دانشگاه کاشان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه دکتری ریاضی

عنوان:

بررسی گراف جابه‌جایی و گراف توان یک گروه متناهی و ویژگی‌های متریک گراف‌ها

استاد راهنما:

پروفسور سیّد علیرضا اشرفی

استاد مشاور:

دکتر غلامحسین فتح‌تبار

به‌وسیله:

مهسا میرزرگر

تیر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

استاد گرانقدرم

که اندیشیدن را به من آموخت، نه اندیشه ها را.

و به

همسرم

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.

سپاس

خداوندا به ما توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، مناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، را عنایت فرما. جان ما را صفای خود ده و دل ما را هوای خود ده، و چشم ما را ضیای خود ده، و ما را از فضل و کرم خود آن ده که آن به.

بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه‌ام جناب آقای پرفسور سید علی‌رضا اشرفی که تلاش‌ها و تشویق‌های ایشان همواره روشنی‌بخش راه من بوده است صمیمانه سپاسگذاری کنم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از استاد مشاورم جناب آقای دکتر غلامحسین فتح تبار، اساتید معظم آقایان دکتر محمدعلی ایرانمنش و دکتر بیژن دواز که به عنوان اساتید صاحب نظر و متخصص خارجی و دکتر حسن دقیق و دکتر بهنام بازیگران به عنوان اساتید صاحب نظر و متخصص داخلی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را به عهده داشته‌اند و همچنین از همکاری آقای دکتر علی‌اکبر عباسیان استاد ناظر تحصیلات تکمیلی کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از همسرم، جناب آقای دکتر محمدجواد نجفی به جهت همفکری و همدلی همیشگی ایشان کمال سپاسگذاری را دارم.

در پایان زبان قاصر از سپاس فراوان، کاستی‌های کار از بنده حقیر و نقاط قوت آن حاصل از لطف خداوند و یاری کسانی است که ذکر جمیلشان رفت و یا در دل بود و بر اثر شتاب کار بر زبان قلم جاری نشد.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه متناهی و $X \subseteq G$ باشد. گراف جابه‌جایی $C(G,X)$ عبارت است از گرافی با مجموعه رئوس X به طوری که برای هر $x,y \in X$، xy یال است اگر و تنها اگر $xy = yx$. این گراف به طرق گوناگون بررسی شده است. در این جا دو حالت $C(G,G)$ و $C(G,G \setminus Z(G))$ را در نظر می‌گیریم. هدف ما بررسی ساختار، ویژگی‌های متریک و خواص گروه خودریختی‌های این گراف‌هاست. علاوه بر این برای گروه متناهی G، گراف توان $P(G)$ را گرافی با مجموعه رئوس G در نظر می‌گیریم که دو راس $x,y \in G$ تشکیل یال می دهند اگر وتنها اگر اعداد طبیعی n و m موجود باشد که $x = y^n$ یا $y = x^m$. برای گراف توان خواصی مانند عدد رنگی، عدد استقلال و ... را بررسی می‌کنیم و در پایان به برخی خواص متریک گراف‌های ملکولی نانودندریمرها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: گراف جابه‌جایی، گروه خودریختی، گراف توان، نانودندریمر.

رده بندی انجمن ریاضی آمریکا : ۲۰E۴۵، ۲۰D۰۸، ۲۰D۶۰، ۲۰D۰۵.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

