دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

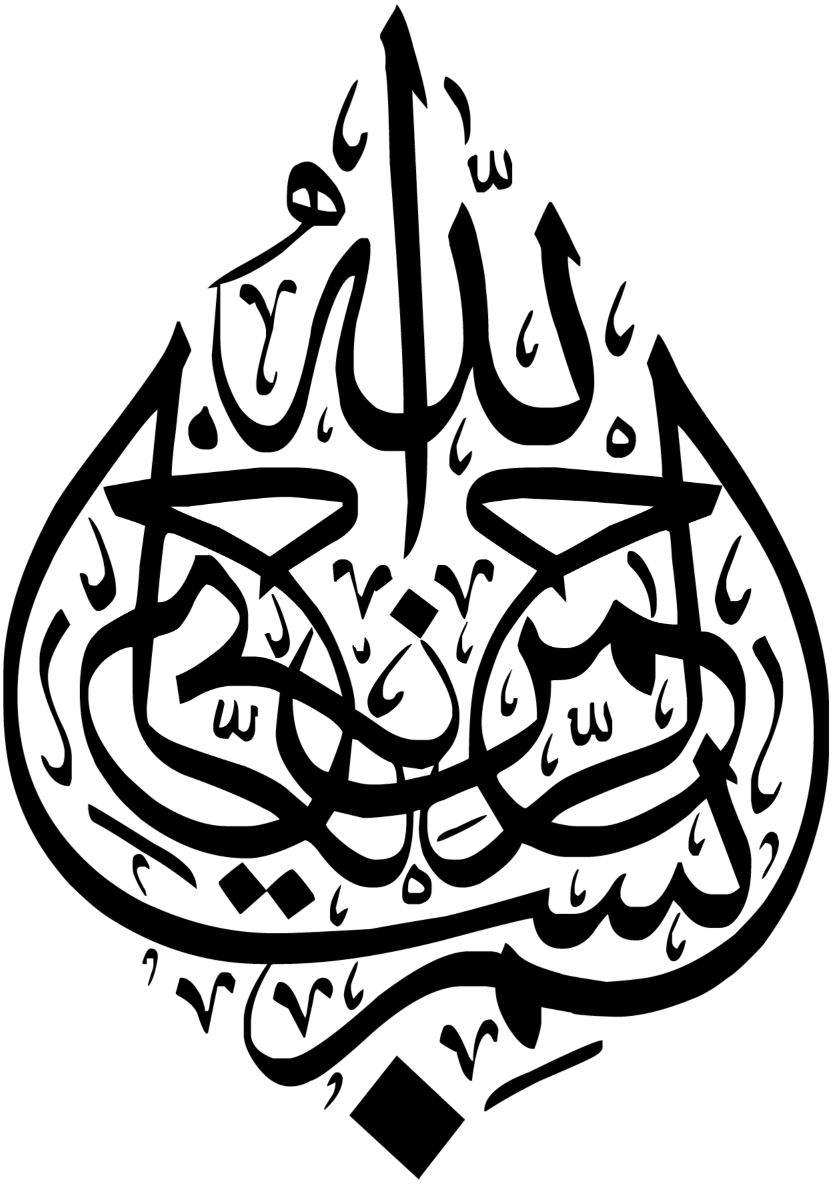
ایده‌آلهای یالی کوهن-مکالی و کوهن-مکالی دنباله‌وار

استاد راهنما
دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور
دکترسید محمود شیخ الاسلامی

پژوهشگر
مینا علی‌خواه ممقانی

شهریور ۱۳۹۱
تبریز - ایران


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

گنجهای زندگی ام :

پدر بزرگوارم

و

مادر مهربانم

خدا

آن حس زیبائیست که در تاریکی صحرا
زمانی که هراس مرگ می دزدد سکوتت را
یکی همچون نسیم دشت می گوید:
کنارت هستم ای تنها
و دل آرام می گیرد.

سپاس‌گزاری...

سپاس خدایی را که انسان را آفرید و قدرت تفکر به او بخشید.

نمی‌توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را بر استادان خویش آشکار نمایم که هرچه گویم و سرایم، کم گفته‌ام.

