بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

گروه ریاضی – گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش‌های تفاضل متناهی برای حل معادلات فوکر – پلانک کسری و گرما – موج کسری

استاد راهنما:

دکتر بهنام سپهریان

استاد مشاور:

دکتر علی‌محمد نظری

توسط:

سارا پروال

دانشگاه اراک

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه انتگرال‌ها و مشتقات کسری و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را معرفی می‌کنیم. همچنین معادلات فوکر– پلانک کسری و معادله گرما – موج کسری را معرفی می‌کنیم و با روش‌های تفاضل متناهی به حل آن‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: روش‌های تفاضل متناهی، مشتقات کسری، معادلات فوکر – پلانک کسری، معادله گرما – موج کسری.

پیش‌گفتار

از آنجایی که معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری در بسیاری از علوم از جمله فیزیک، زیست‌شناسی و مهندسی کاربرد دارند، اخیراً حل عددی این معادلات مورد توجه قرار گرفته است. یکی از روش‌های عددی برای حل این گونه معادلات روش‌های تفاضل متناهی است که در این پایان‌نامه ار آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است.

در فصل اول با تاریخچه حساب کسری، تعاریف انتگرال‌ها و مشتقات کسری و مفاهیم مقدماتی آشنا می‌شویم.

در فصل دوم به حل عددی معادلات فوکر – پلانک کسری می‌پردازیم. این فصل ۳ بخش دارد. در بخش اول معادله فوکر – پلانک با مشتق جزئی کسری نسبت به زمان را معرفی و روش‌های عددی برای حل آن ارائه خواهیم داد. همگرایی و پایداری این روش‌ها را نیز بررسی خواهیم کرد. در بخش دوم حل عددی معادله فوکر – پلانک خطی با مشتق جزئی کسری نسبت به زمان و فضا با یک روش تفاضل متناهی همراه با همگرایی و پایداری روش بیان شده است. در بخش سوم به حل عددی معادله فوکر – پلانک غیر خطی با مشتق جزئی کسری نسبت به زمان و فضا پرداخته‌ایم.

در فصل سوم معادله گرما – موج کسری را معرفی می‌کنیم و در بخش اول این فصل یک روش تفاضل متناهی ضمنی برای حل آن ارائه می‌دهیم. در بخش دوم این فصل معادله گرما – موج را با یک روش تفاضلی کاملاً گسسته حل خواهیم کرد و همگرایی و پایداری آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل ابتدا به معرفی حساب کسری می‌پردازیم، سپس قضایا و مطالبی که در این پایان نامه مورد نیاز هستند را ارائه می‌دهیم.

۱.۱ حساب کسری

ابتدا تاریخچه‌ای از حساب کسری را بیان می‌کنیم[7].

۱.۱.۱ تاریخچه

مبحث حساب کسری که شامل حساب دیفرانسیل و انتگرال از هر مرتبه‌ی حقیقی یا مختلط است، در طی سه دهه‌ی اخیر عمومیت و اهمیت قابل ذکری یافته است. به طوری که شرح و اثبات کاربردهایش به صورت گسترده و گوناگونی در رشته‌های علوم و مهندسی دیده می شود. ابتدا ریاضیدانان مشتق و انتگرال را به مرتبه کسری بسط دادند و آن را حساب کسری نامیدند. با گسترش مشتق و انتگرال به مرتبه‌ی هر عدد حقیقی و مختلط باز همین نام روی آن باقی ماند که تا حدی غلط انداز است. مفهوم حساب کسری ریشه در یک سوال دارد. سوالی که مارکوس د هوپیتال [1] در سال ۱۶۹۵ از گاتفر ویلهلم لیبنیز[2] پرسید. بیشتر ریاضیدانان با مشتق مرتبه n ام

---

[1] $Marquis\ de\ L\ Hopital$

[2] $GottfriedWilhelmLeibniz$

لیبنیز ($\frac{d^n y}{dx^n}$) که n عدد صحیح است آشنا هستند. سوال این بود. در مشتق لیبنیز زمانی که $n = 1/2$ چه اتفاقی می افتد؟

