بسم الله الرحمن الرحيم

۱٤۱۷٤۸

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

زیر مدولهای به طور ضعیف اول

از :

فرشته احمدی فتلکی

استاد راهنما :

دکتر حبیب اله انصاری طرقی

شهریور ماه ۱۳۸۸

۱۳۸۹/۷/ ۳

۱۴۱۷۴۸

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

بسم الله الرحمن الرحیم

اینک که با عنایت پرورگار بی همتا موفق به انجام این پایان نامه شده ام، بر خود واجب می دانم که از زحمات و کمکهای بی شائبه خانواده و اساتید محترم و دوستان گرامی تشکر و قدردانی نمایم.

از پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم که در تمام مراحل تحصیل یاریم کردند و پشتیبان و مشوقم بوده اند سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری طرقی، استاد بزرگوارم که در طول دوران تحصیل و انجام این پایان نامه همواره راهنما و مشوق من بوده اند نهایت امتنان و تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی و جناب آقای دکتر احمد عباسی که زحمت داوری پایان نامه را تقبل فرمودند تشکر و قدردانی می کنم.

از دوست عزیزم خانم فرانک فرشادی فر به خاطر راهنمایی های موثرشان در تحقیق و و پژوهش صمیمانه متشکرم و برایشان در تمام مراحل زندگی آرزوی موفقیت می کنم.

و در نهایت سپاسگزارم از محبت، همکاری و همراهی عزیزانم، آقایان داود محجوب و امیر احمدی و خانمها فریبا احمدی و فروغ نوروزی که در مراحل مختلف انجام این پایان نامه یاریم نمودند.

فهرست مطالب

چکیده

زیر مدولهای بطور ضعیف اول

فرشته احمدی فتلکی

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. در این پایان نامه ابتدا R - مدولهای به طور ضعیف اول(اول کلاسیک) را که در مقاله [۶] از م. بهبودی معرفی گردیده اند مطالعه می کنیم و سپس نتایج مربوطه را به تفصیل مورد بررسی قرار می دهیم. علاوه بر این نتایجی در مورد مدولهای به طور ضعیف اول از منبع [۴] جمع آوری گردیده که با جزئیات بیشتری بررسی می شود. ضمناً با معرفی مدول تقریباً اول بعضی قضایای صادق در مورد مدولهای اول، تقریباً اول و به طور ضعیف اول مورد مقایسه قرار می گیرد.

کلید واژه : زیر مدول به طور ضعیف اول، مدول سازگار، حلقه سازگار، مدول کاملاً به طور ضعیف اول، مدول بسیار نیم ساده، به طور ضعیف P- حلقه، به طور ضعیف Max – حلقه و مدول تقریباً اول.

Abstract

Weakly Prime Submodules Fereshteh Ahmadi Fatalaki

Let R be an associative ring with identity and M be an R-module. In this thesis, we provide some useful information about weakly prime submodules from [6] and [4] and explain them in details.

Key words: weakly prime submodules, compatible modules, compatible ring, fully weakly prime module, very semisimple, weakly P-ring and Max-ring, almost prime module.

پس از سال ۱۹۷۸ که مفهوم زیر مدول اول توسط Johon Dauns، معرفی شد و مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفت و در مقالات متعدد به سؤالات بوجود آمده در مورد زیرمدولهای اول، ارتباط آنها با ایده آلهای اول حلقه و زیرمدولهای ماکزیمال یک مدول پاسخ داده شد، در سال ۲۰۰۴، نوع دیگری از مدولها با عنوان مدولهای به طور ضعیف اول توسط م. بهبودی در مقاله ی weakly prime submodule، منبع [۶]، معرفی گردید و برخی از خواص مدولهای اول، برای آنها تعمیم داده شد. سپس الف.عزیزی در منبع [۴]، به بیان ارتباط مدولهای به طور ضعیف اول و مدولهای تخت پرداخت. به دلیل تشابه نام مدولهای به طور ضعیف اول با مدول اول ضعیف که تعریف متفاوتی دارد، اخیراً در مقالات جدیدی که از م. بهبودی منتشر شده، نام این دسته از مدولها به مدول اول کلاسیک تغییر یافته است.