گروه دوری از مرتبه n .... Z_n

گروه جایگشت‌های روی n حرف .... S_n

مرکزساز راس v .... $C_G(v)$

تعداد کلاس‌های تزویج گروه G .... $k(G)$

گروه یکه‌های حلقه Z_n .... U_n

مجموعه همه زیرگروه‌های دوری گروه G .... $MaxCyc(G)$

مجموعه همه عناصر مرتبه k .... $\Omega_k(G)$

مجموعه مرتبه عناصر G .... $\pi_e(G)$

نمای گروه G .... $exp(G)$

مرکز گروه G .... $Z(G)$

گروه خودریختی‌های G .... $Aut(G)$

گروه خودریختی‌های داخلی G .... $Inn(G)$

حاصل‌ضرب مرکزی G و H .... $G \circ H$

حاصل‌ضرب نیم مستقیم G و H .... $G \ltimes H$

حاصل‌ضرب حلقوی G و H .... $G \wr H$

مجموعه رئوس گراف Γ .... $V(\Gamma)$

مجموعه یال‌ها گراف Γ .... $E(\Gamma)$

درجه راس v .... $deg(v)$
گراف کامل n راسی .... K_n
گراف دوبخشی کامل .... $K_{m,n}$
عدد همبندی Γ .... $\kappa(\Gamma)$
عدد استقلال Γ .... $\alpha(\Gamma)$
عدد خوشه‌ای G .... $\omega(\Gamma)$
فاصله بین دو راس u و v از Γ .... $d_\Gamma(u,v)$
خروج از مرکز u .... $\varepsilon_\Gamma(u)$
قطر Γ .... $diam(\Gamma)$
عدد وینر Γ .... $W(\Gamma)$
شاخص سگد Γ .... $Sz(\Gamma)$
گراف جابه‌جایی با مجموعه رئوس گروه G .... $\Delta(G)$
گراف جابه‌جایی با مجموعه رئوس غیرمرکزی گروه G .... $\Gamma(G)$
گراف توان گروه G .... $P(G)$

پیش‌گفتار

یکی از زیباترین شاخه‌ها در نظریه گروه‌های متناهی، رابطه گروه‌های متناهی و گراف‌هاست. با استفاده از ساختار گروه‌های متناهی می‌توان گراف‌های متنوعی روی مجموعه عناصر یک گروه، کلاس‌های تزویج آن، سرشت‌های تحویل ناپذیر گروه و ... تعریف نمود. با کمک این گراف‌ها می‌توان نتایج جالبی را هم در نظریه گراف‌ها و هم در نظریه گروه‌های متناهی به دست آورد. پس از این که مهم‌ترین مسئله نظریه گروه‌های متناهی یعنی رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی در سال ۱۹۷۹ به پایان رسید، یکی از مسائل عمده مورد توجه دانشمندان نظریه گروه، رده‌بندی گروه‌ها با یک خاصیت مشخص بوده است. گروه دلخواه G با خاصیت ρ رده‌بندی می‌شود هر گاه گروه G تحت یکریختی تنها گروهی باشد که در خاصیت ρ صدق می‌کند. مسئله رده‌بندی گروه‌ها با استفاده از گراف جابه‌جایی نمونه‌ای از چنین مسائل تحقیقاتی در سال‌های اخیر است. برای یک گروه متناهی G و زیرمجموعه X، گراف جابه‌جایی $C(G,X)$ عبارت است از گرافی با مجموعه رئوس X به طوری که برای هر $x,y \in X$، xy یال است اگر و تنها اگر $xy = yx$. این گراف به طرق مختلفی بررسی شده است. ما در این رساله دو حالت $X = G$ و $X = G \setminus Z(G)$ را در نظر می‌گیریم و ساختار و گروه خودریختی‌های این گراف‌ها را مطالعه می‌کنیم. علاوه براین گراف توان $P(G)$ از یک گروه متناهی G را به این صورت معرفی می‌کنیم، $V(P(G)) = G$ و دو راس متمایز x و y در $P(G)$ مجاورند اگر و فقط اگر یکی قابل نوشتن به صورت توانی از دیگری باشد. در این رساله، عدد خوشه ای و عدد رنگی گراف توان را برای گروه‌های Z_n، D_{2n}، SD_{2n} و گروه‌های از نمای کامل، محاسبه و همچنین نوعی رده‌بندی از گروه‌ها با استفاده از گراف توان ارائه می‌کنیم. پس از بررسی ساختار این گراف‌ها به این پرسش می‌پردازیم

که آیا این گراف‌ها می‌توانند گراف فولرنی باشند؟ در پایان به بررسی برخی خواص متریک گراف‌های ملکولی نانودندریمرها می‌پردازیم. این رساله شامل ۴ فصل است که به صورت زیر سازمان‌دهی شده است:

در فصل اول به مفاهیم و پیش‌نیازهای اولیه می‌پردازیم. این فصل شامل ۲ بخش است که به ترتیب از مقدماتی از نظریه گروه‌ها و نظریه گراف تشکیل شده است. در این فصل بیشتر از مراجع [۳۹، ۴۵، ۴۶، ۴۷] استفاده شده است. در فصل ۲ از این رساله ابتدا گراف جابه‌جایی تعدادی از گروه‌های معروف را بررسی و سپس نتایجی را در مورد ساختار و خواص متریک این گراف‌ها بیان و گروه خودریختی‌های گراف جابه‌جایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مراجع اصلی این فصل [۲۰، ۴۴، ۱، ۴۳، ۱۷، ۸] بوده و نتایج جدید مربوط به این فصل در [۴۰، ۴۲] ارایه شده است.

فصل سوم به مطالعه گراف توان یک گروه متناهی و برخی خواص این گراف اختصاص دارد. مراجع اصلی این فصل [۱۱، ۱۲، ۱۴] بوده و نتایج جدید مربوط به این فصل در [۴۱] ارایه شده است.

در فصل چهارم به گراف‌های فولرنی می‌پردازیم و به این پرسش پاسخ می‌دهیم که آیا گراف جابه‌جایی یا گراف توان می‌توانند گراف فولرنی باشند؟ در پایان چندجمله‌ای سادهانا را در گراف ملکولی نانو دندریمرها بررسی می‌کنیم. نتایج مربوط به این فصل در [۱۸] به چاپ رسیده است.

فصل ۱
مفاهیم بنیادی

در این فصل مفاهیم و نمادهایی را که در سراسر این رساله از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، توضیح می‌دهیم. این فصل شامل دو بخش است: در بخش اول و دوم به ترتیب به بیان تعاریف و قضایایی مقدماتی از نظریه گروه‌ها و گراف‌ها می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مربوط به مفاهیم جبری

فرض کنیم G یک گروه باشد. برای هر زیر مجموعه $S \subseteq G$ مرکزساز و نرمال ساز S در G به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_G(S) &= \{x \in G \mid xs = sx, \forall s \in S\}, \\ N_G(H) &= \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}. \end{aligned}$$

فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه غیرتهی است. نگاشت $f : \Omega \times G \to G$ را یک عمل G روی Ω می‌نامیم و با نماد $(G|\Omega)$ نشان می‌دهیم، هرگاه :

۱. $\forall \omega \in \Omega$: $\omega^1 = \omega$

۲. $\forall \omega \in \Omega, \forall g, h \in G$: $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$

به عنوان مثال G با قانون $g^x := x^{-1}gx$ روی خودش عمل می‌کند. برای $g \in G$، کلاس تزویج شامل g را با $cl_G(g)$ یا g^G نشان داده و به صورت $cl_G(g) = \{x^{-1}gx \mid x \in G\}$ تعریف می‌کنیم و همواره $|cl_G(g)| = |G : C_G(g)|$. همچنین تعداد کلاس‌های تزویج G را با $k(G)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $(G|\Omega)$، در این صورت مدار هر عنصر $\alpha \in \Omega$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha^G = \{\beta \in \Omega \mid \exists g \in G, \alpha^g = \beta\}$$

به سادگی می‌توان دید که مدارهای G یک افراز از Ω تشکیل می‌دهند. با نمادهای فوق، قضیه زیر که به معادله رده‌ای مشهور است و می‌توان آن‌را به اشکال مختلف نوشت، برقرار می‌باشد:

قضیه ۱.۱. (معادله رده‌ای) [۵۷] فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ نماینده‌های کلاس‌های تزویج G باشند. در این صورت

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}.$$

لم زیر به نام‌های کوشی-فروبنیوس، لم برنساید یا فروبنیوس-برنساید معروف است. این لم روشی برای شمارش مدارهایی است که در یک مجموعه به وسیله یک گروه از تبدیلات ایجاد می‌شود. این فرمول را ویلیام برنساید در سال ۱۸۹۷ در کتاب خود در مورد گروه‌های متناهی بیان کرد و آن را به فروبنیوس نسبت داد. اما پیش از آن نیز کوشی در سال ۱۸۴۵ مسائل مشابهی را از این روش حل کرده بود. اما به هر حال ویلیام برنساید برای اولین بار به شکل یک لم و با اثبات آن را مطرح کرد و کمک شایان توجهی در پیشبرد نظریه گروه‌ها نمود.