در آغاز بر خود وظیفه می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ و دلسوزانه استاد راهنمایم، استاد علم و اخلاق، جناب آقای دکتر جعفر امجدی تقدیر و تشکر کنم که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر سید محمود شیخ الاسلامی، که مرا در انجام این پایان نامه همراهی کردند صمیمانه تشکر و قدردانی میکنم و از جناب آقای دکتر بهروز خیرفام سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و نیز از کلیه اساتید محترم در طول دوران تحصیلم و کلیه کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی تشکر می‌کنم و بوسه بر دستان پرمهر پدر و مادرم می‌زنم که همواره یار و پشتیبان من بودند.

مینا علی‌خواه ممقانی

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

فرض‌کنید G یک گراف متناهی ساده با مجموعه رئوس $V(G) = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ و مجموعه یالهای $E(G)$ بوده و $R = \kappa[x_۱, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ایها با n متغیر روی میدان κ باشد. ایده‌آل یالی گراف G، $I(G)$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(G) = \langle\ x_i x_j \ \mid\ \{x_i, x_j\} \in E(G)\rangle.$$

گراف G را کوهن-مکالی (دنباله‌وار) گوییم هرگاه حلقه $\frac{R}{I(G)}$ کوهن-مکالی (دنباله‌وار) باشد. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم تمام گرافهای وتری کوهن-مکالی دنباله‌وار بوده و دوگان الکساندر ایده‌آل یالی آنها مولفه‌وار خطی هستند. همچنین رابطه رئوس یک گراف وتری با بیشینه‌وجه‌هایی از همبافت ساده‌گون G، $\Delta(G)$، که دارای رئوس آزاد هستند مورد بررسی قرار می‌گیرند.

کلمات کلیدی: ایده‌آل یالی، کوهن-مکالی، کوهن-مکالی دنباله‌وار، گراف وتری، دوگان الکساندر، مولفه‌وار خطی.

پیشگفتار

در جبر جابجایی گرافهای وتری برای اولین بار در قضیه فروبرگ [1] ظاهر شدند، وی در آن قضیه ایده‌آلهای منومیال آزاد از مربع با تحلیل ۲-خطی را مشخص کرد. در دهه ۹۰ میلادی، ویلارئل [2] برای هر گراف یک ایده‌آل منومیال نسبت داد و آن را ایده‌آل یالی گراف نامید که این کار باعث ارتباط جبر جابجایی، نظریه گراف و ترکیبیات گردید. وی با استفاده از آن، ضمن معرفی گرافهای کوهن-مکالی و کوهن-مکالی دنباله وار به بررسی خواص آنها پرداخت و ثابت کرد که گرافهای وتری کوهن-مکالی هستند. بعد از آن گرافهای کوهن-مکالی به طور گسترده توسط محققین مختلفی مورد بررسی قرار گرفت.

در این پایان‌نامه، ضمن معرفی ایده‌آل یالی یک گراف به بررسی ایده‌آلهای یالی کوهن-مکالی خواهیم پرداخت. در فصل اول مقدمات لازم از جبر جابجایی، گراف، منومیالها و حلقه و مدولهای مدرج را ارائه می‌کنیم.

در فصل دوم ضمن تعریف گرافهای کوهن-مکالی، گرافهای وتری و شبه‌جنگلها، شرطهای لازم و کافی برای کوهن-مکالی بودن گرافهای وتری را بیان می‌کنیم. همچنین مفاهیمی مانند همبافت خوشه‌ای و ترتیب حذفی کامل را مطرح و گرافهای وتری که دارای این خواص باشند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بعلاوه در این فصل رابطه بین تعداد رئوس گرافهای وتری

[1] $Froberg$
[2] $Villarreal$

کوهن-مکالی، با بیشینه‌وجه‌های همبافت ساده‌گون حاصل از همان گراف، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نهایتا در فصل سوم ضمن ارائه تعریفی از ایده‌آل پلی‌متروئید، ایده‌آل مولفه‌وار خطی، ایده‌آل دارای خارج قسمت خطی و تحلیل خطی ثابت می‌شود که گرافهای وتری کوهن-مکالی دنباله‌وار هستند و در نتیجه گراف وتری کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر ایده‌آل یالی آن ناآمیخته باشد.