در این پایان نامه که در ۶ فصل تنظیم شده است، تلاش شده مدولهای به طور ضعیف اول (اول کلاسیک)، معرفی و خواص آن در مقایسه با مدولهای اول بررسی شود. ابتدا در فصل صفر، برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده در پایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شود.

در فصل اول، مفهوم مدولهای به طور ضعیف اول، معرفی و برخی قضایای اساسی در مورد آنها اثبات می گردد، همچنین ارتباط مدولهای به طور ضعیف اول و مدولهای تخت بررسی می شود. سپس در فصل دوم، مدولهای سازگار را معرفی می کنیم که در آنها زیر مدولهای اول و به طور ضعیف اول یکی هستند. در فصل سوم، مدولهایی که هر زیرمدولشان به طور ضعیف اول است با نام مدولهای کاملاً به طور ضعیف اول معرفی و مثالی برای آن ذکر می گردد.

در فصل چهارم، $P-$حلقه ها را به $P-$به طور ضعیف حلقه تعمیم داده و در نهایت فصل پنجم در دو بخش تنظیم شده، در بخش اول به معرفی زیرمدول به طور ضعیف اول مینیمال می پردازیم و در بخش دوم رفتار زیرمدول به طور ضعیف تحت موضعی سازی بررسی می گردد.

در پایان لازم است متذکر شویم که بجز فصل صفر، در بقیه فصول همه ی حلقه ها شرکت پذیر و با یکه و همه ی مدولها یکانی فرض شده است مگر اینکه خلافش ذکر شود.

فصل صفر

مقدمات و مطالب پیش نیاز

مقدمات و مطالب پیش نیاز

در این فصل برخی مطالب مورد نیاز برای پایان نامه به صورت تعاریف، قضایا و لم یادآوری می گردند. در سراسر این فصل R نمایش یک حلقه جابجایی یکدار و غیر صفر و M یک R- مدول یکانی می باشد مگر غیر از آن تصریح شود. همچنین منظور از $N \leq M$ ($N < M$) این است که N یک زیرمدول (زیرمدول سره) از M است.

(۰-۱)تعریف: فرض کنید M، مدولی روی حلقه جابجایی R و N زیر مجموعه ای از M باشد. می گوییم N زیر مدول M یا R- زیر مدول M است هرگاه N خود با عمل های M، یک R- مدول باشد.

(۰-۲)ملاحظه: هر زیر مدول، خود مدول است. همچنین هر زیر مدول یک مدول یکانی روی حلقه یکدار، لزوماً یکانی است (ر.ک.۲۳).

(۰-۳)تعریف:

الف) فرض کنیم که M یک R- مدول و L و K زیر مدول هایی از M باشند. در این صورت

$$(L :_R K) = (L : K) = \{ r \in R : \ rK \subseteq L \}$$

ب) فرض کنیم M یک R- مدول باشد . در این صورت پوچساز M را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}(M) = \{ r \in R : rm = 0 , \forall\, m \in M \}$$

روشن است که $\mathrm{Ann}(M) = (0 : M)$ و اگر N یک R زیر مدول M باشد آنگاه $(N : M) = \mathrm{Ann}\,(\frac{M}{N})$ یک ایده آل R است .

(۰-۴)تذکر: فرض کنیم M, N دو R- مدول به قسمی باشند که $M \subseteq N$. در این صورت $\mathrm{Ann}(N) \subseteq \mathrm{Ann}(M)$.

(۰-۵)قضیه: (ر.ک.۲۳) اگر M یک R- مدول چپ باشد، آنگاه برای هر مجموعه دلخواه I داریم

$$\mathrm{Ann}\,(\textstyle\sum_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ann}\,(M_i).$$

برهان: داریم $M_i \in \sum_{i\in I} M_i$ برای هر $i \in I$، پس بنا به تذکر (۰-۴)، به ازای هر $i \in I$ داریم

$$\mathrm{Ann}\,(\textstyle\sum_{i\in I} M_i) \subseteq \mathrm{Ann}(M_i)$$

و در نتیجه $\mathrm{Ann}\,(\sum_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}\,(M_i)$.