لم ۲.۱. (لم فروبنیوس-برنساید) فرض کنید G یک گروه متناهی باشد که روی مجموعه Ω عمل می‌کند. در این صورت G دارای m مدار روی Ω است به طوری که،

$$m|G| = \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

و $fix(g) = \{\alpha \in \Omega | \alpha^g = \alpha\}$.

مرتبه عضو g و عنصر همانی گروه را به ترتیب با نمادهای $o(g)$ و ۱ نمایش می‌دهیم. $\pi_e(G)$ مجموعه مرتبه عناصر گروه G است. فرض کنید p عددی اول باشد. گروه G را یک $p-$گروه می‌نامیم هرگاه مرتبه هر عنصر غیربدیهی آن توانی از p باشد. اگر G یک $p-$گروه باشد آن‌گاه $Z(G) \neq \{1\}$. همچنین G، $EPO-$گروه نامیده می شود هر گاه مرتبه تمام عناصر غیر بدیهی آن اعداد اول باشند. یک گروه را $EPPO-$گروه نامند هرگاه مرتبه هر عضو آن توانی از یک عدد اول باشد. مجموعه همه عناصر از مرتبه k با $\Omega_k(G)$ نشان داده می‌شود. گروه دوری از مرتبه n را با Z_n و گروه جایگشت‌های روی n حرف را با S_n نشان می‌دهیم، همچنین $U_n = \{a \in Z_n | (a, n) = 1\}$، گروه یکه‌های حلقهِ Z_n است.

قضیه ۳.۱. ([۳۲]) U_n دوری است اگر و تنها اگر $n = 1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ که در آن p عدد اول فرد و α عددی طبیعی است.

زیرگروه سره M از گروه G را ماکسیمال گوییم هر گاه زیرگروهی همچون K وجود نداشته باشد که $M < K \leq G$. زیرگروه ماکسیمال M از G را با $M <\cdot\, G$ و مجموعه همه زیرگروه‌های دوری ماکسیمال گروه G را با $MaxCyc(G)$ نمایش می‌دهیم. یک گروه آبلی مقدماتی، یک گروه آبلی متناهی است که هر عنصر غیربدیهی آن از مرتبه p است که p عددی اول است. اگر G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^n باشد، آن‌گاه $G \cong Z_p \times Z_p \times \cdots \times Z_p$ که Z_p، n بار تکرار شده است. در سال ۱۹۸۷، شی و بی در [۵۱] حدس زیر را در مورد تشخیص پذیری گروه‌های ساده با مجموعه مرتبه عناصر و مرتبه گروه مطرح کردند. پس از آن این حدس در [۵۲] و به عنوان مسئله ۱۲.۳۹ ثبت شد و سپس در [۵۳] به طور کامل به اثبات رسید.

حدس ۴.۱. (حدس شی-بی) فرض کنید G یک گروه و M یک گروه ساده متناهی باشد. دراین صورت $G \cong M$ اگر و تنها اگر

۱. $|G| = |M|$

۲. $\pi_e(G) = \pi_e(M)$

بنابراین تمام گروه‌های ساده با استفاده از مرتبه گروه و مجموعه مرتبه عناصر قابل شناسایی می‌باشند. علاوه بر این حدس فوق برای بعضی گروه‌های غیرساده نیز ثابت شده است.

قضیه ۵.۱. ([۱۰]) فرض کنید G یک گروه دلخواه و $n \geq ۳$، دراین صورت $G \cong S_n$ اگر و تنها اگر $\pi_e(G) = \pi_e(S_n)$ و $|G| = |S_n|$.

تعریف ۶.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. G را یک گروه پوچ توان گوییم هرگاه G دارای یک سری مرکزی باشد. به عبارت دیگر هرگاه دارای یک سری مانند:

$$۱ = G_{۰} \leq G_{۱} \leq \cdots \leq G_n = G$$

باشد به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$ و همچنین $\frac{G_{i+۱}}{G_i}$ مشمول در مرکز $\frac{G}{G_i}$ باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را کلاس پوچ توانی G نامیده و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۱. ([۵۶]) فرض کنید G یک گروه غیربدیهی و متناهی باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. G پوچ توان است.