در سال ۱۸۱۹، لکرویکس [3] مشتق مرتبه n ام تابع $y = x^m$ که m یک عدد صحیح است را به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}, \quad m \geq n \quad , \tag{۱.۱.۱}$$

که Γ نشان دهنده تابع گاماست و برای $\nu > 0$ بدین صورت است

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\nu-1}dx\,. \tag{۲.۱.۱}$$

لکرویکس برای $y = x$ و $n = \frac{1}{2}$ جواب زیر را به دست آورد

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

روش لکرویکس برای بسیاری از توابع قابل استفاده نبود.

بیشترین پیشرفت در حساب کسری در سال ۱۸۳۲ توسط جوزف لیوویل [4] به دست آمد. او از نتایج شناخته شده در مورد مشتق از مرتبه صحیح تابع e^{ax} که به صورت زیر است استفاده کرد.

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}.$$

و آن را به مشتق از مرتبه دلخواه به این شکل بسط داد

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}. \tag{۳.۱.۱}$$

بعد از آن مشتق از مرتبه دلخواه را برای توابعی که به صورت یک سری به شکل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \qquad x \geq n. \tag{۴.۱.۱}$$

قابل نمایش اند را به صورت زیر ارائه داد

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x},$$

---

[3] F.Lacroix

[4] Joseph Liouvill

که به عنوان اولین فرمول لیوویل برای مشتق کسری شناخته شد. اگر چه این تعریف برای مشتق از مرتبه دلخواه است اما تنها برای توابعی مفید است که بتوان آنها را به شکل (۴.۱.۱) نوشت. به علت محدودیت این تعریف لیوویل به ارائه تعریف دوم پرداخت. او ابتدا یک انتگرال به صورت زیر تعریف کرد که بسیار نزدیک به تعریف تابع گاما در (۲.۱.۱) است.

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu}\, du, \qquad a > 0, \qquad x > 0. \tag{۵.۱.۱}$$

با تغییر متغیر $xu = t$ رابطه زیر را به دست آورد

$$I = x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt = x^{-a}\Gamma(a). \tag{۶.۱.۱}$$

رابطه بالا معادل است با

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I.$$

لیوویل با توجه به تعریف انتگرال I در (۵.۱.۱) و مشتق مرتبه ν در (۳.۱.۱)، با گرفتن D^ν از دو طرف معادله بالا رابطه زیر را به دست آورد

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu}\, du. \tag{۷.۱.۱}$$

از طرفی با کمک تغییر متغیر $xu = t$ انتگرال رابطه بالا را به شکل زیر نوشت

$$\int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu}\, du = x^{-(a+\nu)}\Gamma(a+\nu). \tag{۸.۱.۱}$$

و سرانجام با استفاده از روابط (۷.۱.۱) و (۸.۱.۱) دومین تعریف مشتق کسری خود را بدین صورت ارائه داد

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \qquad a > 0.$$

اما این تعریف نیز تنها محدود به توابعی به شکل $f(x) = x^{-a},\ a > 0$ بود. با ارزش ترین پیشرفت در توسعه حساب کسری از مقاله های ریمان [5] که در سال ۱۸۹۲ انتشار یافتند، به دست آمده است.

---

[5] G.F.Bernhard Riemman

ریمان با تعمیم سری تیلور قاعده‌ی زیر را برای مشتق از مرتبه دلخواه به دست آورد

$$D^{\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt+\psi(x). \qquad (۹.۱.۱)$$

به علت ابهام در حد پایین انتگرال یعنی c، ریمان به تعریفش تابع متمم $\psi(x)$ را اضافه کرد.

در سال‌های ۱۸۶۷—۱۸۶۸ گرانوالد [6] و لتنیکف [7] برای تعریف مشتق کسری از روش تفاضل متناهی استفاده کردند. با بررسی ویژگی های مشتق کسری، اثبات شد که این تعریف با مشتق ریمان — لیوویل هم ارز است.