این پایان نامه بر اساس مقاله‌های [۴] و [۷] تنظیم شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم و مطالب مقدماتی که در فصلهای بعدی برای اثبات قضایای اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌شود. این کار را در قالب سه بخش انجام می‌دهیم و بخش اول را با عنوان مقدماتی از جبر جابجایی شروع می‌کنیم. در سراسر این پایان نامه R حلقه یکدار و جابجایی فرض می‌شود.

۱.۱ مقدماتی از جبر جابجایی

تعریف ۱.۱. فرض‌کنید I و J دو ایده‌آل از حلقه R باشند. در این صورت

$$I : J = \{f \in R \mid fJ \subseteq I\}$$

یک ایده‌آل R است و آن را **ایده‌آل کولن** I نسبت به J می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. فرض‌کنید I ایده‌آل واقعی از حلقه R باشد. در این صورت ایده‌آل I را **اولیه**[۱] گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$ و $ab \in I$ ، $b \in \sqrt{I}$ یا $a \in I$.

[۱] Primary

اگر I ایده‌آل اولیه باشد آنگاه $\sqrt{I} =: \mathfrak{p}$ ایده‌آل اول است. در این صورت I را **ایده‌آل $\mathfrak{p}$−اولیه** گوییم.

تعریف ۳.۱. فرض‌کنید I ایده‌آل واقعی از حلقه R باشد. اگر $\mathfrak{q}_۱, ..., \mathfrak{q}_n$ ایده‌آلهای اولیه R باشند بطوریکه $I = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathfrak{q}_i$، آنگاه $\bigcap_{i=۱}^{n} \mathfrak{q}_i$ را یک **تجزیه اولیه** I می‌گویند. همچنین تجزیه فوق را یک **تجزیه اولیه مینیمال** می‌گویند هرگاه

i − $\mathfrak{p}_۱, ..., \mathfrak{p}_n$، n ایده‌آل اول متمایز R باشند که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$

ii − به ازای هر $j = ۱, ۲, .., n$، $I \neq \bigcap_{\substack{j=۱ \\ i\neq j}}^{n} \mathfrak{q}_j$.

در این حالت مجموعه n عضوی $\{\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به I، $\mathrm{ass}(I)$، نامیده می‌شود.

قضیه ۴.۱. *فرض‌کنید I ایده‌آل واقعی از حلقه نوتری R باشد. در این صورت I دارای تجزیه اولیه مینیمال است.*

برهان. رجوع شود به نتیجه ۳۵.۴ از [۱۰] . □

تعریف ۵.۱. فرض‌کنید M یک R−مدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقه R باشد. اگر عضوی مانند m در M موجود باشد که $\mathfrak{p} = (۰ : m)$، آنگاه $\mathfrak{p}$ را **ایده‌آل اول وابسته به** M می‌نامند و مجموعه تمام ایده‌آلهای اول وابسته به M را با نماد $\mathrm{Ass}(M)$ [۲] نشان می‌دهند.

تبصره ۶.۱. *بنا به تبصره ۳۳.۹ از [۱۰]، به ازای هر ایده‌آل واقعی I از R ،* $\mathrm{ass}(I) = \mathrm{Ass}(\frac{R}{I})$.

[۲] Associated prime ideal

تعریف ۷.۱. فرض‌کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از حلقه R باشد. سوپریمم طول زنجیرهایی از ایده‌آلهای اول R مانند $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq .... \subseteq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ را **ارتفاع** $\mathfrak{p}$ [۳]، $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$، تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۱. فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل واقعی از آن باشد. **ارتفاع** I، $\mathrm{ht}(I)$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}(I) = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)\}$$

که در آن $\mathrm{Min}(I)$ [۴] مجموعه ایده‌آلهای اول مینیمال I می‌باشد.