برعکس فرض کنیم $r \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}\,(M_i)$، دراین صورت برای هر $i \in I$، $r \in \mathrm{Ann}\,(M_i)$. پس برای هر $x_i \in M_i$ داریم $rx_i = 0$. حال اگر $x \in \sum_{i\in I}(M_i)$ ، یعنی $x = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots + x_{in}$ ، آنگاه

$$rx = rx_{i1} + rx_{i2} + rx_{i3} + \cdots + r\,x_{in}$$

بنابراین $rx = 0$ و این یعنی $r \in \mathrm{Ann}\,(\sum_{i\in I} M_i)$ و این دو نتیجه می دهند که

$$\mathrm{Ann}\,(\textstyle\sum_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}\,(M_i).$$

(۰-۶)**تعریف:** فرض کنید M یک R - مدول باشد. زیرمدول N از M را یک جمعوند مستقیم گویند هرگاه زیر مدولی چون K از M باشد که $M = N \oplus K$.

(۰-۷)**تعریف:** ایده آل p از حلقه R را اول گویند هرگاه

الف) $p \neq R$.

ب) اگر $x , y \in R$ به قسمی باشند که $xy \in p$ آنگاه $x \in p$ یا $y \in p$.

(۰-۸)**تعریف ایده آل چپ اول درحالت غیر جابجایی:** ایده آل سره p از حلقه شرکتپذیر یکدار R را اول گوییم هرگاه اگر $aRb \subseteq p$، آنگاه $a \in p$ یا $b \in p$.

(۰-۹)**تعریف:** زیرمدول P از R- مدول M را اول گویند هرگاه

۱) $P \neq R$.

۲) برای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $rm \in P$ داشته باشیم $m \in P$ یا $r \in (P : M)$.

(۰-۱۰)**تعریف:** R – مدول M را اول گوییم هرگاه (0) زیر مدول اول M باشد.

(۰-۱۱)**تذکر:** فرض کنیم M یک R - مدول باشد؛

۱) مجموعه ی همه ی زیر مدول های اول M را با نماد $\mathrm{Spec}_R(M)$ نمایش می دهیم. بویژه $\mathrm{Spec}(R)$ گردایه شامل همه ی ایده آلهای اول R است.

۲) اگر P زیر مدولی اول از M باشد آنگاه $(P : M) = p$ ایده آلی اول از R خواهد بود. در این وضعیت زیر مدول P را یک زیر مدول p – اول می نامیم. همچنین مجموعه ی همه ی زیر مدول های p – اول M را با نماد $\mathrm{Spec}_p(M)$ نمایش می دهیم(ر.ک.۱۵).

۳) R – مدول M را p – اول گوییم هرگاه (0) ، زیر مدول اول M باشد. به طور معادل M را یک R – مدول اول گوییم هرگاه برای هر زیر مدول سره ناصفر N از M داشته باشیم $\mathrm{Ann}(N) = \mathrm{Ann}(M)$(ر.ک.۷).

(۰–۱۲)**توجه:** ممکن است $\mathrm{Spec}\,(M)$ برای یک مدول ناصفر M برابر تهی باشد. به عنوان مثال فرض کنید p یک عدد صحیح اول ثابت باشد و $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

$$M = \mathbb{Z}\,(p^\infty) = \{\, \alpha \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} : \alpha = \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \,\}$$

یک $\mathbb{Z}$– مدول است که $\mathrm{Spec}\,(M) = \emptyset$ و $\mathrm{Max}(M) = \emptyset$.(ر.ک.۱۶)

(۰–۱۳)**تعریف:** فرض کنید R یک حلقه غیر جابجایی و M یک R– مدول باشد. زیر مدول سره N از M را اول گوییم هرگاه $N \neq M$ و اگر $rRm \subseteq N$ که $r \in R$ و $m \in M$، آنگاه $m \in N$ یا $r \in (N : M)$.(ر.ک.۲۴). به طور معادل N زیر مدولی اول از M است هر گاه برای هر ایده آل چپ I از R و هر زیر مدول چپ K از M که $IK \subseteq N$، داشته باشیم $IM \subseteq N$ یا $K \subseteq N$. (ر.ک.۵ و ۱۶).

(۰–۱۴)**تعریف:** ایده آل $\mathfrak{m}$ از R را ماکزیمال گویند هرگاه

(الف) $\mathfrak{m} \neq R$.

(ب) ایده آلی از R مانند I موجود نباشد به قسمی که $\mathfrak{m} \subset I \subset R$.