۲. هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است.

۳. هر $p-$ زیر گروه سیلوی G نرمال است.

۴. هر دو عضو G که مرتبه آن‌ها نسبت به هم اول است، جابه جا می‌شوند.

۵. G حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

نمای یک گروه G را که با $exp(G)$ نشان می‌دهیم عبارت است از کوچکترین مضرب مشترک مرتبه عناصر G. توجه کنید که اگر G گروه پوچ‌توان باشد آن‌گاه $a \in G$ وجود دارد که $o(a) = exp(G)$. چنین گروهی را که دارای عنصری از مرتبه نمای گروه است را گروه با نمای کامل می‌نامیم.

تعریف ۸.۱. گروه G را حل‌پذیر می‌نامیم در صورتی که یک سری زیرنرمال مانند:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq r$، گروه $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ آبلی باشد. اگر G حل‌پذیر باشد، طول کوتاه‌ترین سری با خاصیت مذکور را طول حل‌پذیری G می‌نامند.

قضیه ۹.۱. (قضیه ایتو) [۲۹] فرض کنید G گروه متناهی باشد به طوری که کلاس‌های تزویج آن تنها از دو طول متمایز باشند. در این صورت G پوچ توان است و مرتبه پوچ توانی آن حداکثر برابر ۳ است. همچنین G حاصل‌ضرب مستقیم یک $p-$گروه غیرآبلی P و گروهی آبلی مثل A است.

قضیه ۱۰.۱. ([۳۰]) فرض کنید G گروه متناهی باشد به طوری که کلاس‌های تزویج آن تنها از سه طول متمایز باشند. در این صورت G حل‌پذیر است.

قضیه ۱۱.۱. ([۴۵]) اگر گروه G شامل حداکثر n عنصر دوبه دو غیرجابه‌جا شونده باشد، آن‌گاه $|G : Z(G)| \leq c^n$ که در آن c عددی ثابت است.

تعریف ۱۲.۱. گروه دووجهی که با D_{2n} نمایش می‌دهیم گروهی است که با دو عضو a و b تولید شده به طوری که

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

همچنین گروه نیم دووجهی و دودوری را به ترتیب با SD_{2^n} و T_{4n} نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} SD_{2^n} &= \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{2^{n-2}-1} \rangle, \\ T_{4n} &= \langle a, b \mid a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

در حالتی‌که n توانی از ۲ است، گروه T_{4n} به گروه کواترنیون‌های تعمیم یافته معروف است. گروه Q_8 از مرتبه ۸، مشهورترین گروه از دسته‌ی کواترنیون‌هاست. این گروه دارای مجموعه عناصر

$\{\pm ۱, \pm i, \pm j, \pm k\}$ می‌باشد که $-۱ = i^۲ = j^۲ = k^۲$ و $ij = k = -ji$ ،$jk = i = -kj$ و $ki = j = -ik$.

برای هر دو عنصر x و y از گروه G، جابه‌جاگر x و y عبارت است از $[x, y] = x^{-۱}y^{-۱}xy$. زیر گروه مشتق G، زیرگروهی است که با همه جابه‌جاگرهای $[x, y]$ که در آن $x, y \in G$، تولید می‌شود و با G' نمایش می‌دهیم. فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ زیرگروه‌های G باشند، دراین صورت $[G_۱, G_۲]$ زیرگروه تولید شده توسط تمامی عناصر $[g_۱, g_۲]$ است که $g_۱ \in G_۱$ و $g_۲ \in G_۲$.

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی باشد. گروه G را یک $AC-$گروه گوییم هرگاه مرکزساز هر عضو غیرمرکزی آن آبلی باشد.

قضیه ۱۴.۱. ([۴۷])فرض کنید G گروه متناهی باشد، دراین صورت احکام زیر معادلند:

۱. G یک $AC-$ گروه است.

۲. اگر $[x, y] = ۱$ که $x, y \in G \setminus Z(G)$ آن‌گاه $C_G(x) = C_G(y)$.