تعریف ۹.۱. فرض‌کنید R یک حلقه باشد. **بعد** R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim(R) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\}$$

تعریف ۱۰.۱. فرض‌کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. در این صورت R را **منظم** گویند هرگاه $\dim(R) = \mathrm{vdim}_{\frac{R}{\mathfrak{m}}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$.

قضیه ۱۱.۱. *فرض‌کنید $R = \kappa[x_1, \ldots .x_n]$ حلقه چندجمله‌ایها روی میدان κ و I ایده‌آل واقعی از R باشد. در این صورت*

$$\dim(R) = \dim(R/I) + \mathrm{ht}(I).$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۲.۱.۷ از [۱۱] . □

[۳] height
[۴] Minimal prime ideal

تعریف ۱۲.۱. فرض‌کنید M یک $R-$مدول روی حلقه جابجایی R باشد. یک **پایه** برای M خانواده $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از اعضای M است که

i - $\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک مجموعه مولد برای M باشد؛

ii - هر عضو $m\in M$ به طور منحصربه فردی به شکل $m=\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ نوشته شود بطوریکه به ازای هر $\lambda\in\Lambda$، $r_\lambda\in R$ و فقط تعداد متناهی از r_λ ها مخالف صفر باشند. $R-$مدول F را یک $R-$مدول آزاد گوییم هرگاه حداقل دارای یک پایه باشد.

تعریف و لم ۱۳.۱. *فرض‌کنید R یک حلقه غیربدیهی و F ، $R-$مدول آزاد با پایه متناهی باشد. در این صورت هر پایه F متناهی بوده و همه پایه‌های F هم‌عددند. تعداد اعضای پایه F را رتبه F نامیده و با $\mathrm{rank}F$ نشان می‌دهند.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۶.۵۸ از [۱۰] . □

تعریف ۱۴.۱. فرض‌کنید M یک مدول روی حلقه R باشد. عنصر غیرصفر r از R را یک **مقسوم‌علیه‌صفر** روی M گوییم هرگاه $m\in M$ چنان موجود باشد که $m\neq 0$ و $rm=0$. مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های‌صفر روی M را با $\mathrm{Zd}(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۵.۱. فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول ناصفر متناهی مولد باشد. عناصر $a_1,\ldots,a_n$ از R را یک $M-$ **رشته** ($M-$**رشته منظم**[۵]) به طول n، گوییم هرگاه

i - $M\neq(a_1,\ldots,a_n)M$ ؛

ii - به ازای هر $i=1,2,\ldots,n$، $a_i\notin \mathrm{Zd}_R\dfrac{M}{(a_1,\ldots,a_{i-1})M}$.

[۵] Regular sequence

تعریف ۱۶.۱. فرض‌کنید R یک حلقه نوتری، M یک $R-$مدول غیر صفر متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد که $M \neq IM$. $(a_i)_{i=1}^n$ را $M-$**رشته ماگزیمال** در I گویند، هرگاه $(a_i)_{i=1}^n$ یک $M-$رشته در I بوده و $I \subseteq \mathrm{Zd}(\frac{M}{(a_1, ..., a_n)M})$.

لم و تعریف ۱۷.۱. *فرض‌کنید R یک حلقه نوتری، M یک $R-$مدول غیر صفر متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد که $M \neq IM$. در این صورت طول همه $M-$رشته های ماگزیمال واقع در ایده‌آل I با هم برابرند. این عدد را **درجه** I روی M، $\mathrm{grad}_M(I)$، می‌نامند. هرگاه $M = R$، آنگاه درجه I روی R را با $\mathrm{grad}(I)$ نشان می‌دهند.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۶.۱۳ در [۱۰] . □

تعریف ۱۸.۱. فرض‌کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی [۶] و M یک $R-$مدول باشد. درجه $\mathfrak{m}$ روی M، $\mathrm{depth}_R(M)$، را **عمق** مدول M روی R می‌نامند.