همچنین مجموعه تمام ایده آل های ماکزیمال حلقه R را با $\mathrm{Max}\,(R)$ نمایش می دهند.

(۰–۱۵)**تعریف:** زیرمدول N از R – مدول M را ماکزیمال گویند هرگاه

(الف) $N \neq M$.

(ب) اگر L زیرمدولی از R– مدول M به قسمی باشد که $N \subseteq L \subseteq M$ آنگاه $L = M$ یا $N = L$.

همچنین مجموعه تمام زیرمدول های ماکزیمال R– مدول M را با $\mathrm{Max}\,(M)$ نمایش می دهند.

(۰-۱۶)لم: فرض کنید M یک R- مدول و N زیرمدول سره از M باشد، در این صورت اگر $N \in Max\ (M)$ آنگاه $(N : M) \in Max\ (R)$ و $N \in Spec\ (M)$.

برهان: (ر.ک.۱۵).

(۰-۱۷)تعریف: حلقه R را حوزه صحیح گویند هرگاه مقسوم علیه صفر غیر صفر نداشته باشد.

(۰-۱۸)نکته: اگر N یک زیر مدول اول M باشد آنگاه $(N : M)$ یک ایده آل اول از R است. ولی عکس این رابطه لزوماً برقرار نیست .

(۰-۱۹)مثال: اگر M، $\mathbb{Z}$- مدول آزاد $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ باشد و برای $a \in \mathbb{Z}$ که $a > 1$، $N = (a , 0)\mathbb{Z}$ آنگاه $(N : M) = (0)$ که ایده الی اول است اما N زیر مدول اول M نیست.

(۰-۲۰)تعریف: اشتراک همه ی ایده ال های ماکزیمال R را که خود یک ایده ال است، رادیکال جاکوبسن R گویند و با نماد $J\ (R)$ نمایش می دهند (ر.ک.۲۳).

(۰-۲۱)تعریف: زیر مدول N از R- مدول M را تحویل ناپذیر[1] گوییم هرگاه $N \neq M$ و اگر $N = N_1 \cap N_2$ آنگاه $N = N_1$ یا $N = N_2$.

(۰-۲۲)نکته: فرض کنید N یک R- زیر مدول M باشد. N زیر مدول اول M است اگر و فقط اگر به ازای هر زیر مدول K از M که $N \subsetneq K$ داشته باشیم $(N : M) = (N : K)$.

برهان: فرض کنید N یک زیر مدول ازR- مدول M باشد و $r \in (N : M)$. از آنجا که $rK \subseteq rM \subseteq N$ پس

$$(N : M) \subseteq (N : K)$$

حال فرض کنید $r' \in (N : K)$. در این صورت $r' K \subseteq N$ چون $K \subsetneq N$ پس عنصر $k \in N \setminus K$ وجود دارد، از طرفی N زیر مدول اول M است و$r'K \in N$، بنابراین داریم $r' \in (N : M)$ و در نتیجه $(N : K) = (N : M)$.

برعکس فرض کنید $r \in R$ و $m \in M \setminus N$. قرار می دهیم $K = N + Rm$، بنابراین $N \subseteq K$ و

$$r \in (N : N + Rm) = (N : M)$$

لذا N زیر مدول اول M است.□

[1] Irreducible

(۰-۲۳)تذکر: Nزیر مدول اول M است اگر و فقط اگر $\frac{M}{N}$ یک مدول اول باشد، بعلاوه حلقه R، یک R - مدول اول است اگر وفقط اگر یک حوزه ی صحیح باشد (چون در حوزه ی صحیح 0 ایده آل اول است).

(۰-۲۴)لم: زیر مدول سره N از R - مدول M اول است اگر و تنها اگر برای هر $r \in R$ همریختی طبیعی

$$f_r : \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M}{N}$$

$$m + N \longmapsto rm + N$$

یک به یک یا صفر باشد.

برهان: فرض کنیم N اول، $r \in R$ و $f_r \neq 0$. نشان خواهیم داد f_r، یک به یک است. فرض کنیم $m + N \in \mathrm{Ker}\, f_r$ لذا $rm \in N$. از آنجا که N مدولی اول است و $f_r \neq 0$، پس $m \in N$ و در نتیجه $m + N \in \mathrm{Ker}\, f_r$ و این نتیجه می دهد f_r یک به یک است .