در سال ۱۹۶۷ کاپاتو [8] نوع دیگری از مشتق کسری که بر گرفته از مشتق کسری ریمان — لیوویل است را تعریف کرد.

یک کاربرد از مشتق و انتگرال کسری را بیان می‌کنیم.

آبل [9] اولین کسی بود که حساب کسری را برای حل معادله انتگرال در مسئله مکانیکی آبل به کار برد. این مسئله عبارت است از مشخص کردن نمودار حاصل از حرکت یک جسم به جرم m در یک زمان مشخص، مستقل از موقعیت شروع حرکت، بر روی یک صفحه عمودی بدون اصطکاک که از مبدأ می گذرد. اگر زمان حرکت ثابت T باشد معادله انتگرال آبل به صورت زیر است

$$T\sqrt{2g}=\int_0^{\eta}(\eta-y)^{-1/2}f'(y)dy, \qquad (۱۰.۱.۱)$$

که g شتاب ناشی از جاذبه زمین، (ξ,η) موقعیت اولیه جسم و $s=f(y)$ معادله نمودار هموار است. معادله بالا هم ارز است با

$$T\sqrt{2g}=\Gamma(1/2)D^{1/2}f'(\eta).$$

تعاریف

قبل از ارائه انواع مشتقات کسری تعاریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ تابع f را روی R انتگرال پذیر گوییم هرگاه $\int_{-\infty}^{+\infty}|f|\,dx<\infty$.

Grundwald[6]

Letnikov[7]

Caputo[8]

Niels Henrik Abel[9]

تعریف ۲.۱.۱ مجموعه‌ی تمام توابع انتگرال پذیر روی R را با $L^1(R)$ نشان می‌دهیم.

تابع مطلقاً پیوسته فرض کنید $I \subseteq R$، تابع $f : I \to R$ را مطلقاً پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دنباله از زیر بازه های باز جدا از هم (یعنی اشتراک آنها تهی باشد) مانند $\{(a_n, b_n)\}_{n\geq 1}$ که در رابطه‌ی $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$ صدق کنند داشته باشیم $\sum_{n=1}^{\infty} |f(b_n) - f(a_n)| < \epsilon$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $(-\infty < a < b < +\infty)$ $[a, b]$ یک بازه کراندار باشد آنگاه فضای توابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ را با$AC[a, b]$ نشان می دهیم و برای $n \in N$ فضای توابع مختلط $f(x)$ را که دارای مشتق های پیوسته تا مرتبه $n-1$ روی بازه $[a, b]$ هستند به طوری که $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$ با $AC^n[a, b]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ مجموعه تمام توابع پیوسته روی R^n را با $C(R^n)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ فضای تمام توابع روی R که مشتقات جزئی آن ها تا مرتبه‌ی $k \in N$ وجود دارد و پیوسته است را با $C^k(R)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فضای توابع روی R^2 که دارای مشتق جزئی پیوسته نسبت به x تا مرتبه p و مشتق جزئی پیوسته نسبت به t تا مرتبه q است را با $C_{x,t}^{p,q}(R^2)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ $f \in C(R)$ را در بی نهایت صفر گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه‌ی $\{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$ فشرده باشد و $C_0(R)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$C_0(R) = \{f \in C(R) | \text{در بی نهایت صفر باشد } f\}.$$

تعریف ۸.۱.۱ دنباله‌ی $\{f_n\}_{n\geq 1}$ بر R به طور یکنواخت به f همگراست هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \quad , \exists M \in N \; ; n \geq M \;\Rightarrow\; \forall x \in R, \; |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \, .$$

همچنین سری $\sum f_n(x)$ بر R به طور یکنواخت همگراست هرگاه دنباله‌ی s_n از مجموع های جزئی سری که با $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ تعریف می‌شود بر R به طور یکنواخت همگرا باشد.

