A)^1 u_0 + \sum_{i=0}^{1-1} (1-A)^{1-0-1} [B\widetilde{u_0} + Cv_0 + D\widehat{v_0}] \qquad n\geq 0$$

فرض می کنیم که برای n برقرار باشد با جای گذاری u_n از فرض استقرا برای $n+1$ برقرار است.

$$\triangle u_n \leq -Au_n + B\widetilde{u_n} + Cv_n + D\widehat{v_n} \qquad (2.1)$$

$$u_n \leq (1-A)^n u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1-A)^{n-i-1} [B\widetilde{u_i} + Cv_i + D\widehat{v_i}] \qquad n\geq 0 \qquad (2.2)$$

قضیه ۱۱.۰.۲ فرض می کنیم که (u,v) در دستگاه نامعادلات زیر صدق کنند:

$$u_n \leq (1-A)^n u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1-A)^{n-i-1} [B\widetilde{u_i} + Cv_i + D\widehat{v_i}] \qquad n\geq 0 \qquad (2.2)$$

$$v_n \leq Eu_n + F\widetilde{u_n} \qquad n\geq 0 \qquad (2.3)$$

اگر A,B,C,D,E,F≥0 و $FD+B>0$ و $E+F>0$ و

$$B+(E+F)(C+D) < A \leq 1 \qquad (2.4)$$

آنگاه ثابت های $k_1,k_2 \geq 0$ و $\lambda_0 \in (0,1)$ وجود دارد به طوری که :

$$u_n \leq k_1\lambda_0^n \text{ و } v_n \leq k_2\lambda_0^n \qquad n\geq 0$$

علاوه بر این λ_0 می تواند کوچکترین ریشه

$$h(\lambda)=\lambda^{2r+1}-(1-A+CE)\lambda^{2r}-(B+FC+ED)\lambda^r-FD=0 \qquad (2.5)$$ از

بازه (0,1) باشد.

برهان:

فرض می کنیم (x,y) جوابی از دستگاه (۱) باشد:

$$x_n = (1-A)^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1-A)^{n-i-1} [B\widetilde{x_i} + Cy_i + D\widehat{y_i}] \qquad n\geq 0$$

$$y_n = Ex_n + F\widetilde{x_n} \qquad n\geq 0 \qquad (1)$$

اگر $A\leq 1$ با استقرا ثابت می شود که اگر$u_n\leq x_n$ و$v_n\leq y_n$ برای $n=-r,...۰$ آنگاه $u_n\leq x_n$ $v_n\leq y_n$ برای تمام $n\geq 0$ ها.

برای $n=۱$ داریم :

$$u_۱ \leq (۱-A)^۱u_۰ + \sum_{i=۰}^{۱-۱}(۱-A)^{۱-۰-۱}[B\widetilde{u_۰} + Cv_۰ + D\widehat{v_۰}] \qquad n\geq 0$$

$$x_۱ = (۱-A)^۱x_۰ + \sum_{i=۰}^{n-۱}(۱-A)^{۱-۰-۱}[B\widetilde{x_i} + Cy_۰ + D\widehat{y_۰}]$$

$$v_۱ \leq Eu_۱ + F\widetilde{u_۱}$$

$$y_۱=Ex_۱+F\widetilde{x_۱} \qquad n\geq 0$$

با ادامه روند برای n ثابت می شود . زیرا با توجه به فرض $n=-r,...,۰$, $x_n \leq u_n$ و $y_n \leq v_n$ برقرار بود .

$$\triangle x_n = -Ax_n + B\widetilde{x_n} + Cy_n + D\widehat{y_n}$$

$$y_n=Ex_n+F\widetilde{x_n} \qquad n\geq 0 \qquad (۲)$$

تحت مفروضات قضیه عبارتی به فرم

$y_n=\alpha\lambda_۰^n$ و $x_n=\lambda_۰^n$

که $\alpha > ۰$ و$\lambda_۰ \in (۰,۱)$ جوابی از دستگاه (۲) است اگروتنها اگر α و$\lambda_۰$ جوابی از دستگاه زیر باشد:

$$\lambda_۰^{n+۱}=(1-A)\lambda_۰^n+B\lambda_۰^{n-r}+C\alpha\lambda_۰^n+D\alpha\lambda_۰^{n-r}$$

$$\alpha\lambda_۰^n=E\lambda_۰^n+F\lambda_۰^{n-r} \qquad (۳)$$