بعکس فرض کنیم $r \in R$ و $m \in N$ باشند به طوری که $rm \in N$. دراین صورت $m + N \in \mathrm{Ker}\, f_r$. مطابق فرض قضیه $f_r = 0$ یا f_r یک به یک است. اگر $f_r = 0$ آنگاه $r \in (N : M)$ و اگر f_r یک به یک باشد آنگاه $\mathrm{Ker}\, f_r = 0$ پس $m \in N$. (ر.ک.۲۲).

(۰-۲۵)تعریف: R - مدول M را ساده می نامیم هر گاه M زیر مدول غیر بدیهی نداشته باشد . یعنی تنها زیر مدول هایش M و 0 باشند.

(۰-۲۶)لم: فرض کنید M یک R – مدول و N زیر مدول سره از M باشد. دراین صورت $N \in \mathrm{Max}_R(M)$ اگر و تنها اگر R – مدول $\frac{M}{N}$ ساده باشد(ر.ک.۱۵).

(۰-۲۷)نکته: هر R - مدول ساده دوری است (ر.ک.۱۰).

(۰-۲۸)قضیه: فرض کنیم N یک R- مدول باشد در این صورت N ساده است اگر و تنها اگر برای ایده ال ماکزیمال $\mathfrak{m}$ از R داشته باشیم $N \cong \frac{R}{\mathfrak{m}}$.

برهان: (ر.ک.۱).

(۰-۲۹)نکته: پوچساز هر مدول ساده ایده الی ماکزیمال است.(بنا بر (۰-۲۷) و (۰-۲۸)).

(۰-۳۰)تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد و داشته باشیم :

$$A: \quad \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_{i+2} \cdots$$

که A_i ها، R - مدول و α_i ها R - هم ریختی های مدولی هستند، A را یک دنباله از هم ریختی های R - مدولی گوییم.

(۰-۳۱)تعریف: دنباله A را یک دنباله درست گوییم هرگاه برای هر $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$ داشته باشیم

$$\operatorname{Im} \alpha_{i-1} = \ker \alpha_i \,.$$

(۰-۳۲)تعریف: فرض کنید R حلقه ای شرکت پذیر با یکه باشد R- مدول چپ M روی حلقه ی R را نیم ساده[1] گوییم اگر بصورت مجموعی (شاید نامتناهی) از زیر مدولها ی ساده اش نوشته شود. به طور معادل اگر هر زیر مدول M جمعوند مستقیم از M باشد. (ر.ک.۱۰).

(۰-۳۳)قضیه: برای هر R - مدول N گزاره های زیر معادلند:

۱) N نیم ساده است.

۲) N توسط مدول های ساده تولید می شود.

۳) N بصورت حاصلجمع بعضی از زیر مدول های ساده N است.

۴) N بصورت جمع زیر مدول های ساده ی خودش است.

۵) هر زیر مدول N جمعوند مستقیم N است.

۶) هر دنباله ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ شکافته است.(K و N ، R - مدول)

برهان: (ر.ک.۱).

(۰-۳۴)مثال: واضح است که اگر R یک حلقه ی تقسیم باشد ، آنگاه هر فضای R - برداری $_RM$ نیم ساده است.

برهان: (ر.ک.۱).

(۰-۳۵)نکته: زیر مدول هر مدول نیم ساده نیم ساده است (ر.ک.۱).

(۰-۳۶)نکته: اگر M یک R- مدول نیم ساده باشد $J(R) = 0$ (ر.ک.۱).

[1] semisimple

(۰-۳۷)تعریف: فرض کنید M یک R - مدول باشد. M را یک R - مدول نوتری گوییم هر گاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند:

۱) اگر $(A_i)_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مدول های M باشد و

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots$$

آنگاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $A_k = A_{k+i}$.

۲) هر زیر مجموعه غیر تهی از زیر مدول های M تحت رابطه شمول عنصری ماکزیمال داشته باشد.

(۰-۳۸)تعریف: فرض کنید R یک حلقه و M یک R - مدول باشد زیر مدول اول N را مینیمال گوییم هرگاه به ازای هر زیر مدول اول K از M صادق در شرط $K \subseteq N$ نتیجه شود که $K = N$.