تعریف ۹.۱.۱ تابع مختلط f را در z_0 تحلیلی گوییم. هرگاه گوی باز به مرکز z_0 یافت شود که f بر آن مشتق پذیر باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $f(t)$ تابعی انتگرال پذیر باشد آن‌گاه تبدیل فوریه‌ی $f(t)$ وجود

دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\mathcal{F}f)(k) = \mathcal{F}[f(t)](k) = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} f(t)dt, \qquad (k \in R),$$

و تبدیل فوریه‌ی معکوس $f(t)$ به شکل زیر است

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(k) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](k) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} f(t)dt, \qquad (k \in R).$$

نکته ۱.۱.۱ اگر $f \in C^{m+1}(R^n)$ و $\partial^\alpha f \in L^1(R^n) \cap C_0(R^n)$ برای $\alpha \leq m+1$، آن‌گاه ثابت مثبت c وجود دارد به طوری‌که

$$|\hat{f}(\xi)| \leq c(1+|\xi|)^{-m-1}.$$

در نتیجه $\hat{f} \in L^1(R^n)$. [5]

۲.۱.۱ انتگرال‌های کسری ومشتقات کسری ریمان – لیوویل

تعاریف انتگرال‌های کسری ومشتقات کسری ریمان – لیوویل را روی یک بازه کراندار از محوراعداد حقیقی ارائه می‌دهیم. فرض کنیم $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ یک بازه کراندار روی محور اعداد حقیقی باشد. انتگرال‌های کسری ریمان – لیوویل چپ و راست از مرتبه $\alpha \in C$ که قسمت حقیقی آن یعنی $R(\alpha)$ مثبت است را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(I^\alpha_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\ dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \qquad (x > a\ ;\ \ R(\alpha) > 0), \qquad (۱۱.۱.۱)$$

$$(I^\alpha_{b-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)\ dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \qquad (x < b\ ;\ \ R(\alpha) > 0), \qquad (۱۲.۱.۱)$$

که $\Gamma(\alpha)$ تابع گاماست

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx\,.$$

باید توجه داشت که اگر $\alpha = n$ تعاریف (۱۱.۱.۱) و (۱۲.۱.۱) با انتگرال‌های مرتبه nام معادل می‌شوند. یعنی

$$(I_{a+}^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \tag{۱۳.۱.۱}$$

$$(I_{b-}^n f)(x) = \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)\, dt. \tag{۱۴.۱.۱}$$

مشتقات کسری ریمان – لیوویل $D_{a+}^\alpha f$ و $D_{b-}^\alpha f$ از مرتبه $\alpha \in C$ که قسمت حقیقی آن مثبت است به صورت زیرند

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{۱۵.۱.۱}$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\, dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{۱۶.۱.۱}$$

که $R(\alpha) \geq 0$ و $n = [R(\alpha)] + 1$.

علاوه بر آن به ازای $\alpha = n \in W$ که W مجموعه اعداد حسابی است، داریم

$$(D_{a+}^n f)(x) = f^{(n)}(x), \tag{۱۷.۱.۱}$$

$$(D_{b-}^n f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x), \tag{۱۸.۱.۱}$$

که در روابط بالا $f^{(n)}(x)$ مشتق معمولی $f(x)$ از مرتبه n است. همچنین

$$(D_{a+}^0 f)(x) = (D_{b-}^0 f)(x) = f(x). \tag{۱۹.۱.۱}$$

نکته ۲.۱.۱ اگر $\alpha, \beta \in C$ و $R(\beta) > 0$ و $R(\alpha) \geq 0$ آن‌گاه با توجه به انتگرال‌ها و مشتق های ریمان–لیوویل که در (۱۱.۱.۱)، (۱۲.۱.۱)، (۱۵.۱.۱) و (۱۶.۱.۱) تعریف شده‌اند

برای توابع توانی به شکل $(x-a)^{\beta-1}$ و $(b-x)^{\beta-1}$ خصوصیات زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\left(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, \;\; R(\alpha)>0,\\
\left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \;\; R(\alpha)\geq 0,\\
\left(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}, \;\; R(\alpha)>0,\\
\left(D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1} \;\; ,R(\alpha)\geq 0.
\end{aligned}$$