تعریف ۱۹.۱. حلقه نوتری R را **کوهن-مکالی**[۷] گویند هرگاه به ازای هر ایده‌آل I از R،

$$\mathrm{ht}(I) = \mathrm{grad}(I) .$$

به ویژه اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد، آنگاه R **کوهن-مکالی** است هرگاه

$$\dim(R) = \mathrm{depth}(R).$$

---
[۶] Local ring
[۷] Cohen-Macaualy

لم ۲۰.۱. *فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و J ایده‌آلی از آن باشد که توسط یک $R-$رشته به طول n تولید می‌شود. در این صورت $\mathrm{ht}(J) = n$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۱۶.۱۹ در [۱۰] . □

تعریف ۲۱.۱. فرض‌کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. I را **ناآمیخته** [۸] گویند هرگاه به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از $\mathrm{Ass}(\frac{R}{I})$، $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

تعریف ۲۲.۱. فرض‌کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد. مدول M را **کوهن-مکالی** گویند اگر $M = \langle ۰ \rangle$ یا $\mathrm{dim}(M) = \mathrm{depth}(M)$.

قضیه ۲۳.۱. *فرض‌کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی بوده و $M \neq \langle ۰ \rangle$ ، $R-$مدول کوهن- مکالی روی R باشد. همچنین فرض‌کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. در این صورت $\mathrm{dim}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \mathrm{depth}(M)$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱.۳.۱۱ در [۱۱] . □

لم ۲۴.۱. *فرض‌کنید $R = \kappa[x_۱, ..., x_n]$ حلقه چندجمله‌ایها روی میدان κ و I ایده‌آلی از حلقه R باشد. اگر حلقه $\frac{R}{I}$ کوهن- مکالی باشد آنگاه I ناآمیخته است.*

برهان. فرض‌کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\frac{R}{I})$ دلخواه باشد. در این صورت طبق قضیه ۲۳.۱ داریم:

$$\mathrm{dim}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \mathrm{depth}(\frac{R}{I})$$

[۸] Unmixed

از طرفی چون حلقه $\frac{R}{I}$ کوهن-مکالی است بنابراین $\dim(\frac{R}{I}) = \operatorname{depth}(\frac{R}{I})$. در نتیجه $\dim(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \dim(\frac{R}{I})$، اما طبق قضیه ۱۱.۱ داریم $\dim(R) - \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R) - \operatorname{ht}(I)$ پس $\operatorname{ht}(I) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$، بنابراین I ناآمیخته است. $\square$

تعریف ۲۵.۱. حلقه R را یک حلقه $\mathbb{Z}$– **مدرج** گوییم هرگاه خانواده $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از زیرگروههای جمعی R موجود باشند بطوریکه

i - $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ ؛

ii - به ازای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ ، $R_n.R_m \subseteq R_{n+m}$.

در ادامه هر جا حلقه مدرج ذکر شود منظور حلقه $\mathbb{Z}$–مدرج می‌باشد.

تبصره و تعریف ۲۶.۱. *فرض‌کنید $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ یک حلقه مدرج باشد . در این صورت هر عضو $r \in R$ دارای نمایش منحصربه‌فردی به صورت $r = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r_m$ است که در آن به جز تعداد متناهی از r_m ها، بقیه صفر هستند. اعضای R_m را همگن [۹] از درجه m و r_m ها را مولفه‌های همگن r، از درجه m می‌گویند.*

تعریف ۲۷.۱. فرض‌کنید R یک حلقه مدرج باشد. R–مدول M را یک R–**مدول** $\mathbb{Z}$– **مدرج** گوییم هرگاه خانواده $\{M_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ از زیرگروههای M موجود باشند که

i - $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ؛

ii - به ازای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ ، $R_n.M_m \subseteq M_{n+m}$.

[۹] Homogeneouse

در ادامه هر جا مدول مدرج ذکر شود منظور مدول $\mathbb{Z}$−مدرج می‌باشد.

قضیه ۱.۲۸. *فرض‌کنید $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ یک R−مدول مدرج و N زیرمدولی از آن باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:*

i - $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(M_n \cap N)$؛

ii - *اگر $y \in N$، آنگاه مولفه‌های همگن y در N واقع هستند؛*

iii - N *یک مجموعه مولد همگن دارد.*

برهان. $\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii}$: فرض‌کنید y عضو دلخواه N باشد. بنابراین از فرض نتیجه می‌شود که $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n$ که در آن $y_n \in M_n \cap N$. درنتیجه به ازای هر n، $y_n \in N$ و چون نمایش هر عضو در M منحصر به فرد است، پس y_nها تنها مولفه‌های همگن N هستند.