۳. اگر $[x, y] = [x, z] = ۱$ که $x \in G \setminus Z(G)$ آن‌گاه $[y, z] = ۱$.

۴. اگر A و B زیرگروه‌هایی از G باشند که $Z(G) < C_G(A) \leq C_G(B) < G$، آن‌گاه $C_G(A) = C_G(B)$.

تعریف ۱۵.۱. دو گروه متمایز ''همدیس'' گفته می‌شوند هرگاه شامل تعداد مساوی عناصر از هر مرتبه باشند.

دو گروه آبلی متمایز نمی‌توانند همدیس باشند. برای اثبات این مطلب الگوریتمی از [۳۹] ارایه می‌دهیم که تعداد عناصر از یک مرتبه داده شده را در گروه آبلی G می‌یابد. فرض کنید G گروه آبلی از مرتبه p^m باشد چنان‌که $G \cong Z_{p^{a_۱}} \times Z_{p^{a_۲}} \times \cdots Z_{p^{a_\lambda}}$، $a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_\lambda > ۰$. $m'_۱ = \lambda$ را

تعداد عامل‌هایی از حاصل‌ضرب که مرتبه آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی p است، در نظر می‌گیریم. m'_2 را تعداد فاکتورهایی که مرتبه بزرگ‌تر یا مساوی p^2 دارند و ... و m'_{a_1} تعداد فاکتورهایی است که مرتبه مساوی p^{a_1} دارند. در ابتدا تعداد عناصر مرتبه p^β که $1 \leq \beta \leq a_1$ را در G می‌یابیم. برای این منظور مرتبه گروه تولید شده با همه عناصری که مرتبه آن‌ها p^β را عاد می‌کند پیدا می‌کنیم و از این مقدار مرتبه گروه تولید شده با همه عناصری که مرتبه آن‌ها $p^{\beta-1}$ را عاد می‌کند، کم می‌کنیم. در حقیقت تعداد عناصر مرتبه p^β در G مساوی مقدار زیر است:

$$p^{m'_1+m'_2+\cdots+m'_\beta} - p^{m'_1+\cdots+m'_{\beta-1}} = (p^{m'_\beta} - 1)p^{m'_1+\cdots+m'_{\beta-1}}$$

اکنون برای به دست آوردن تعداد عناصر مرتبه $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ در یک گروه آبلی دلخواه، تعداد عناصر مرتبه 2^α را در زیرگروه سیلوی مرتبه زوج هر یک از فاکتورهای G می‌یابیم. سپس تعداد عناصر مرتبه $p_1^{\alpha_1}$ را در زیرگروه سیلویی که p_1 مرتبه آن‌ها را عاد می‌کند پیدا می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم. در نهایت حاصل‌ضرب اعداد به دست آمده مساوی تعداد عناصر مرتبه n در گروه آبلی G است.

مثال ۱.۱۶. تعداد عناصر مرتبه ۱۲ در گروه آبلی $Z_2 \times Z_6 \times Z_{24}$ را می‌یابیم. با توجه به الگوریتم فوق تعداد عناصر مرتبه ۴ را در $Z_2 \times Z_2 \times Z_8$ پیدا می‌کنیم. داریم $m'_1 = 3$، $m'_2 = 1$ و $m'_3 = 1$. بنابراین تعداد مورد نظر $2^{3+1} - 2^3 = 8$ است. همچنین تعداد عناصر مرتبه ۳ در $Z_3 \times Z_3$، با در نظر گرفتن $m'_1 = 2$ و $m'_2 = 0$، $3^2 - 3^0 = 8$ می‌باشد. درنتیجه $8 \times 8 = 64$ عنصر از مرتبه ۱۲ در $Z_2 \times Z_6 \times Z_{24}$ وجود دارد.

نتیجه ۱.۱۷. گروه‌های همدیس آبلی یکریختند.

قضیه ۱.۱۸. ([۴۸]) فرض کنید p و q اعداد اولند که $q \mid (p-1)$. در این صورت هر دو گروه همدیس از مرتبه p^2q یکریخت‌اند اگر و تنها اگر $q = 2$.