(۰-۳۹)قضیه: فرض کنید R یک حلقه و M یک R - مدول نوتری باشد. در این صورت M تنها شامل تعداد متناهی زیر مدول اول مینیمال است(ر.ک.۱۹).

(۰-۴۰)تعریف: R - مدول F را آزاد گوییم هر گاه زیر مجموعه X از F ، $(X \subseteq F)$ چنان موجود باشد که

(۱) به ازای هر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ و هر $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ که $r_1x_1 + r_2x_1 + \ldots + r_nx_n = 0$ داشته باشیم $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$.

(۲) X مدول F را تولید کند. (ر.ک.۱۰).

(۰-۴۱)تعریف: R- مدول M را تخت[1] گوییم هرگاه به ازای هر تکریختی (همریختی یک به یک) $f : N \longrightarrow N'$، همریختی

$$1_M \otimes f: M \otimes N \longrightarrow M \otimes N'$$

$$x \otimes y \longmapsto x \otimes f(y)$$

یک به یک باشد. (ر.ک.۱۰).

[1] Flat

(۰-۴۲)**قضیه:** R - مدول M تخت است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله ی درست $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$، دنباله ی

$$0 \longrightarrow M \otimes N' \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M \otimes N'' \longrightarrow 0$$

درست باشد.(ر.ک.۱۰).

(۰-۴۳)**تعریف:** R - مدول F را تختاً با وفا[1] گوییم هر گاه اثر فانکتور تانسور روی یک دنباله، دنباله ای درست باشد اگر و تنها اگر دنباله ی اصلی خود دنباله ای درست باشد، یعنی $0 \to F\otimes M' \to F\otimes M \to F\otimes M'' \to 0$ دنباله ای درست باشد اگر و فقط اگر $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ دنباله ای درست باشد.

(۰-۴۴)**قضیه:** فرض کنیم R حلقه ای ناصفر و M یک R - مدول ناصفر باشد. در این صورت

۱) اگر M آزاد باشد آنگاه $\mathrm{Max}_R(M) \neq \emptyset$ و در نتیجه $\mathrm{Spec}_R(M) \neq \emptyset$.

۲) اگر M تختاً با وفا باشد آنگاه $\mathrm{Spec}_R(M) \neq \emptyset$.

۳) اگر M باوفا و R دامنه ی صحیح باشد آنگاه $\mathrm{Spec}_R(M) \neq \emptyset$.

برهان: (ر.ک.۱۵).

(۰-۴۵)**قضیه:** فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. آنگاه $r \in J(R)$ اگر و فقط اگر برای هر $a \in R$، $1 - ra$ وارون پذیر باشد.بخصوص $1+r$ و $1-r$ وارون پذیر هستند. (ر.ک.۲۳).

(۰-۴۶)**تعریف عنصر شبه منظم (منتظم نما)ی چپ(راست):** فرض کنید R یک حلقه باشد . گوییم عنصر a از حلقه ی R شبه منظم چپ (راست) است اگر $a \in R$ باشد به طوری که $r + a + ra = 0$ ($r + a + ar = 0$).

هر گاه حلقه ی R یکدار باشد . عنصر $a \in R$، شبه منتظم چپ (راست) است اگر وفقط اگر $1_R + a$ معکوس پذیر چپ (راست) باشد (ر.ک.۱۰).

(۰-۴۷)**تعویض حلقه:** فرض کنید M مدولی روی حلقه جابجایی R و I ایده الی از R **باشد که** $I \subseteq \mathrm{Ann}\,(M)$، با نگاشت

$$\frac{R}{I} \times M \longrightarrow M$$

[1] Faithfully flat

$$(r+I)\,m \longmapsto rm$$

M دارای یک ساختار $\frac{R}{I}$ – مدولی می شود. این نگاشت قابل تعریف است زیرا برای هر $r , r' \in R$ و $m \in M$ اگر $r+I=r'+I$ آنگاه $r-r' \in I$ و $I \subseteq Ann\,(M)$. پس $(r-r')m=0$ و $rm \doteq r'm$. بعلاوه هر زیر مجموعه ی M یک R– مدول است اگر و تنها اگر یک $\frac{R}{I}$ – زیرمدول باشد(ر.ک.۱۰و ۲۳).