$\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{iii}$: فرض‌کنید X مجموعه عناصر همگن N بوده و RX نشان دهنده مدول تولید شده توسط X باشد. فرض‌کنید $N \neq \langle 0 \rangle$. نشان می‌دهیم که $RX = N$. واضح است که $RX \subseteq N$. فرض‌کنید e عضو دلخواه N باشد، در این صورت $e = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n$. چون e_nها مولفه‌های همگن e هستند پس طبق فرض $e_n \in N$، در نتیجه $e_n \in X$. بنابراین $y \in RX$، از اینرو $N \subseteq RX$.

$\mathrm{iii} \Rightarrow \mathrm{i}$: روشن است که $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(M_n \cap N) \subseteq N$.

فرض‌کنید X یک مجموعه همگن N بوده و e عضو دلخواه N باشد. در این صورت عناصر همگنی مانند $e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_n}$ از M موجودند بطوریکه $e = r_{\gamma_1}e_{\gamma_1} + r_{\gamma_2}e_{\gamma_2} + \cdots + r_{\gamma_n}e_{\gamma_n}$ که در آن $r_{\gamma_i} \in R$ و $e_{\gamma_i} \in X$، $(1 \leq i \leq n)$. چون R، حلقه مدرج است پس به ازای هر i، $r_{\gamma_i} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} s_{r_{i_j}}$، در نتیجه e به‌صورت مجموع عناصر همگن در M می‌باشد که مولفه‌های

همگن آن همگی در N هستند، پس $e \in \sum_{n\in\mathbb{Z}}(M_n \cap N)$. بنابراین $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(M_n \cap N)$. $\square$

تعریف ۲۹.۱. زیرمدول N از $R-$مدول مدرج M $(M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n)$ را زیرمدول همگن یا مدرج می‌نامند در صورتیکه در یکی از شرایط معادل قضیه ۲۸.۱ صدق کند. به‌ویژه ایده‌آلی از R را **ایده‌آل همگن یا مدرج** می‌نامند در صورتی که به عنوان یک زیر مدول آن همگن باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض‌کنید R یک حلقه مدرج باشد. در این صورت R را **حلقه مدرج نوتری** گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آلهای همگن آن ایستا باشد.

تعریف ۳۱.۱. $R-$مدول مدرج F را $R-$مدول مدرج **آزاد** گوییم اگر پایه‌ای مانند $\{m_i\}_{i\in I}$ از عناصر همگن وجود داشته باشد.

تعریف ۳۲.۱. فرض‌کنید $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ و $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$ ، $R-$مدولهای مدرج بوده و $f : M \longrightarrow N$ یک $R-$ همومورفیسم باشد. فرض‌کنید $\lambda \in \mathbb{Z}$، f را یک $R-$ **همومورفیسم از درجه** λ گوییم هرگاه $f(M_n) \subseteq N_{n+\lambda}$.

مثال ۳۳.۱. *i* : *فرض‌کنید $r \in R$ همگن از درجه n باشد. رابطه Γ_r که از M به M به صورت $\Gamma_r(x) = rx$ تعریف می‌شود یک $R-$ همومورفیسم از درجه n است.*

ii : *فرض‌کنید $\lambda \in \mathbb{Z}$ و $M^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n^*$ که در آن $M_n^* = M_{n+\lambda}$. در این صورت M^* یک $R-$ مدول مدرج است که آن را با نماد $M(\lambda)$ نمایش می‌دهند.*

iii - فرض کنید $r \in R$ یک عضو همگن از درجه λ باشد. در این صورت $R-$ همومورفیسم $\varphi_r : M(-\lambda) \longrightarrow M$ که با ضابطه $\varphi_r(x) = rx$ تعریف می‌شود یک $R-$ همومورفیسم از درجه صفر است.