لم ۱.۱.۱ اگر $R(\alpha)>0$ و $f(x)\in L^1(a,b)$ آن‌گاه معادلات زیر روی بازه $[a,b]$ تقریباً همه جا برقرارند

$$\left(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=f(x),$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\alpha}f\right)(x)=f(x).$$

برهان: اثبات در مراجع $[7,11]$ آمده است. □

لم ۲.۱.۱ فرض کنید $R(\alpha)>0$ و $n=[R(\alpha)]+1$. قرار دهید $f_{n-\alpha}(x)=\left(I_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)$ که $\left(I_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)$ انتگرال کسری از مرتبه $n-\alpha$ تعریف شده در رابطه (۱۱.۱.۱) است.

اگر $f(x)\in L^1(a,b)$ و $f_{n-\alpha}(x)\in AC^n[a,b]$ آن‌گاه معادله زیر روی بازه $[a,b]$ تقریباً همه جا برقرار است

$$\left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

به ویژه اگر $0<R(\alpha)<1$ آن‌گاه

$$\left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=f(x)-\frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}.$$

که $f_{1-\alpha}(x)=\left(I_{a+}^{1-\alpha}f\right)(x)$.

برهان: اثبات در مراجع $[7,11]$ آمده است. □

۳.۱.۱ انتگرال‌ها و مشتقات کسری لیوویل روی محور مثبت

انتگرال‌های کسری ریمان – لیوویل (۱۱.۱.۱) و (۱۲.۱.۱) و مشتقات کسری (۱۵.۱.۱) و (۱۶.۱.۱) تعریف شده روی بازه کراندار $[a, b]$ از خط حقیقی را می‌توان روی محور R^+ تعمیم داد.

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)\ dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad , \quad (x > 0\ ; \ \ R(\alpha) > 0), \tag{۲۰.۱.۱}$$

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)\ dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad , \quad (x > 0\ ; \ \ R(\alpha) > 0), \tag{۲۱.۱.۱}$$

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{f(t)\ dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{۲۲.۱.۱}$$

$$(D_{-}^{\alpha} f)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} \frac{f(t)\ dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{۲۳.۱.۱}$$

که $R(\alpha) \geq 0$، $x > 0$ و $n = [R(\alpha)] + 1$.

۴.۱.۱ انتگرال‌ها و مشتقات کسری لیوویل روی محور اعداد حقیقی

انتگرال‌های کسری لیوویل و مشتقات کسری لیوویل روی R به طور مشابه قابل تعریف اند.

$$(I_{+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)\ dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad , \quad (x \in R; \ \ R(\alpha) > 0), \tag{۲۴.۱.۱}$$

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)\ dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad , \quad (x \in R; \ \ R(\alpha) > 0), \tag{۲۵.۱.۱}$$

$$(D_{+}^{\alpha} f)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{+}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{-\infty}^x \frac{f(t)\ dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{۲۶.۱.۱}$$

$$(D_{-}^{\alpha} f)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} \frac{f(t)\ dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{۲۷.۱.۱}$$

که $R(\alpha) \geq 0, x \in R$ و $n = [R(\alpha)] + 1$.

$(I_{+}^{\alpha} f)(x)$ و $(I_{-}^{\alpha} f)(x)$ را انتگرال کسری چپ و انتگرال کسری راست لیوویل و $(D_{+}^{\alpha} f)(x)$ و $(D_{-}^{\alpha} f)(x)$ رامشتق کسری چپ و مشتق کسری راست لیوویل روی محور حقیقی می‌نامند.

علاوه بر آن به ازای $\alpha = n \in W$ داریم

$$
\begin{aligned}
(D_{+}^{0} f)(x) &= (D_{-}^{0} f)(x) = f(x), \\
(D_{+}^{n} f)(x) &= f^{(n)}(x), \\
(D_{-}^{n} f)(x) &= (-1)^{n} f^{(n)}(x),
\end{aligned} \qquad (۲۸.۱.۱)
$$

که $f^{(n)}(x)$ مشتق معمولی $f(x)$ از مرتبه n است.