(۰–۴۸)تعریف: فرض کنید R یک حوزه صحیح دلخواه و x عضوی از R– مدول M باشد. در این صورت گوییم x یک عضو تابدار است هرگاه یک عضو ناصفر r از R وجود داشته باشد که $rx=0$. زیر مجموعه $T\,(M)$ از M برابر است با مجموعه همه عناصر تابدار M. در واقع

$$T(M)=\{\,m \in M\colon \exists\ 0 \neq r \in R,\ rm=0\,\}$$

این مجموعه یک زیرمدول M است و آن را زیرمدول تابدار M می نامیم. R– مدول M را تابدار گویند هرگاه $T(M)=M$. همچنین مدول M را بی تاب گویند هرگاه $T\,(M)=0$. به عبارت دیگر هرگاه $rx=0$ آنگاه $r=0$ یا $x=0$.

(۰–۴۹)توجه: همه فضاهای برداری و مدولهای آزاد بی تاب هستند.

برهان: (ر.ک.۱۰).

(۰–۵۰)لم: فرض کنید R یک دامنه ی صحیح و M یک R – مدول باشد به طوری که $T\,(M) \neq M$ (M تابدار نیست). در این صورت $T(M)$ زیر مدول اول M است. پس اگر $T(M)=0$، آنگاه (0) زیر مدول اول M است و M مدولی اول است. (اگر $T(M)=0$ آنگاه M بی تاب است).

برهان: فرض کنیم $rm \in T(M)$ که $r \in R$ و $m \in M$ و $m \notin T(M)$. در این صورت عنصر $0 \neq r' \in R$ وجود دارد بقسمی که $r'(rm)=(r'r)m=0$. حال چون $m \notin T(M)$ پس $r'r=0$، اما چون $r' \neq 0$ و R حوزه ی صحیح است $r=0$. بنابراین$r\,M \subseteq T(M)$ یعنی $T(M)$ زیر مدول اول M است.□

(۰–۵۱)لم: فرض کنیم M یک R– مدول باشد. دراین صورت زیر مدول N از M اول است اگر و فقط اگر $(N:M)=p$ ایده ال اول R باشد و $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}$ – مدول بی تاب باشد(ر.ک.۱۵).

برهان: فرض کنیم N زیر مدول اول M باشد. چون $(N:M)=p$، پس $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}$ – مدول است. نشان می دهیم $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}$ – مدول بی تاب است فرض کنیم $r+p \in \frac{R}{p}$ که $r \in R$ و $m+N \in \frac{M}{N}$ که $m \in M$، در این صورت

$$(r+p)(m+N)=o_{\frac{M}{N}}=N \text{ اگر و تنها اگر } rm+N=N \text{ اگر و تنها اگر } rm\in N$$

چون N، زیر مدول p – اول است پس یا $m\in N$ یعنی $m+N=o_{\frac{M}{N}}=N$ و یا $r\in p=(N:M)$ یعنی $r+p=0_{\frac{R}{p}}=p$. در نتیجه $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}$ – مدول بی تاب است.

برعکس نشان می دهیم زیر مدولN از M اول است. چون $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}$ – مدول بی تاب است پس

$$(r+p)(m+N)=o_{\frac{M}{N}}=N$$

که $r\in R$ و $m\in M$، اگر و تنها اگر $rm+N=N$ اگر و تنها اگر $rm\in N$. در نتیجه باید $m+N=N$ یعنی $m\in N$ یا $r+p=p$ یعنی $r\in p$ و چون $(N:M)=p$ پس، $m\in N$ یا $r\in(N:M)$ و این یعنی N زیر مدول p – اول M است. □

(۰–۵۲)تعریف: R – مدول M را تقسیم پذیر گوییم هر گاه برای هر $x\in M$ و هر مقسوم علیه غیر صفر $r\in R$، عنصر $y\in M$ وجود داشته باشد به طوری که $ry=x$.

(۰–۵۳)قضیه: فرض کنید R یک حلقه جابجایی و N زیر مدول M باشد، N اول است اگر و فقط اگر به ازای هر ایده ال I از R و هر زیر مدول K از M که $IK\subseteq N$ داشته باشیم $K\subseteq N$ یا $I\subseteq(N:M)$ (ر.ک.۱۶).