گروه خودریختی‌های G را با $Aut(G)$ نمایش می‌دهیم. به آسانی دیده می‌شود که به ازای هر g از G، تابع $\tau_g : G \to G$ با ضابطه $\tau_g(x) = g^{-1}xg$ یک خودریختی G است. این خودریختی را خودریختی داخلی G القا شده با g می‌نامند. مجموعه همه خودریختی‌های داخلی G، که آن‌را با $Inn(G)$ نشان می‌دهیم، یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است. به علاوه تابع $\tau : G \to Aut(G)$ با ضابطه $\tau(g) = \tau_g$ یک همریختی است که هسته آن $Z(G)$ است و تصویر τ عبارت است از $Inn(G)$. بنابر قضیه اول یکریختی، $G/Z(G) \cong Inn(G)$.

در ادامه به حاصل‌ضرب گروه‌ها می‌پردازیم و انواع حاصل‌ضرب را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\{G_i\}_{1\leq i\leq n}$ خانواده‌ای متناهی از گروه‌هاست. حاصل‌ضرب دکارتی $\prod_{i=1}^{n} G_i$ با عمل ترکیب مولفه‌وار را حاصل‌ضرب مستقیم خانواده $\{G_i\}_{1\leq i\leq n}$ نامیده و با $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱.۱۹. ([۵۷]) فرض کنید $\{G_i\}_{1\leq i\leq n}$ خانواده‌ای متناهی از زیرگروه‌های G است. در این صورت اگر

۱. $G_i \trianglelefteq G$ ، $1 \leq i \leq n$

۲. $G_1 \cdots G_{i-1} \cap G_i = \{1\}$ ، $2 \leq i \leq n$

۳. $G = G_1 G_2 \cdots G_n$

آن‌گاه G با حاصل‌ضرب مستقیم G_i ها یکریخت است، یعنی $G \cong G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$.

تعریف ۱.۲۰. فرض کنید G یک گروه و K و H زیرگروه‌های G هستند به طوری که

۱. $H \trianglelefteq G$

۲. $H \cap K = \{1\}$

۳. $G = HK$

در این صورت G را حاصل‌ضرب نیم مستقیم H توسط K نامیده و می‌نویسیم $G = H \rtimes K$.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید G یک گروه و K و H زیرگروه‌های آن باشند. دراین صورت G را حاصل‌ضرب مرکزی H و K می‌نامیم هرگاه

۱. $G = HK$،

۲. $hk = kh$ برای تمام $h \in H$ و $k \in K$.

اگر G حاصل‌ضرب مرکزی زیرگروه‌های H و Kباشد آن‌گاه می‌نویسیم $G = H \circ K$.

قضیه ۲۲.۱. ([۵۷]) فرض کنید G حاصل‌ضرب مرکزی زیرگروه‌های H و K است. در این صورت

۱. $H \trianglelefteq G$، $K \trianglelefteq G$ و $H \cap K \leq Z(G)$.

۲. $H \circ K \cong (H \times K)/D$، که D زیرگروه نرمالی از $H \times K$ است. درحالتی که G گروه متناهی باشد داریم

$$|G| = |H \circ K| = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|}.$$

به عبارت دیگر یک گروه G، حاصل‌ضرب مرکزی زیرگروه‌های نرمال $G_۱$، $G_۲$، $\cdots$، G_n است، هرگاه $G = G_۱G_۲ \cdots G_n$ و برای هر $i \neq j$، $[G_i, G_j] = ۱$. به علاوه برای هر i،

$$G_i \cap \prod_{i \neq j} G_i \leq Z(G)$$

به عنوان مثال اگر گروه دووجهی $D_۸ = \langle a, b \mid a^۴ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$ و گروه کواترنیون $Q_۸ = \langle i, j \mid iji = j, jij = i \rangle$ را در نظر بگیریم آن‌گاه

$$\begin{aligned} D_۸ \circ D_۸ &= \frac{D_۸ \times D_۸}{\langle (a^۲, a^۲) \rangle}, \\ Q_۸ \circ Q_۸ &= \frac{Q_۸ \times Q_۸}{\langle (i^۲, i^۲) \rangle} \end{aligned}$$