۵.۱.۱ مشتقات کسری کاپاتو

فرض کنیم $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ یک بازه کراندار روی محور اعداد حقیقی باشد و

$$
\begin{aligned}
\left(D_{a+}^{\alpha}[f(t)]\right)(x) &\equiv \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x). \\
\left(D_{b-}^{\alpha}[f(t)]\right)(x) &\equiv \left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x).
\end{aligned}
$$

مشتقات کسری ریمان – لیوویل از مرتبه α باشند، مشتقات کسری کاپاتو $\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} f\right)$ و$\left({}^{c}D_{b-}^{\alpha} f\right)$ روی بازه $[a,b]$ را از طریق مشتقات کسری ریمان – لیوویل به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$
\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} f\right) := \left(D_{a+}^{\alpha}\Big[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\Big]\right)(x), \qquad (۲۹.۱.۱)
$$

$$
\left({}^{c}D_{b-}^{\alpha} f\right) := \left(D_{b-}^{\alpha}\Big[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}\Big]\right)(x), \qquad (۳۰.۱.۱)
$$

که اگر $\alpha \in W$، $n = \alpha$ و اگر $\alpha \notin W$، $n = [R(\alpha)] + 1$.

این مشتقات را به ترتیب مشتق کسری کاپاتوی چپ و مشتق کاپاتوی راست از مرتبه α می‌نامیم. همچنین اگر $0 < R(\alpha) < 1$، داریم

$$
\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} f\right) := \left(D_{a+}^{\alpha}[f(t) - f(a)]\right)(x), \qquad (۳۱.۱.۱)
$$

$$
\left({}^{c}D_{b-}^{\alpha} f\right) := \left(D_{b-}^{\alpha}[f(t) - f(b)]\right)(x). \qquad (۳۲.۱.۱)
$$

اگر $\alpha \notin W$ و $f(x)$ تابعی باشد که مشتقات کسری کاپاتو و ریمان – لیوویل آن از مرتبه α موجود باشند آن‌گاه با توجه به (۲۹.۱.۱)–(۳۰.۱.۱) و نکته (۲.۱.۱) این مشتقات بدین صورت به هم مربوط می‌شوند

$$\left({}^cD_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}\ , \qquad (۳۳.۱.۱)$$

$$\left({}^cD_{b-}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}\ . \qquad (۳۴.۱.۱)$$

همچنین اگر $0 < R(\alpha) < 1$ داریم

$$\left({}^cD_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}\ , \qquad (۳۵.۱.۱)$$

$$\left({}^cD_{b-}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}\ , \qquad (۳۶.۱.۱)$$

که $n = [R(\alpha)] + 1$.

اگر $\alpha \notin W$ و $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ آن‌گاه مشتق کسری کاپاتو (۲۹.۱.۱) مطابق با مشتق ریمان– لیوویل (۱۵.۱.۱) خواهد شد.

اگر $\alpha \notin W$ و $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(n-1)}(b) = 0$ آن‌گاه مشتق کسری کاپاتو (۳۰.۱.۱) مطابق با مشتق ریمان – لیوویل (۱۶.۱.۱) خواهد شد.

به ویژه اگر $0 < R(\alpha) < 1$ آن‌گاه اگر $f(a) = 0$ داریم

$$\left({}^cD_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x), \qquad (۳۷.۱.۱)$$

و اگر $f(b) = 0$ داریم

$$\left({}^cD_{b-}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha}f\right)(x). \qquad (۳۸.۱.۱)$$

همچنین اگر $\alpha = n \in W$ و $f^{(n)}(x)$ موجود باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\left({}^cD_{a+}^{\alpha}f\right)(x) &= f^{(n)}(x),\\ \left({}^cD_{b-}^{\alpha}f\right)(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x). \qquad (۳۹.۱.۱)\end{aligned}$$