(۰–۵۴)تعریف: (ر.ک.۲۳)می گوییم زیر مدول N از R – مدول M، متناهی مولد است اگر توسط زیر مجموعه ای متناهی از M (نه لزوماً N) تولید شود. اگر R – مدولی توسط یک عضو تولید شود آن را دوری می نامیم.

(۰–۵۵)تعریف: فرض کنید M یک مدول R – باشد و زیر مدول سره N از M را زیر مدول اولیه گوییم هر گاه اگر داشته باشیم $ra\in N$ که $r\in R$ و $a\in M$ آنگاه $a\in N$ یا برای عدد مثبت n، $r^nM\subseteq N$. (ر.ک.۱۰).

(۰–۵۶)تعریف: R- مدول M را با وفا[1] گوییم هرگاه $Ann\,(M)=0$ همچنین هرگاه برای هر زیر مدول N از M داشته باشیم $Ann(N)=0$، آنگاه M را کاملاً باوفا می نامیم.

(۰–۵۷)قضیه: فرض کنید N یک زیرمدول سره M باشد. اگر p یک ایده آل ماکزیمال R به قسمی باشد که $(N:M)=p$، آنگاه N یک زیرمدول اول M است.

برهان: (ر.ک.۱۵).

[1] Faithful

(۰-۵۸)تعریف: فرض کنید R حلقه ای جابجایی و ناصفر باشد. بعد R را به صورت زیر تعریف می کنند

$$\dim (R) = \sup\{ n \in N_0 : \text{ there is a chain } P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n \text{ of } \mathrm{Spec}(R)\}$$

مشروط بر اینکه مجموعه فوق کوچک ترین کران بالا داشته باشد. در غیر این صورت آن را ∞ تعریف می کنیم (ر.ک.۲۳).

(۰-۵۹)لم: فرض کنید $\{ P_i : i \in I \}$ یک خانواده ناتهی از زیرمدولهای اول R- مدول M باشد و فرض کنید این خانواده نسبت به رابطه شمول کلاً مرتب باشد. در این صورت $\bigcap_{i\in I} P_i$ یک زیرمدول اول M است.

برهان: (ر.ک.۱۴).

(۰-۶۰)لم: فرض کنید$\{ P_i : i \in I \}$ یک خانواده ناتهی از زیرمدولهای p-اول R- مدول M باشد و فرض کنید این خانواده نسبت به رابطه شمول کلاً مرتب باشد. در این صورت $\bigcap_{i\in I} P_i$ یک زیرمدول p-اول M است.

برهان: (ر.ک.۱۹).

(۰-۶۱)تعریف: فرض کنید R حلقه جابجایی و یکدار باشد. R- مدول M را ضربی نامیم هرگاه برای هر زیرمدول N از M، ایده آلی مانند I از حلقه R موجود باشد که $N = IM$.

(۰-۶۲)ملاحظه: فرض کنید M یک R- مدول باشد. برای هر $m \in M$، تعریف می کنیم

$$R^1m = \{ rm + km : r \in R, k \in \mathbb{Z} \}$$

R^1m، R- زیرمدول M است.

(۰-۶۳)تعریف: R- مدول M را تجزیه ناپذیر[1] گوییم. هر گاه $M \neq 0$ و تنها جمعوندهای مستقیم M، 0 و M باشند یعنی اگر $M = A \oplus B$ آنگاه $A = 0$ یا $B = 0$.

(۰-۶۴)مثال: $\mathbb{Z}$ بعنوان یک $\mathbb{Z}$ - مدول تجزیه ناپذیر است زیرا :

فرض کنید $n\mathbb{Z}$ که $n \neq 0, \pm 1$، یک جمعوند مستقیم $\mathbb{Z}$ باشد. پس زیر مدولی مانند $m\mathbb{Z}$ از $\mathbb{Z}$ هست که

$$\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$$

بنابراین $mn \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$. از طرفی $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \{0\}$ و چون $n \neq 0$ و $\mathbb{Z}$ دامنه ی صحیح است پس $m = 0$ و در نتیجه $\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ این یعنی $n = \pm 1$ که تناقض است. لذا $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ - مدول تجزیه ناپذیر است.

[1] Indecomposible