برای تابع fای که مشتقات کسری ریمان – لیوویل آن موجود است مشتقات کسری کاپاتو، $\left({}^cD_{a+}^{\alpha}f\right)(x)$ و $\left({}^cD_{b-}^{\alpha}f\right)(x)$ را می توان تعریف کرد. به ویژه برای توابعی که متعلق به $AC^n[a,b]$ باشند.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید $R(\alpha) \geq 0$ و $n = [R(\alpha)] + 1$ ، اگر $f(x) \in AC^n[a,b]$ آن‌گاه مشتقات کسری کاپاتوی $({}^cD^\alpha_{a+}f)(x)$ و $({}^cD^\alpha_{b-}f)(x)$ تقریباً همه جا روی $[a,b]$ وجود دارند و

الف) اگر $\alpha \notin W$ آن‌گاه $({}^cD^\alpha_{a+}f)(x)$ و $({}^cD^\alpha_{b-}f)(x)$ به صورت زیرند

$$\left({}^cD^\alpha_{a+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^n(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt := (I^{n-\alpha}_{a+}D^nf)(x), \quad (۴۰.۱.۱)$$

$$\left({}^cD^\alpha_{b-}f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b \frac{f^n(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt = ((-1)^nI^{n-\alpha}_{b-}D^nf)(x). \quad (۴۱.۱.۱)$$

که $D = \frac{d}{dx}$.

ب) اگر $\alpha = n \in W$ آن‌گاه $({}^cD^n_{a+}f)(x)$ و $({}^cD^n_{b-}f)(x)$ را می‌توان از (۲۹.۱.۱) و (۳۰.۱.۱) به دست آورد.

برهان: [7]. □

۶.۱.۱ مشتقات کسری گرانوالد—لتنیکف

می‌دانیم مشتق معمولی تابع $f(x)$ از مرتبه nام به شکل زیر است

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\Delta^n_hf)(x)}{h^n} \quad (۴۲.۱.۱)$$

که در آن $(\Delta^n_hf)(x)$ تفاضل متناهی تابع $f(x)$ در نقطه x با طول گام h می‌باشد و $(\Delta_hf)(x) = f(x) - f(x-h)$.

اگر $\alpha > 0$ را جایگزین n و h^α را جایگزین h^n و تفاضل $(\Delta^\alpha_hf)(x)$ از مرتبه α که در زیر آمده است و به صورت یک سری نامتناهی است را جایگزین $(\Delta^n_hf)(x)$ کنیم، مشتق کسری گرانوالد — لتنیکف با تعمیم رابطه‌ی (۴۲.۱.۱) به دست می آید.

$$(\Delta^\alpha_hf)(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh) \quad x,h\in R \ \ ,\alpha > 0, \quad (۴۳.۱.۱)$$

که $\binom{\alpha}{k}$ ضرایب دو جمله‌ای هستند. اگر $\alpha \in C$ داریم

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)},$$

و اگر $\alpha = n$،

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & n \geq k \\ 0 & 0 \leq n < k. \end{cases}$$

در تعاریف بالا $k \in W$ است. اگر $h > 0$ تفاضل (۴۳.۱.۱) را تفاضل سمت چپ و اگر $h < 0$ تفاضل سمت راست می‌نامیم. سری (۴۳.۱.۱) یک سری به طور مطلق و یکنواخت همگراست.

مشتق‌های کسری گرانوالد — لتنیکف به شکل زیرند

$$f_{+}^{\alpha}(x) := \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} \quad ,\alpha > 0. \qquad (۴۴.۱.۱)$$

$$f_{-}^{\alpha}(x) := \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_{-h}^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} \quad ,\alpha > 0. \qquad (۴۵.۱.۱)$$

حال فرض کنیم تابع $f(x)$ روی یک بازه متناهی $[a, b]$ تعریف شود، تفاضل (۴۳.۱.۱) را می‌توان به این صورت نوشت

$$(\Delta_h^{\alpha} f)(x) = (\Delta_h^{\alpha} f^*)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f^*(x - kh) \quad ,x, h \in R \ \ ,\alpha > 0.$$
(۴۶.۱.۱)

که

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

تفاضل کسری تعریف شده در (۴۶.۱.۱) را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت

$$(\Delta_{h\ ,\ a+}^{\alpha} f)(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \quad ,x \in R\ ,\ h > 0\ ,\alpha > 0. \qquad (۴۷.۱.۱)$$

$$(\Delta_{h\ ,\ b-}^{\alpha} f)(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{b-x}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + kh) \quad ,x \in R\ ,\ h > 0\ ,\alpha > 0. \qquad (۴۸.۱.۱)$$

در نتیجه مشتق کسری چپ گرانوالد — لتنیکف از مرتبه α و مشتق کسری راست گرانوالد — لتنیکف از مرتبه α به ترتیب برابرند با

$$f_{a+}^{\alpha}(x) \ := \ \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_{h\ ,\ a+}^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} \quad , \ \alpha > 0, \qquad (۴۹.۱.۱)$$

$$f_{b-}^{\alpha}(x) \ := \ \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_{h\ ,\ b-}^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} \quad , \ \alpha > 0. \qquad (۵۰.۱.۱)$$

نکته ۳.۱.۱ فرض کنیم $n-1<\alpha<n$ و $f(x)$ روی بازه $[a,b]$، $n-1$ بار مشتق پیوسته داشته باشد. همچنین $f^n(x)$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد آن گاه مشتقات ریمان — لیوویل f از مرتبه‌ی α موجود و مطابق با مشتقات گرانوالد — لتنیکف آن از مرتبه α هستند[11].

اساس روش تفاضل متناهی ارائه تقریبهای عددی برای مشتقات است. به کمک قضیه زیر یک تقریب مهم و کاربردی برای مشتقات لیوویل و ریمان — لیوویل ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۱.۱ . فرض کنید $m-1<\alpha<m$ و $f\in C^{n+[\alpha]+2}(R)$ به طوری که همه مشتق های f تا مرتبه $n+[\alpha]+2$ متعلق به $L^1(R)$ و $C_0(R)$ باشند. برای هر عدد صحیح $p\geq 0$ عملگر تفاضلی گرانوالد انتقال یافته را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Delta_{h,p}^{\alpha}f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)f(x-(j-p)h) \qquad (۵۱.۱.۱)$$

در این صورت ضرایب a_l مستقل از h,f,x وجود دارند به طوری که برای هر $x\in R$،

$$h^{-\alpha}\Delta_{h,p}^{\alpha}f(x)=(D_+^{\alpha}f)(x)+\sum_{l=1}^{n-1}(a_l(D_+^{\alpha+l}f)(x))h^l+O(h^n). \qquad (۵۲.۱.۱)$$

برهان: با توجه به فرض قضیه و بنابر نکته (۱.۱.۱) ثابت c_1 وجود دارد به طوری که

$$\forall k\in R \quad ,|\widehat{f}(k)|\leq c_1(1+|k|)^{-n-[\alpha]-2}, \qquad (۵۳.۱.۱)$$

که $\widehat{f}(k)=\mathcal{F}(f)(k)$ نشان دهنده تبدیل فوریه f است و $\mathcal{F}((D_+^{\alpha}f)(x))(k)=(-ik)^{\alpha}\widehat{f}(k)$ تعمیم فرمول تبدیل فوریه برای مشتق از مرتبه صحیح است [14]. به علاوه برای هر $a\in R$ رابطه‌ی $\mathcal{F}[f(x-a)](k)=e^{iak}\widehat{f}(k)$ را داریم و همچنین می‌دانیم

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)z^j, \qquad (۵۴.۱.۱)$$

که سری فوق برای $|z|<1$ مطلقاً همگراست. از این رو $\Delta_{h,p}^{\alpha}f\in L^1(R)$ و در نتیجه داریم

$$\mathcal{F}(h^{-\alpha}\Delta_{h,p}^{\alpha}f)(k)=h^{-\alpha}e^{-ikph}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)e^{ijkh}\widehat{f}(k)$$